

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY



Má-li se spočítat např. spotřeba betonu na rovný plot s měnící se výškou, stačí spočítat integrál z této výšky podle základny plotu.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY



Má-li se spočítat např. spotřeba betonu na rovný plot s měnící se výškou, stačí spočítat integrál z této výšky podle základny plotu.



Co když je ale základnou plotu nikoli rovná úsečka, ale křivá čára?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY



Má-li se spočítat např. spotřeba betonu na rovný plot s měnící se výškou, stačí spočítat integrál z této výšky podle základny plotu.



Co když je ale základnou plotu nikoli rovná úsečka, ale křivá čára?



Podobný problém vzniká, má-li se spočítat práce vykonaná působením síly po nějaké křivé dráze.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY



Má-li se spočítat např. spotřeba betonu na rovný plot s měnící se výškou, stačí spočítat integrál z této výšky podle základny plotu.



Co když je ale základnou plotu nikoli rovná úsečka, ale křivá čára?



Podobný problém vzniká, má-li se spočítat práce vykonaná působením síly po nějaké křivé dráze.



Na vyřešení tohoto úkolu zavedeme tzv. křivkové integrály.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nejdříve bude nutné se podrobněji podívat na pojmy týkající se křivek. Jsou to většinou pojmy z diferenciální geometrie a není možné v tomto textu všechny potřebné pojmy podrobně probrat.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve bude nutné se podrobněji podívat na pojmy týkající se křivek. Jsou to většinou pojmy z diferenciální geometrie a není možné v tomto textu všechny potřebné pojmy podrobně probrat.



Pojmy, které představíme, mají názornou interpretaci a není problém si vybudovat vlastní představu.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve bude nutné se podrobněji podívat na pojmy týkající se křivek. Jsou to většinou pojmy z diferenciální geometrie a není možné v tomto textu všechny potřebné pojmy podrobně probrat.



Pojmy, které představíme, mají názornou interpretaci a není problém si vybudovat vlastní představu.



Mám rád hezké křivky ...

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKY



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKY



Křivka může být zadána různými způsoby. Nejobvyklejší zadání (a pokud nebude řečeno jinak, právě toto zadání bude použito) je jako spojitý obraz kompaktního intervalu z \mathbb{R} . Jedná se vlastně o parametrické zadání, protože spojitě zobrazení $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je n -tice spojitých reálných funkcí jedné proměnné definovaných na $[a, b]$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz. křivka
- orientace

křivk.integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu

- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKY



Křivka může být zadána různými způsoby. Nejobvyklejší zadání (a pokud nebude řečeno jinak, právě toto zadání bude použito) je jako spojitý obraz kompaktního intervalu z \mathbb{R} . Jedná se vlastně o parametrické zadání, protože spojitě zobrazení $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je n -tice spojitých reálných funkcí jedné proměnné definovaných na $[a, b]$.



Křivka v rovině je tedy popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in [a, b]\}$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKY



Křivka může být zadána různými způsoby. Nejobvyklejší zadání (a pokud nebude řečeno jinak, právě toto zadání bude použito) je jako spojitý obraz kompaktního intervalu z \mathbb{R} . Jedná se vlastně o parametrické zadání, protože spojitě zobrazení $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je n -tice spojitých reálných funkcí jedné proměnné definovaných na $[a, b]$.



Křivka v rovině je tedy popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in [a, b]\}$.



Křivka v prostoru je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi, \tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in [a, b]\}$.



- LEKCE22-IKR
- Křivkový integrál
- křivka
 - uzavřená křivka
 - spojení křivek
 - hladká křivka
 - část. hladká křivka
 - jednoduchá uz. křivka
 - orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek
- Greenova věta
- těžiště drátu
- plocha křivkovým int.
- STANDARDY
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKY



Křivka může být zadána různými způsoby. Nejobvyklejší zadání (a pokud nebude řečeno jinak, právě toto zadání bude použito) je jako spojitý obraz kompaktního intervalu z \mathbb{R} . Jedná se vlastně o parametrické zadání, protože spojitě zobrazení $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je n -tice spojitých reálných funkcí jedné proměnné definovaných na $[a, b]$.



Křivka v rovině je tedy popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in [a, b]\}$.



Křivka v prostoru je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi, \tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in [a, b]\}$.



Počáteční bod křivky je $\Phi(a)$, koncový bod je $\Phi(b)$ (pokud není orientace stanovena jinak – viz dále). Křivky, u kterých počáteční a koncový bod splývají, se nazývají *uzavřené*.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

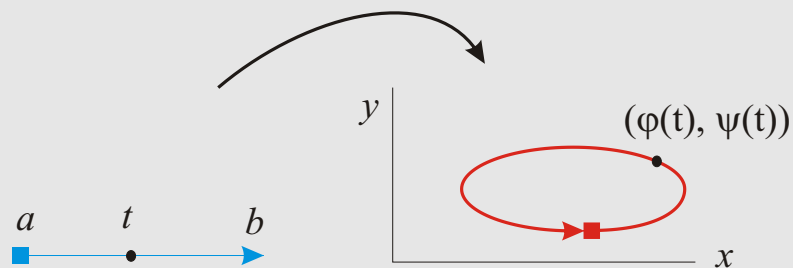
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

