INTEGRÁLY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

V předchozích kapitolách bylo uvedeno mnoho příkladů na použití integrálu funkcí jedné proměnné.

Pro funkce více proměnných nelze použít přístup pomocí primitivních funkcí, geometrický přístup však použít lze. Jsou však i jiné možnosti, např. pomocí teorie míry nebo pomocí rozšiřování jistých lineárních zobrazení na jistých prostorech funkcí.

V kapitole o aplikacích integrálu byl uveden postup pro výpočet obsahu obsahu podmnožin roviny nebo objemu objemu podmnožin prostoru, což lze chápat jako výpočet integrálu funkce dvou nebo tří proměnných, která je na dané množině identicky rovna 1 a jinde rovna 0. Tento postup lze snadno upravit pro obecné funkce.

INTEGRACE NA INTERVALECH

Oproti reálné přímce je v rovině a prostoru větší variabilita množin, přes které je vhodné integrál definovat.

DEFINICE. Nechť je dána funkce $f(x, y)$ definovaná na intervalu $I = (a, b) \times (c, d)$ v rovině. Pak se definuje integrál funkce dvou proměnných f na I jako

$$\int_I f(x, y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

pokud má pravá strana smysl.

Jestliže $\int_I f$ je konečný, říká se, že $\int_I f$ *konverguje*.

POZOROVÁNÍ.

1. Nechť $\int_I f$ konverguje a g je funkce na I, která je totožná s f na vnitřku intervalu I. Pak $\int_I g$ konverguje a rovná se $\int_I f$.
2. Nechť $A \subset B$ jsou intervaly v rovině a funkce f definovaná na B má nulové hodnoty na $B \setminus A$. Pak

$$\int_A f(x, y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_B f(x, y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$$

   jakmile má jedna strana smysl.

Snadno se dokáží základní vlastnosti integrálu v rovině. Některé vlastnosti obdobné těm z funkcí jedné proměnné nelze převést (např. integrace po částech), některé jsou odloženy na později (např. substituce).

Řekneme, že dva intervaly v rovině se nepřekrývají, jestliže jejich průnik neobsahuje žádný interval v rovině (viz též *Otázky*).

VĚTA. Nechť I je interval v rovině.

1. Integrál na I je lineární, tj. pro libovolné funkce f, g na I a pro libovolná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g\,,$$

   jakmile má pravá strana smysl.

2. Nechť I je sjednocením nepřekrývajících se intervalů $J_1, ..., J_n$ a f je funkce definovaná na I. Potom

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

jakmile má jedna strana smysl.

3. Jsou-li g, h funkce definované na I a $h \le g$ na I pak

$$\int_I h \le \int_I g\,,$$

jakmile mají obě strany smysl.

Poznámky 1   Příklady 1   Otázky 1

Cvičení 1

Existence integrálů

V části o existenci Newtonových integrálů bylo ukázáno, že integrál z omezené spojité funkce na omezeném intervalu konverguje, tedy existuje a je konečný.

Je-li dána omezená spojitá funkce f na omezeném intervalu I v rovině, měl by integrál z f přes I konvergovat. Všechny vnitřní integrály $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ konvergují a rovnají se nějakému číslu závisejícímu na x, označí se $g(x)$. Aby bylo možné opět použít uvedenou existenční větu pro funkce jedné proměnné na $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, je nutné vědět, že g je na (a,b) spojitá a omezená. Omezenost je zřejmá a spojitost je dokázána v kapitole o integrálech s parametrem.

VĚTA. Je-li f spojitá omezená funkce na omezeném intervalu I, pak $\int_I f$ konverguje.

Vzhledem k monotónnosti integrálu, platí i zde srovnávací kritérium:

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na intervalu I a $0 \le f \le g$ na I, pak $\int_I f$ konverguje, jakmile $\int_I g$ konverguje.

Geometrický přístup

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a,b] \times [c,d]$ a funkce f je spojitá na I.

Pro každé $x \in [a,b]$ existuje $y_x \in (c,d)$ tak, že $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = f(x,y_x)(d-c)$.

Poslední součin je spojitá funkce x (podle předchozí části) a $\int_I f = (d-c)\int_a^b f(x,y_x)\,\mathrm{d}x$.

Tedy existuje $p \in (a,b)$ tak, že $\int_I f = (d-c)(b-a)f(p,y_p)$.

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$, pak existuje bod (p,q) ležící uvnitř I tak, že $\int_I f = f(p,q)(d-c)(b-a)$.

VĚTA. Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou zvolena rozdělení $a = x_0 < x_{1,n} < ... < x_{k_n,n} = b$ intervalu $[a,b]$ a $c = y_0 < y_{1,n} < ... < y_{l_n,n} = d$ intervalu $[c,d]$ taková, že délky jednotlivých intervalů nepřesahují $1/n$.

Pak pro libovolně zvolená čísla $p_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$ je

$$\lim_n \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} f(p_{i,n}, q_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) = \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Je-li $f \geq 0$, pak $\int_I f$ je roven objemu tělesa kolmého na rovinu xy, s dolní podstavou rovnou I a s „horní podstavou" rovnou grafu funkce f.

Fubiniova věta

V definici integrálu funkce dvou proměnných se nejdříve integruje podle proměnné y a potom podle proměnné x.

Není důvod, proč počítat integrál zrovna v tomto pořadí.

Vzniká otázka, zda přehozením pořadí integrování (tj. nejdříve podle x a potom podle y) vyjde stejné číslo.

VĚTA. (Fubini) Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$. Potom

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y\,,$$

jakmile má jedna strana smysl.

Poznámky 2 Příklady 2 Cvičení 2

Učení 2

INTEGRACE NA OBECNÝCH MNOŽINÁCH

Tak jako v případě funkcí jedné proměnné, nebude se tento text zabývat integrací na co nejobecnějších podmnožinách roviny nebo prostoru.

V dalším textu budou hlavně používány spojité funkce na polootevřených množinách, a to ještě v jistém smyslu hezkých.

Otevřené množiny reálných čísel jsou sjednocením nejvýše spočetně mnoha otevřených intervalů. Integrály přes otevřené množiny na $\mathbb{R}$ se tedy dají popsat jako součty integrálů přes intervaly.

S malými rozdíly se dá teoreticky postupovat i v rovině a prostoru. Pro praktický výpočet však tento přístup není vhodný, protože popis intervalů v rovině, jejichž sjednocení je daná otevřená množina, bývá obtížný.

Proto bude uvedena obdobná definice jako v předchozí části. Základní definice se omezí na množiny, které nazveme *typu* α: polootevřená množina G v rovině je typu α, jestliže její projekce na osu x je interval (označí se G_X) a pro každé $p \in G_X$ je průnik G s kolmicí na osu x v bodě p opět interval (označí se G_p).

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na polootevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$ typu α. Pak se definuje dvojrozměrný integrál funkce f přes množinu G rovností

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{G_X} \Big(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

existuje-li pravá strana.

Jestliže $\int_G f$ je konečný, říká se, že $\int_G f$ *konverguje*.

POZOROVÁNÍ.

1. Nechť $\int_G f$ konverguje a g je funkce na G, která je totožná s f na vnitřku množiny G. Pak $\int_G g$ konverguje a rovná se $\int_G f$.
2. Nechť $G \subset H$ jsou množiny typu α a funkce f definovaná na H má nulové hodnoty na $H \setminus G$. Pak

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

jakmile má jedna strana smysl.

Dvě množiny typu α se *nepřekrývají*, jestliže jejich průnik má prázdný vnitřek.

VĚTA. Nechť G je podmnožina roviny typu α.

1. Integrál je lineární, tj. pro libovolné funkce f, g na G a libovolná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_G (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_G f + \beta \int_G g\,,$$

jakmile má pravá strana smysl.

2. Nechť G je sjednocením nepřekrývajících se množin $G_1, ..., G_n$ typu α a f je funkce definovaná na G. Potom

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int_{G_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

jakmile má jedna strana smysl.

3. Jsou-li g, h funkce definované na G a $h \le g$ na G pak

$$\int_G h \le \int_G g\,,$$

jakmile mají obě strany smysl.

..

Podobně jako pro intervaly lze nyní definovat dvojrozměrný integrál na konečných sjednoceních nepřekrývajících se množin typu α:

Nechť $\{G_i\}_{i=1}^n$ je systém nepřekrývajících se množin typu α a A je jejich sjednocení. Pak se definuje $\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^n \int_{G_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Jestliže je množina G sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se intervalů, je integrál funkce na G součtem integrálů této funkce na pokrývajících intervalech?

Obecně to platit nemůže, už proto, že tuto (obecně nekonečnou) řadu nelze nějak přirozeně uspořádat (na rozdíl od intervalů na přímce). Řada tedy musí konvergovat absolutně, daný integrál však absolutně konvergovat nemusí.