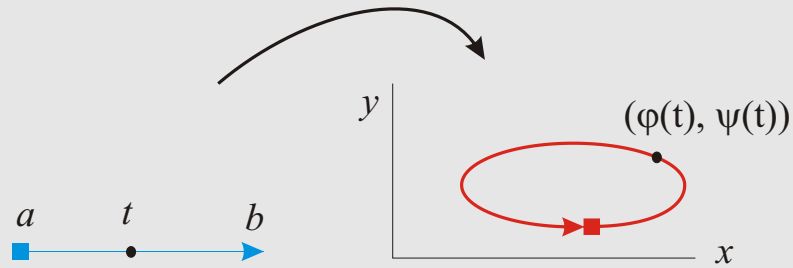
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Např. elipsa, lemniskata (tj. „ležatá osmička“), obvod obdélníku jsou uzavřené křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Např. elipsa, lemniskata (tj. „ležatá osmička“), obvod obdélníku jsou uzavřené křivky.



Graf funkce jedné proměnné nejsou uzavřené křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Např. elipsa, lemniskata (tj. „ležatá osmička“), obvod obdélníku jsou uzavřené křivky.

↓
Graf funkce jedné proměnné nejsou uzavřené křivky.



Teď si budeme s křivkami
hrát, nastavovat, spojovat
...



LEKCE22-IKR
Křivkový integrál
křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

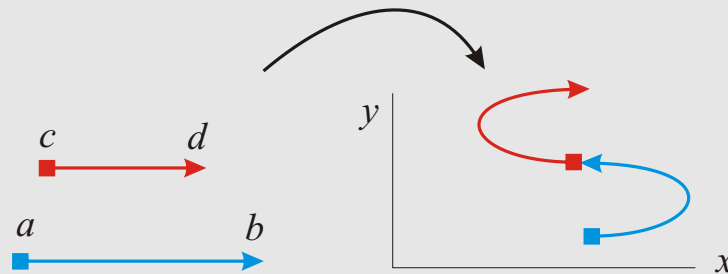
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť jsou dány dvě křivky C_1, C_2 definované funkcemi $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\Psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, přičemž koncový bod křivky C_1 je počáteční bod křivky C_2 , tj. $\Phi(b) = \Psi(c)$. **Spo-**
jením obou křivek se rozumí křivka, značená jako $C_1 + C_2$, definovaná funkcí $T(t)$ na intervalu $[a, b + d - c]$ předpisem

$$T(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \text{pro } t \in [a, b]; \\ \Psi(t + c - b), & \text{pro } t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

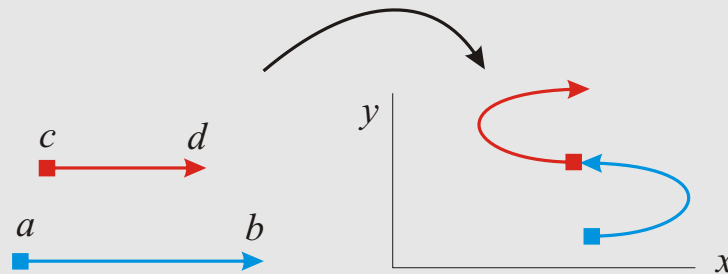
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť jsou dány dvě křivky C_1, C_2 definované funkcemi $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\Psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, přičemž koncový bod křivky C_1 je počáteční bod křivky C_2 , tj. $\Phi(b) = \Psi(c)$. **Spo-**
jením obou křivek se rozumí křivka, značená jako $C_1 + C_2$, definovaná funkcí $T(t)$ na intervalu $[a, b + d - c]$ předpisem

$$T(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \text{pro } t \in [a, b]; \\ \Psi(t + c - b), & \text{pro } t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$



↓
Je zřejmé, jak se definuje spojení tří a více křivek.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz. křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující definice a tvrzení budou formulovány pro rovinu. Na prostor se většinou přenášejí zřejmým způsobem (některé složitější případy jsou napovězeny v *Poznámkách*).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující definice a tvrzení budou formulovány pro rovinu. Na prostor se většinou přenášejí zřejmým způsobem (některé složitější případy jsou napovězeny v *Poznámkách*).



V dalším textu bude používán pojem **hladká křivka**. Je-li křivka popsána parametricky funkcemi φ, ψ , znamená to:

1. funkce φ, ψ mají spojité první derivace;
2. pro každé $t \in [a, b]$ je aspoň jedna z derivací $\varphi'(t), \psi'(t)$ nenulová;
3. každý bod křivky je obrazem jediného bodu z $[a, b]$ s jedinou možnou výjimkou: počáteční a koncový bod mohou splývat.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující definice a tvrzení budou formulovány pro rovinu. Na prostor se většinou přenášejí zřejmým způsobem (některé složitější případy jsou napovězeny v *Poznámkách*).



V dalším textu bude používán pojem **hladká křivka**. Je-li křivka popsána parametricky funkcemi φ, ψ , znamená to:

1. funkce φ, ψ mají spojité první derivace;
2. pro každé $t \in [a, b]$ je aspoň jedna z derivací $\varphi'(t), \psi'(t)$ nenulová;
3. každý bod křivky je obrazem jediného bodu z $[a, b]$ s jedinou možnou výjimkou: počáteční a koncový bod mohou splývat.