Je proto nutné se omezit na funkce absolutně integrovatelné, tj. funkce f mající konvergentní integrály $\int_G f$, $\int_G |f|$.

VĚTA. Každá otevřená podmnožina roviny je sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se kompaktních intervalů.

VĚTA. Nechť G je množina typu α a f je absolutně integrovatelná funkce na G. Potom pro každé rozdělení G na intervaly $\{J_n\}$ platí

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde řada na pravé straně absolutně konverguje.

Poznámky 3 Příklady 3 Cvičení 3

Učení 3

Existence integrálů

Následující existenční věty pro integrály na množinách typu α jsou stejné jako pro integrály na intervalech.

V prvním tvrzení je však potřeba jeden další předpoklad na množinu G, totiž že hranice je v jistém smyslu spojitá.

VĚTA. Nechť $\varphi \leq \psi$ jsou spojité funkce na omezeném intervalu (a, b) a $G = \{(x, y); x \in (a, b), \varphi(x) < y < \psi(x)\}$. Pak $\int_G f$ konverguje pro každou omezenou a spojitou funkci na G.

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na intervalu I a $f \leq g$ na I, pak $\int_I f$ konverguje, jakmile $\int_I g$ konverguje.

Fubiniova věta

V následujícím tvrzení se předpokládá, že množina G typu α je stejného typu i vzhledem k ose y: projekce G na osu y je interval G_Y a průsečíky množiny G s kolmicemi na osu y v bodech jsou intervaly G_p.

VĚTA. (**Fubini**) Nechť G je množina typu α vzhledem k osám x i y. Je-li f spojitá na G a absolutně integrovatelná, pak

$$\int_{G_X} \left(\int_{G_x} f(x, y) \, \mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_{G_Y} \left(\int_{G_y} f(x, y) \, \mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} \,,$$

jakmile $\int_G f$ konverguje.

Poznámky 4 Příklady 4 Cvičení 4

SUBSTITUCE

Nejdříve je nutné se podívat na transformaci množin. Na přímce zobrazí spojitá funkce interval na interval. V rovině může spojitá funkce zobrazit interval např. na kružnici, tj. na množinu bez vnitřních bodů.

Je potřeba, aby se otevřená množina převedla opět na otevřenou množinu a její hranice na hranici nové množiny.

Stejně jako u jedné proměnné musí být transformační zobrazení prosté.

Zřejmě musí být i spojité a, protože se v transformaci funkce opět vyskytnou derivace, měly by být i parciální derivace transformace spojité.

Bude nutné přidat ještě jeden přirozený požadavek odpovídající nenulovosti derivace.

Důkaz následující věty je komplikovaný a vyžaduje jisté znalosti z geometrie roviny, které jdou nad rámec tohoto textu. Proto důkaz uveden nebude.

VĚTA. Nechť G je otevřená množina v rovině a funkce $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ jsou definovány na G. Nechť jsou splněny následující podmínky:

1. Funkce φ, ψ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.

3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi) : G \to \mathbb{R}^2$ je prostá.

Potom Φ zobrazuje G na otevřenou množinu H.

Uvedený determinant se značí $J(\varphi, \psi)$ a nazývá Jacobiho determinant nebo stručněji Jacobián. Zobrazení Φ mající uvedené tři vlastnosti předchozí věty se nazývá regulární zobrazení.

VĚTA. Nechť (φ, ψ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na H. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J(\varphi,\psi)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,,$$

jestliže má jedna strana smysl.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

Cvičení 5

TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

Trojrozměrný integrál se převede na sled jednorozměrného a dvojrozměrného (a tedy tří jednorozměrných integrálů) vzorcem

$$\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \Big(\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde (a,b) je interval obsahující projekci množiny G na osu x a H je projekce množiny G do roviny yz.

Pro použití předchozí části je třeba požadovat, aby H byla typu α nebo konečné sjednocení takových nepřekrývajících se množin a projekce G do osy x byl interval nebo konečné sjednocení intervalů. Tyto množiny se mohou také nazývat typu α (nebo jsou to sjednocení konečně mnoha nepřekrývajících se množin typu α).

Pozorování a základní vlastnosti jsou stejné.

Věta o rozdělení otevřených množin na intervaly je stejná.

Stejný je i popis integrálu pomocí součtu integrálů přes nějaké rozdělení na intervaly.

Stejné jsou i věty o existenci.