Například oblouk, elipsa, graf spojité funkce mající spojitou derivaci na kompaktním intervalu, jsou hladké křivky. Lemniskata není hladkou křivkou.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



"Osmička" se sama protíná,
její zobrazení tedy není
prosté. Ať se snažíte jak
chcete. Zkusil jsem.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká křivka je křivka, která vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká křivka je křivka, která vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.



Například lemniskata, asteroida, cykloida, obvod obdélníku, jsou po částech hladké křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká křivka je křivka, která vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.



Například lemniskata, asteroida, cykloida, obvod obdélníku, jsou po částech hladké křivky.



Příklad lemniskaty dává příklad uzavřené křivky, která však má nepříjemný bod. V mnoha případech lze tuto nepříjemnost obejít, pro jednoduchost ji však vyloučíme v definici jednoduše uzavřené křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká křivka je křivka, která vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.



Například lemniskata, asteroida, cykloida, obvod obdélníku, jsou po částech hladké křivky.



Příklad lemniskaty dává příklad uzavřené křivky, která však má nepříjemný bod. V mnoha případech lze tuto nepříjemnost obejít, pro jednoduchost ji však vyloučíme v definici jednoduše uzavřené křivky.



Nechť je po částech hladká křivka C spojením křivek C_1, C_2, \dots, C_n v uvedeném pořadí. Křivka C se nazývá **jednoduše uzavřená**, jestliže všechny křivky C_i jsou navzájem disjunktní s jedinými výjimkami:

- počáteční bod křivky C_1 splývá s koncovým bodem křivky C_n
- počáteční bod křivky C_{i+1} splývá s koncovým bodem křivky C_i pro $i = 1..n - 1$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká křivka je křivka, která vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.



Například lemniskata, asteroida, cykloida, obvod obdélníku, jsou po částech hladké křivky.



Příklad lemniskaty dává příklad uzavřené křivky, která však má nepříjemný bod. V mnoha případech lze tuto nepříjemnost obejít, pro jednoduchost ji však vyloučíme v definici jednoduše uzavřené křivky.



Nechť je po částech hladká křivka C spojením křivek C_1, C_2, \dots, C_n v uvedeném pořadí. Křivka C se nazývá **jednoduše uzavřená**, jestliže všechny křivky C_i jsou navzájem disjunktní s jedinými výjimkami:

- počáteční bod křivky C_1 splývá s koncovým bodem křivky C_n
- počáteční bod křivky C_{i+1} splývá s koncovým bodem křivky C_i pro $i = 1..n - 1$.



Dá se dokázat, podobně jako u kružnice, že jednoduše uzavřená křivka C dělí rovinu na dvě části: omezenou, tzv. *vnitřek* křivky C (značený ιC) a neomezenou, tzv. *vnějšek*.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu

plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tomu jsem sám nevěřil. Nějak se mi to nakonec samo povedlo.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Některá tvrzení zaslouží
zvláštní uznání. Ď.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V dalším textu bude potřeba orientace křivky, tj. určení kladného a záporného směru křivky. Je-li C orientovaná křivka, značí $-C$ množinově tutéž křivku s opačnou orientací.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka

- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.

- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

- Greenova věta
- těžiště drátu
- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V dalším textu bude potřeba orientace křivky, tj. určení kladného a záporného směru křivky. Je-li C orientovaná křivka, značí $-C$ množinově tutéž křivku s opačnou orientací.



U křivky zadané pomocí funkce Φ na nějakém intervalu $[a, b]$ je kladná orientace dána (pokud není určeno jinak) tímto intervalem. Kladná orientace probíhá od bodu $\Phi(a)$ do bodu $\Phi(b)$, tj. podle rostoucího parametru.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V dalším textu bude potřeba orientace křivky, tj. určení kladného a záporného směru křivky. Je-li C orientovaná křivka, značí $-C$ množinově tutéž křivku s opačnou orientací.



U křivky zadané pomocí funkce Φ na nějakém intervalu $[a, b]$ je kladná orientace dána (pokud není určeno jinak) tímto intervalem. Kladná orientace probíhá od bodu $\Phi(a)$ do bodu $\Phi(b)$, tj. podle rostoucího parametru.



Kladná orientace jednoduše uzavřené křivky (pokud nebude řečeno jinak) je proti směru pohybu hodinových ručiček. Přesněji řečeno: jdete-li po této křivce v kladném směru, máte její vnitřek po levé straně.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

- vlastnosti 2.dr.

- vztah 1. a 2. dr.

- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu

- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

V dalším textu bude potřeba orientace křivky, tj. určení kladného a záporného směru křivky. Je-li C orientovaná křivka, značí $-C$ množinově tutéž křivku s opačnou orientací.



U křivky zadané pomocí funkce Φ na nějakém intervalu $[a, b]$ je kladná orientace dána (pokud není určeno jinak) tímto intervalem. Kladná orientace probíhá od bodu $\Phi(a)$ do bodu $\Phi(b)$, tj. podle rostoucího parametru.



Kladná orientace jednoduše uzavřené křivky (pokud nebude řečeno jinak) je proti směru pohybu hodinových ručiček. Přesněji řečeno: jdete-li po této křivce v kladném směru, máte její vnitřek po levé straně.



Kdo nyní postrádá přesnou definici, postrádá i intuici.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tečný vektor u orientovaných hladkých křivek bude označován tučně, např. \mathbf{dt} . Bude-li funkce f s hodnotami v rovině nebo prostoru chápána jako vektor, bude se též značit tučně jako \mathbf{f} .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tečný vektor u orientovaných hladkých křivek bude označován tučně, např. \mathbf{dt} . Bude-li funkce f s hodnotami v rovině nebo prostoru chápána jako vektor, bude se též značit tučně jako \mathbf{f} .



Dávám zde prostor vektorové představivosti.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tečný vektor u orientovaných hladkých křivek bude označován tučně, např. dt . Bude-li funkce f s hodnotami v rovině nebo prostoru chápána jako vektor, bude se též značit tučně jako f .



Dávám zde prostor vektorové představivosti.



Takzvaný vektorový prostor.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Uvědomte si, že graf spojitě funkce f na $[a, b]$ je speciální případ parametricky zadané křivky: $\varphi(t) = t, \psi(t) = f(t), t \in [a, b]$. Tato křivka je hladká právě když f má spojitou derivaci na $[a, b]$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Uvědomte si, že graf spojitě funkce f na $[a, b]$ je speciální případ parametricky zadané křivky: $\varphi(t) = t, \psi(t) = f(t), t \in [a, b]$. Tato křivka je hladká právě když f má spojitou derivaci na $[a, b]$.



Po částech hladké křivky nemusejí mít v konečně mnoha bodech tečny. V těchto bodech však mají tečny jednostranné (zleva a zprava).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Uvědomte si, že graf spojitě funkce f na $[a, b]$ je speciální případ parametricky zadané křivky: $\varphi(t) = t, \psi(t) = f(t), t \in [a, b]$. Tato křivka je hladká právě když f má spojitou derivaci na $[a, b]$.



Po částech hladké křivky nemusejí mít v konečně mnoha bodech tečny. V těchto bodech však mají tečny jednostranné (zleva a zprava).



Uzavřené křivky jsou speciálním případem tzv *Jordanových křivek*, což jsou spojitě prosté obrazy kružnice (např. elipsa, obvod obdélníku). Jordanova křivka v rovině dělí (stejně jako kružnice) rovinu na dvě souvislé části, jednu omezenou (tzv. vnitřek) a jednu neomezenou (tzv. vnějšek).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Uvědomte si, že graf spojitě funkce f na $[a, b]$ je speciální případ parametricky zadané křivky: $\varphi(t) = t, \psi(t) = f(t), t \in [a, b]$. Tato křivka je hladká právě když f má spojitou derivaci na $[a, b]$.



Po částech hladké křivky nemusejí mít v konečně mnoha bodech tečny. V těchto bodech však mají tečny jednostranné (zleva a zprava).



Uzavřené křivky jsou speciálním případem tzv *Jordanových křivek*, což jsou spojitě prosté obrazy kružnice (např. elipsa, obvod obdélníku). Jordanova křivka v rovině dělí (stejně jako kružnice) rovinu na dvě souvislé části, jednu omezenou (tzv. vnitřek) a jednu neomezenou (tzv. vnějšek).



Toto dokázat ale není jen tak. Nezkoušejte to během semestru.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Uvědomte si, že graf spojitě funkce f na $[a, b]$ je speciální případ parametricky zadané křivky: $\varphi(t) = t, \psi(t) = f(t), t \in [a, b]$. Tato křivka je hladká právě když f má spojitou derivaci na $[a, b]$.



Po částech hladké křivky nemusejí mít v konečně mnoha bodech tečny. V těchto bodech však mají tečny jednostranné (zleva a zprava).



Uzavřené křivky jsou speciálním případem tzv *Jordanových křivek*, což jsou spojitě prosté obrazy kružnice (např. elipsa, obvod obdélníku). Jordanova křivka v rovině dělí (stejně jako kružnice) rovinu na dvě souvislé části, jednu omezenou (tzv. vnitřek) a jednu neomezenou (tzv. vnějšek).



Toto dokázat ale není jen tak. Nezkoušejte to během semestru.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ani o prázdninách.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Další možností zadání křivky v rovině je pomocí spojitě funkce $f(x, y)$ dvou proměnných, jako množina bodů $\{(x, y); f(x, y) = 0\}$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Další možností zadání křivky v rovině je pomocí spojitě funkce $f(x, y)$ dvou proměnných, jako množina bodů $\{(x, y); f(x, y) = 0\}$.



První dvě vlastnosti hladké křivky se snadno přenesou na toto zadání (místo derivace se použijí parciální derivace). Třetí vlastnost se popisuje hůře i když je jasné, co tato vlastnost znamená; občas se nahrazuje vlastností, že v každém bodě křivky existuje jediná tečna.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Další možností zadání křivky v rovině je pomocí spojitě funkce $f(x, y)$ dvou proměnných, jako množina bodů $\{(x, y); f(x, y) = 0\}$.



První dvě vlastnosti hladké křivky se snadno přenesou na toto zadání (místo derivace se použijí parciální derivace). Třetí vlastnost se popisuje hůře i když je jasné, co tato vlastnost znamená; občas se nahrazuje vlastností, že v každém bodě křivky existuje jediná tečna.