Trojrozměrný integrál spojité absolutně integrovatelné funkce lze počítat v jakémkoli pořadí souřadnic.

Nechť jsou na otevřené množině G definovány funkce $u = \varphi(x,y,z), v = \psi(x,y,z), w = \tau/x,y,z)$, které mají následující vlastnosti:

1. Funkce φ, ψ, τ mají spojité parciální derivace na G.

2. Determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} & \frac{\partial\psi}{\partial w} & \frac{\partial\tau}{\partial w} \end{vmatrix}$$

je v každém bodě G nenulový.

3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi, \tau) : G \to \mathbb{R}^3$ je prostá.

Pak se zobrazení Φ nazývá regulární a zobrazuje G na otevřenou množinu. Uvedený determinant je Jacobiho determinant nebo Jacobián a značí se $J(\varphi, \psi, \tau)$.

Platí tvrzení

VĚTA. Nechť (φ, ψ, τ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na G. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_G f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w))|J(\varphi,\psi,\tau)|\;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\;\mathrm{d}w,$$

jestliže má jedna strana smysl.

Příklady 6 Otázky 6

Cvičení 6

STANDARDY z kapitoly

INTEGRÁLY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

DEFINICE. Nechť je dána funkce $f(x,y)$ definovaná na intervalu $I = (a,b) \times (c,d)$ v rovině. Pak se definuje integrál funkce dvou proměnných f na I jako

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud má pravá strana smysl.

Jestliže $\int_I f$ je konečný, říká se, že $\int_I f$ *konverguje*.

Integrál z $x+y$ na intervalu $I = (1,3) \times (2,5)$ se počítá podle definice

$$\int_I (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \Big(\int_2^5 (x+y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Existence integrálů

VĚTA. Je-li f spojitá omezená funkce na omezeném intervalu I, pak $\int_I f$ konverguje.

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na intervalu I a $0 \le f \le g$ na I, pak $\int_I f$ konverguje, jakmile $\int_I g$ konverguje.

Geometrický přístup

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a,b] \times [c,d]$ a funkce f je spojitá na I.

Pro každé $x \in [a,b]$ existuje $y_x \in (c,d)$ tak, že $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = f(x,y_x)(d-c)$.

Poslední součin je spojitá funkce x a $\int_I f = (d-c)\int_a^b f(x,y_x)\,\mathrm{d}x$.

Tedy existuje $p \in (a,b)$ tak, že $\int_I f = (d-c)(b-a)f(p,y_p)$.

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$, pak existuje bod (p,q) ležící uvnitř I tak, že $\int_I f = f(p,q)(d-c)(b-a)$.

Fubiniova věta

VĚTA. (Fubini) Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na intervalu $I=[a,b]\times[c,d]$. Potom

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx} = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\Big)\,\mathrm{dy}\,,$$

jakmile má jedna strana smysl.

Funkce f je definována na $I=(0,1)\times(0,1)$ předpisem

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{pro } y\geq x;\\ \frac{\sin x}{x}, & \text{pro } y<x.\end{cases}$$

.

Jde spočítat jen jedním směrem: $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{dy}=\sin x$ a tedy $\int_I f = 1-\cos(1)$.

Takto integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\,\mathrm{dx}$$

lze spočítat pomocí Fubiniovy věty, pokud si všimnete, že pro $x\in(0,1)$ je $x^b-x^a=\int_a^b x^y\log x\,\mathrm{dy}$.

Potom

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y\,\mathrm{dx}\Big)\,\mathrm{dy} = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,\mathrm{dy} = \log\frac{b+1}{a+1}\,.$$

Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

definovanou na intervalu $(0,1)\times(0,1)$. Integrujte f nejprve podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)\,dy &= \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)\,dx\right)\,dy = -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy =\\ &= -(\arctan(1)-\arctan(0)) = -\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Nyní integrujme stejnou funkci ale v opačném pořadí, tj. nejprve podle proměnné y a potom podle proměnné x.

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)\,dx &= \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx =\\ &= (\arctan(1)-\arctan(0)) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

INTEGRACE NA OBECNÝCH MNOŽINÁCH

Polootevřená množina G v rovině je typu α, jestliže její projekce na osu x je interval (označí se G_X) a pro každé $p\in G_X$ je průnik G s kolmicí na osu x v bodě p opět interval (označí se G_p).

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na polootevřené množině $G\subset\mathbb{R}^2$ typu α. Pak se definuje dvojrozměrný integrál funkce f přes množinu G rovností

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_{G_X}\Big(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

existuje-li pravá strana.