V tomto textu se integrály přes takto zadané křivky nebudou studovat.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Už z použitého názvu *křivky* se dá usoudit, že je tu obraz důležitější než funkce, které křivku popisují.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Už z použitého názvu *křivky* se dá usoudit, že je tu obraz důležitější než funkce, které křivku popisují.



Protože každé dva uzavřené omezené intervaly lze na sebe vzájemně převést rostoucí (nebo klesající) prostou spojitou funkcí, lze dost volně nakládat s definičními obory křivek.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

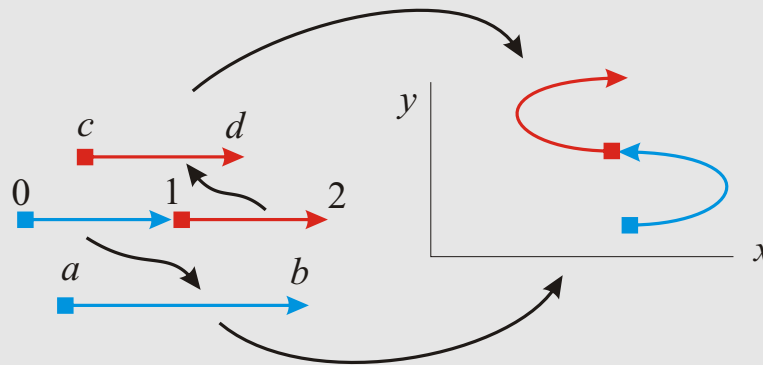
Už z použitého názvu *křivky* se dá usoudit, že je tu obraz důležitější než funkce, které křivku popisují.



Protože každé dva uzavřené omezené intervaly lze na sebe vzájemně převést rostoucí (nebo klesající) prostou spojitou funkcí, lze dost volně nakládat s definičními obory křivek.



Např. u spojení dvou křivek bylo možné předpokládat, že oba intervaly $[a, b]$, $[c, d]$ na sebe navazují, tj., že $b = c$. Nebo, že první křivka je definována na $[0, 1]$ a druhá křivka na $[1, 2]$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

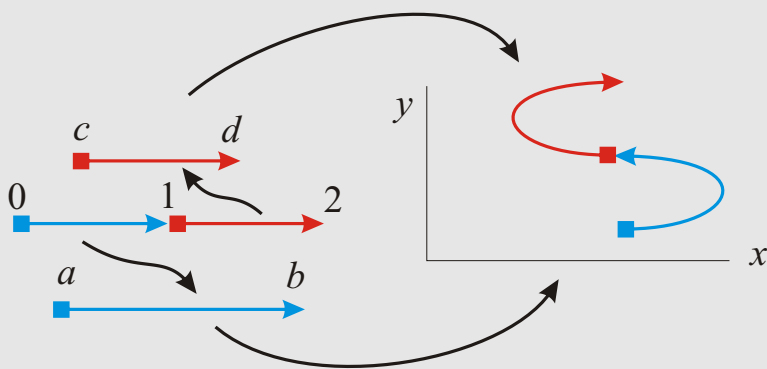
Už z použitého názvu *křivky* se dá usoudit, že je tu obraz důležitější než funkce, které křivku popisují.



Protože každé dva uzavřené omezené intervaly lze na sebe vzájemně převést rostoucí (nebo klesající) prostou spojitou funkcí, lze dost volně nakládat s definičními obory křivek.



Např. u spojení dvou křivek bylo možné předpokládat, že oba intervaly $[a, b]$, $[c, d]$ na sebe navazují, tj., že $b = c$. Nebo, že první křivka je definována na $[0, 1]$ a druhá křivka na $[1, 2]$.



Kvůli zachování orientace křivek je lépe používat rostoucí funkce převádějící jeden interval na druhý.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu
- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pokud orientace není důležitá (např. pro integrály 1.druhu), může se použít i klesající funkce.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecně řečeno, určit kladnou orientaci hladké křivky znamená určit ze dvou možností směru tečného vektoru právě jeden, který se bude spojitě měnit. U po částech hladké křivky může být kladná orientace určena svými hladkými částmi, možností je pak více.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Křivky v prostoru. Zadání křivek v rovině implicitním tvarem pomocí funkce dvou proměnných nelze automaticky přenést do prostoru, protože rovnice $f(x, y, z) = 0$ obecně udává plochu a nikoli křivku. Lze však použít dvou funkcí a křivku zadat jako průnik dvou ploch, tj. jako množinu bodů $\{(x, y, z); f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0\}$. Tato situace se vyskytovala u vázaných extrémů funkcí více proměnných, pro křivkové integrály se v tomto textu nebude používat.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U prostorových křivek popsaných parametricky, lze kladnou orientaci chápat stejně jako u rovinných křivek, tj. pomocí rostoucího parametru. Popsat orientaci uzavřených křivek v prostoru způsobem použitým pro rovinné křivky nelze, protože křivka může být všelijak nakloněná nebo jinak složitá. Není proto jasné, jak se na křivku postavit.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka

- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.

- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

- Greenova věta
- těžiště drátu
- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U prostorových křivek popsaných parametricky, lze kladnou orientaci chápat stejně jako u rovinných křivek, tj. pomocí rostoucího parametru. Popsat orientaci uzavřených křivek v prostoru způsobem použitým pro rovinné křivky nelze, protože křivka může být všelijak nakloněná nebo jinak složitá. Není proto jasné, jak se na křivku postavit.



Orientace vzhledem k ploše, kterou křivka ohraničuje, bude popsána v příští kapitole.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U prostorových křivek popsaných parametricky, lze kladnou orientaci chápat stejně jako u rovinných křivek, tj. pomocí rostoucího parametru. Popsat orientaci uzavřených křivek v prostoru způsobem použitým pro rovinné křivky nelze, protože křivka může být všelijak nakloněná nebo jinak složitá. Není proto jasné, jak se na křivku postavit.



Orientace vzhledem k ploše, kterou křivka ohraničuje, bude popsána v příští kapitole.



Jsou ovšem prostorové uzavřené křivky, které žádnou vhodnou plochu neohraničují (např. kraj Möbiova listu).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka

- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.

- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

- Greenova věta
- těžiště drátu
- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U prostorových křivek popsaných parametricky, lze kladnou orientaci chápat stejně jako u rovinných křivek, tj. pomocí rostoucího parametru. Popsat orientaci uzavřených křivek v prostoru způsobem použitým pro rovinné křivky nelze, protože křivka může být všelijak nakloněná nebo jinak složitá. Není proto jasné, jak se na křivku postavit.



Orientace vzhledem k ploše, kterou křivka ohraničuje, bude popsána v příští kapitole.



Jsou ovšem prostorové uzavřené křivky, které žádnou vhodnou plochu neohraničují (např. kraj Möbiova listu).



V této kapitole nebude orientace prostorové křivky podstatná.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

U prostorových křivek popsaných parametricky, lze kladnou orientaci chápat stejně jako u rovinných křivek, tj. pomocí rostoucího parametru. Popsat orientaci uzavřených křivek v prostoru způsobem použitým pro rovinné křivky nelze, protože křivka může být všelijak nakloněná nebo jinak složitá. Není proto jasné, jak se na křivku postavit.



Orientace vzhledem k ploše, kterou křivka ohraničuje, bude popsána v příští kapitole.



Jsou ovšem prostorové uzavřené křivky, které žádnou vhodnou plochu neohraničují (např. kraj Möbiova listu).



V této kapitole nebude orientace prostorové křivky podstatná.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Křivky mohou mnohému z nás zatočit hlavou. Pozor na ně.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Křivky mohou mnohému z nás zatočit hlavou. Pozor na ně.



S orientací nemám problém.

Konec poznámek 1.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Najděte po částech hladkou funkci $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, jejíž obraz je obvod čtverce s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte po částech hladkou funkci $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, jejíž obraz tvoří osmičku tvořenou ze dvou kružnic, horní o poloměru 1, spodní o poloměru 2. Osmičku si sami vhodně umístěte do roviny xy .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Nalezněte parametrický popis křivky zadané rovností $x^2 + 3y^3 = 7$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Nalezněte parametrický popis křivky zadané rovností $x^2 + 3y^3 = 7$.



Co bude lepší vyjádřit, x nebo y ? Kdy by se člověk měl vyjádřit sedmičkou?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Jakou prostorovou křivku představuje parametrické zadání

$$\varphi(t) = 2 \sin t, \psi(t) = 2 \cos(t), \tau(t) = 4t, t \in [0, 20] ?$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Jakou prostorovou křivku představuje parametrické zadání

$$\varphi(t) = 2 \sin t, \psi(t) = 2 \cos(t), \tau(t) = 4t, t \in [0, 20] ?$$



Je tato křivka hladká? Je uzavřená? Leží v nějaké rovině?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Jakou prostorovou křivku představuje parametrické zadání

$$\varphi(t) = 2 \sin t, \psi(t) = 2 \cos(t), \tau(t) = 4t, t \in [0, 20] ?$$



Je tato křivka hladká? Je uzavřená? Leží v nějaké rovině?



Vidím to, ale nevím, co to je

...



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Jakou prostorovou křivku představuje parametrické zadání

$$\varphi(t) = 2 \sin t, \psi(t) = 2 \cos(t), \tau(t) = 4t, t \in [0, 20] ?$$



Je tato křivka hladká? Je uzavřená? Leží v nějaké rovině?



Vidím to, ale nevím, co to je

...



Konec příkladů 1.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Najděte lineární rostoucí funkci, která převádí interval $[a, b]$ na interval $[c, d]$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Najděte lineární rostoucí funkci, která převádí interval $[a, b]$ na interval $[c, d]$.



2. Místo lineární funkce v předchozím příkladu použijte kvadratickou funkci. Lze použít funkci tvaru $\sin(\alpha x + \beta)$ pro nějaká $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Najděte lineární rostoucí funkci, která převádí interval $[a, b]$ na interval $[c, d]$.



2. Místo lineární funkce v předchozím příkladu použijte kvadratickou funkci. Lze použít funkci tvaru $\sin(\alpha x + \beta)$ pro nějaká $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?



3. Ukažte, že elipsa je spojitým prostým obrazem jednotkové kružnice.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



S chutí do toho, půl je ho-
tovo.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDS

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



S chutí do toho, půl je ho-
tovo.