Jestliže $\int_G f$ je konečný, říká se, že $\int_G f$ *konverguje*.

Existence integrálů

VĚTA. Nechť $\varphi \leq \psi$ jsou spojité funkce na omezeném intervalu (a,b) a $G = \{(x,y); x \in (a,b), \varphi(x) < y < \psi(x)\}$. Pak $\int_G f$ konverguje pro každou omezenou a spojitou funkci na G a platí

$$\int_G f \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx}\,.$$

Fubiniova věta

V následujícím tvrzení se předpokládá, že množina G typu α je stejného typu i vzhledem k ose y: projekce G na osu y je interval G_Y a průsečíky množiny G s kolmicemi na osu y v bodech jsou intervaly G_p.

VĚTA. (**Fubini**) Nechť G je množina typu α vzhledem k osám x i y. Je-li f spojitá na G a absolutně integrovatelná, pak

$$\int_{G_X} \Big(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} = \int_{G_Y} \Big(\int_{G_y} f(x,y)\,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{dy}\,,$$

jakmile $\int_G f$ konverguje.

SUBSTITUCE

VĚTA. Nechť G je otevřená množina v rovině a funkce $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ jsou definovány na G. Nechť jsou splněny následující podmínky:

1. Funkce φ, ψ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi) : G \to \mathbb{R}^2$ je prostá.

Potom Φ zobrazuje G na otevřenou množinu H.

Uvedený determinant se značí $J(\varphi,\psi)$ a nazývá Jacobiho determinant nebo stručněji Jacobián. Zobrazení Φ mající uvedené tři vlastnosti předchozí věty se nazývá regulární zobrazení.

VĚTA. Nechť (φ,ψ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na H. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_G f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(\varphi,\psi)|\;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\,,$$

jestliže má jedna strana smysl.

Polární souřadnice.
Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$.

Spočte se, že jacobián $J = r$.

Toto zobrazení je prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(a, a + 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel a.

Tato množina je malá ve smyslu, že změna hodnot funkce na této množině neovlivní hodnotu integrálu.

Takže
$$STD_{(r,\alpha)} = \{(r, \alpha) \in R^2 |\, r \in (0, \infty), \alpha \in (0, 2\pi)\} \,.$$

Takže
$$STD_{(x,y)} = \{(x, y) \in R^2 |\, (y = 0) \;\Rightarrow\; (x < 0)\} \,.$$

$$\int_0^{2\pi} (\int_0^{2\cos\alpha} r \; \mathrm{d}r) \; \mathrm{d}\alpha \,.$$

Příklad. Spočtěte obsah množiny $G = \{(x, y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

Řešení. Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení. Nyní vypočtěte z obou rovností x a y: $x = \sqrt[3]{u^2/v}, y = \sqrt[3]{uv}$ (obě nové proměnné jsou také kladné).

Výpočet byl jednoznačný, což znamená, že dané zobrazení je prosté a zobrazuje G na interval $u \in (1, 2), v \in (2, 3)$. Zbývá spočítat jacobián: $J = (3v)^{-1}$, což je na vyšetřované množině nenulové.

Pokud spočtete jacobián inverzního zobrazení, dostanete hodnotu $3y^2/x$, což je $3v$ a tedy převrácená hodnota prvního jacobiánu. Tato situace platí obecně.

Výsledný obsah je pak roven $\log(3/2)/3$.

Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2}$ dx lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

Vzpomeňte si, že primitivní funkce k e^{-x^2} nelze napsat známými funkcemi a že tedy tento integrál nelze spočítat obvyklým způsobem.

Spočtěte
$$L^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-y^2} \,\mathrm{d}y = \int_K e^{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$
kde K je první kvadrant.

V posledním integrálu zaveďte polární souřadnice a dostanete integrál
$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha \int_0^\infty re^{-r^2} \,\mathrm{d}r \,,$$
který snadno spočtete. Výsledkem bude $L = \sqrt{\pi}/2$.

Kruh v rovině je $H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.

Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y daná vzorci
$$x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$$
s jacobiánem $J = r$ nám dovolí (SUBSTITUCE) napsat kruh takto $G = \{(r, \alpha) : 0 < r \le 1, 0 < \alpha < 2\pi\}$.

tedy
$$\int_H 1 \;\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_G r \;\; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v \,.$$

Pomaleji: Nejprve nahradíme množinu H množinou $H_{(x,y)} = H \cap STD_{(x,y)}$, tedy
$$H_{(x,y)} = \{(x, y) \in STD_{(x,y)} | x^2 + y^2 \le 1\} \,.$$

Pak přepíšeme $H_{(x,y)}$ na $G_{(r,\alpha)}$ použitím polárních souřadnic (substituce $(x, y) \longleftrightarrow (r, \alpha)$, $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$) a dostaneme
$$G_{(r,\alpha)} = \{(r, \alpha) \in STD_{(r,\alpha)} | r^2 \le 1\} \,.$$

Polární souřadnice jako zobrazení jsou prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z otevřeného intervalu $(0, 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel 0.

"Vypočítejte integrál funkce $x + y$ na množině $\{1 < x + y < 2,\ 3 < x - y < 4\}$"

se po substituci $x + y = u$, $x - y = v$ tváří

"Vypočítejte integrál funkce $u \cdot |J|$ na množině $\{1 < u < 2,\ 3 < v < 4\}$, kde J je determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial u}(u-v) \\ \frac{\partial}{\partial v}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u-v) \end{vmatrix} \text{."}$$

TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

Trojrozměrný integrál se převede na sled jednorozměrného a dvojrozměrného (a tedy tří jednorozměrných integrálů) vzorcem

$$\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \Big(\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde (a, b) je interval obsahující projekci množiny G na osu x a H je projekce množiny G do roviny yz.

Příklad. Určete příslušné meze v jednotlivých jednorozměrných integrálech pro $\int_G f$, kde $G = \{(x,y,z); x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 3\}$.

Řešení. Zřejmě je $0 < z < 3 - x - y, 0 < y < 3 - x, 0 < x < 3$, takže výsledkem je

$$\int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Nechť jsou na otevřené množině G definovány funkce $u = \varphi(x,y,z), v = \psi(x,y,z), w = \tau/x,y,z)$, které mají následující vlastnosti:

1. Funkce φ, ψ, τ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} & \frac{\partial\psi}{\partial w} & \frac{\partial\tau}{\partial w} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi, \tau) : G \to \mathbb{R}^3$ je prostá.

Pak se zobrazení Φ nazývá regulární a zobrazuje G na otevřenou množinu. Uvedený determinant je Jacobiho determinant nebo Jacobián a značí se $J(\varphi, \psi, \tau)$.

VĚTA. Nechť (φ, ψ, τ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na G. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_G f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w))|J(\varphi,\psi,\tau)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w,$$

jestliže má jedna strana smysl.

$$(x,y,z) = (\varphi,\psi,\tau)(u,v,w)$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = |J(\varphi,\psi,\tau)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w\ .$$

Cylindrické (válcové) souřadnice jsou vlastně polární souřadnice pro dvě proměnné s nezměněnou zbývající proměnnou:

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\sin\alpha\,, \quad z = z\,.$$

Snadno se zjistí, že jacobián je opět roven r jako u polárních souřadnic a že toto zobrazení je prosté pro $r > 0, \alpha \in (a, a + 2\pi), z \in \mathbb{R}$, kde a je nějaké libovolné reálné číslo.

Tuto množinu zobrazuje na celé $\mathbb{R}^3$ kromě jedné poloroviny (podobně jako jedna polopřímka u polárního zobrazení).

Sférické souřadnice jsou obdobou polárních souřadnic o jednu dimenzi výše. Bod (x, y, z) se promítne do roviny xy na bod (x', y'). Opět se označí r (resp. r') vzdálenost bodu (x, y, z) (resp. (x', y')) od počátku a dále β úhel, který svírá spojnice bodu (x, y, z) s počátkem s rovinou xy (tento úhel se bere v intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$). Potom $x' = r' \cos\alpha, y' = r' \sin\alpha$, kde α je stejný úhel jako u polárních souřadnic. Vyjádřením r' pomocí r a β se dostane

$$x = r \cos\alpha \cos\beta\,, \quad y = r \sin\alpha \cos\beta\,, \quad z = r \sin\beta\,,$$

Spočtěte jacobián a dostanete $-r^2 \cos\beta$.

Sférické zobrazení tedy bude regulární např. na množině $r > 0, \alpha \in (0, 2\pi), \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ a zobrazí tuto množinu na celý prostor kromě uzavřené poloroviny určené osou z a kladnou osou x. Tato množina je opět malá vzhledem k integraci a změny funkce na ní neovlivní výsledek integrace.