4. * S pomocí věty o implicitních funkcích ukažte, že hladká křivka zadaná rovností $f(x, y) = 0$ je po částech hladká křivka zadaná parametricky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



S chutí do toho, půl je ho-
tovo.



4. * S pomocí věty o implicitních funkcích ukažte, že hladká křivka zadaná rovností $f(x, y) = 0$ je po částech hladká křivka zadaná parametricky.



Malinké opáčko, žeeeeeeee-
eeee.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



5. Rozmyslete si, proč bylo snadné definovat orientaci kružnice v rovině a proč to tak nejde v prostoru.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Rozmyslete si, proč bylo snadné definovat orientaci kružnice v rovině a proč to tak nejde v prostoru.



6. Je možné přirozeně definovat orientaci prostorové uzavřené křivky, která je krajem Möbiova listu?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Dokažte, že po částech hladké křivky mají konečnou délku.

Konec otázek 1.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

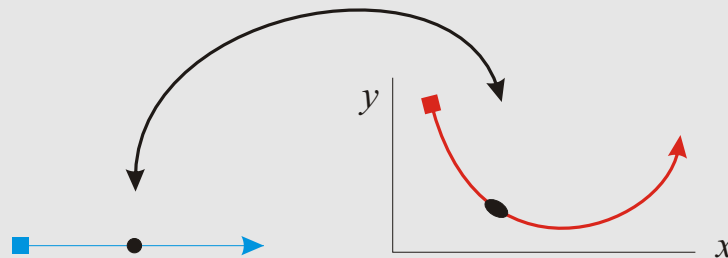
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



Postup, jak počítat integrál funkce podle křivky je přirozený: křivka se narovná do úsečky a spočte se integrál z transformované funkce přes tuto úsečku.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

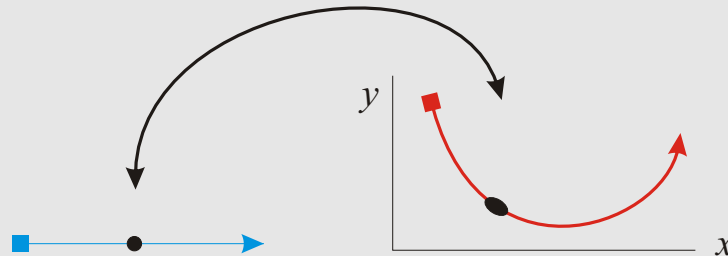
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



Postup, jak počítat integrál funkce podle křivky je přirozený: křivka se narovná do úsečky a spočte se integrál z transformované funkce přes tuto úsečku.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Každý kousek křivky odpovídá kousku definičního oboru zobrazení, které popisuje křivku. Spojitá transformace dovoluje přepočítat velikosti těchto kousků.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je to jako u Jacobiánu - ten přepočítával velikost před a po transformaci u vícerozměrného integrálu.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je to jako u Jacobiánu - ten přepočítával velikost před a po transformaci u vícerozměrného integrálu.



Je to to samé. Vlastně jde o větu o substituci mezi rovnými a křivými světy.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je to jako u Jacobiánu - ten přepočítával velikost před a po transformaci u vícerozměrného integrálu.



Je to to samé. Vlastně jde o větu o substituci mezi rovnými a křivými světy.



Vidím, ale nevěřím.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tak jako u reálných funkcí na \mathbb{R} dává integrál z funkce identicky rovné 1 délku (míru) množiny, přes kterou se integruje, měl by křivkový integrál z identické 1 přes křivku C dávat délku křivky C .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tak jako u reálných funkcí na \mathbb{R} dává integrál z funkce identicky rovné 1 délku (míru) množiny, přes kterou se integruje, měl by křivkový integrál z identické 1 přes křivku C dávat délku křivky C .



V kapitole o použití integrálu se délka křivky vypočítala jako $\int_C ds$, kde ds symbolicky značilo délku maličké části křivky, která se dala považovat za úsečku, takže se spočítala z Pythagorovy věty pomocí dx , dy .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tak jako u reálných funkcí na \mathbb{R} dává integrál z funkce identicky rovné 1 délku (míru) množiny, přes kterou se integruje, měl by křivkový integrál z identické 1 přes křivku C dávat délku křivky C .



V kapitole o použití integrálu se délka křivky vypočítala jako $\int_C ds$, kde ds symbolicky značilo délku maličké části křivky, která se dala považovat za úsečku, takže se spočítala z Pythagorovy věty pomocí dx , dy .



V podstatě již vše bylo řečeno.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V souladu s tímto značením se bude integrál funkce f podél křivky C značit $\int_C f(s) ds$, kde s jsou body křivky C .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V souladu s tímto značením se bude integrál funkce f podél křivky C značit $\int_C f(s) ds$, kde s jsou body křivky C .



Způsob, jakým byla délka křivky počítána, naznačuje, jak se bude počítat křivkový integrál.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V souladu s tímto značením se bude integrál funkce f podél křivky C značit $\int_C f(s) ds$, kde s jsou body křivky C .



Způsob, jakým byla délka křivky počítána, naznačuje, jak se bude počítat křivkový integrál.



V podstatě nelze očekávat problém.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Problém přichází nečekaně
a čeká na nás. Křivkové in-
tegrály budou dva.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Problém přichází nečekaně
a čeká na nás. Křivkové in-
tegrály budou dva.



Za chvíli bude probírán jiný přístup integrování funkcí podle křivky. Oba způsoby se odliší v názvu jako první a druhý druh.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující definice je vhodná pro výpočty v praxi se vyskytujícími případy, ale požaduje po částech hladké křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující definice je vhodná pro výpočty v praxi se vyskytujícími případy, ale požaduje po částech hladké křivky.



DEFINICE. Necht' je dána reálná funkce f na po částech hladké křivce v rovině zadané parametricky funkcemi φ a ψ na intervalu $[a, b]$. Pak se definuje **křivkový integrál 1.druhu** funkce f podél křivky C jako

$$\int_C f(s) \, ds = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt .$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující definice je vhodná pro výpočty v praxi se vyskytujícími případy, ale požaduje po částech hladké křivky.



DEFINICE. Necht' je dána reálná funkce f na po částech hladké křivce v rovině zadané parametricky funkcemi φ a ψ na intervalu $[a, b]$. Pak se definuje **křivkový integrál 1.druhu** funkce f podél křivky C jako

$$\int_C f(s) ds = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt .$$



Ono to ds je nahrazeno ošklivou odmocninou. A ta se bude bránit. Jinak O.K.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany, poslední nerovnost platí, pokud existuje levá strana.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu

plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany, poslední nerovnost platí, pokud existuje levá strana.



1. $\int_C (\alpha f(s) + \beta g(s)) \, ds = \alpha \int_C f(s) \, ds + \beta \int_C g(s) \, ds;$
2. $\int_{C_1+C_2} f(s) \, ds = \int_{C_1} f(s) \, ds + \int_{C_2} f(s) \, ds;$
3. $\int_{-C} f(s) \, ds = \int_C f(s) \, ds;$
4. $|\int_C f(s) \, ds| \leq L(C) \max_{s \in C} |f(s)|,$ kde $L(C)$ je délka křivky C .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany, poslední nerovnost platí, pokud existuje levá strana.



1. $\int_C (\alpha f(s) + \beta g(s)) ds = \alpha \int_C f(s) ds + \beta \int_C g(s) ds$;
2. $\int_{C_1+C_2} f(s) ds = \int_{C_1} f(s) ds + \int_{C_2} f(s) ds$;
3. $\int_{-C} f(s) ds = \int_C f(s) ds$;
4. $|\int_C f(s) ds| \leq L(C) \max_{s \in C} |f(s)|$, kde $L(C)$ je délka křivky C .



Předposlední tvrzení říká, že křivkový integrál prvního druhu nezávisí na orientaci křivky.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

1. Když si projdete předchozí definici a vlastnosti křivkového integrálu 1.druhu, zjistíte, že nic nebrání použití komplexní funkce f , tj. funkce mající za hodnoty komplexní čísla.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Postupem obdobným Riemannovu postupu u funkcí jedné proměnné na \mathbb{R} lze definovat křivkový integrál 1.druhu i pro nehladké křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Postupem obdobným Riemannovu postupu u funkcí jedné proměnné na \mathbb{R} lze definovat křivkový integrál 1.druhu i pro nehladké křivky.



Křivka se rozdělí na konečně mnoho dílků C_i a v každém se zvolí jeden bod s_i . Pak se vezme součet $\sum_i f(s_i)d(C_i)$, kde $d(C_i)$ je délka křivky C_i .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Postupem obdobným Riemannovu postupu u funkcí jedné proměnné na \mathbb{R} lze definovat křivkový integrál 1.druhu i pro nehladké křivky.



Křivka se rozdělí na konečně mnoho dílků C_i a v každém se zvolí jeden bod s_i . Pak se vezme součet $\sum_i f(s_i)d(C_i)$, kde $d(C_i)$ je délka křivky C_i .



Je možné se vyhnout délce křivky a místo délky C_i vzít vzdálenost krajních bodů křivky C_i .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Postupem obdobným Riemannovu postupu u funkcí jedné proměnné na \mathbb{R} lze definovat křivkový integrál 1.druhu i pro nehladké křivky.



Křivka se rozdělí na konečně mnoho dílků C_i a v každém se zvolí jeden bod s_i . Pak se vezme součet $\sum_i f(s_i)d(C_i)$, kde $d(C_i)$ je délka křivky C_i .



Je možné se vyhnout délce křivky a místo délky C_i vzít vzdálenost krajních bodů křivky C_i .



V dalším kroku se vezme posloupnost těchto dělení křivky, takových, že délky jednotlivých dílků konvergují stejnoměrně k 0, a limita součtů příslušných k těmto dělením.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Postupem obdobným Riemannovu postupu u funkcí jedné proměnné na \mathbb{R} lze definovat křivkový integrál 1.druhu i pro nehladké křivky.



Křivka se rozdělí na konečně mnoho dílků C_i a v každém se zvolí jeden bod s_i . Pak se vezme součet $\sum_i f(s_i)d(C_i)$, kde $d(C_i)$ je délka křivky C_i .



Je možné se vyhnout délce křivky a místo délky C_i vzít vzdálenost krajních bodů křivky C_i .



V dalším kroku se vezme posloupnost těchto dělení křivky, takových, že délky jednotlivých dílků konvergují stejnoměrně k 0, a limita součtů příslušných k těmto dělením.



Jestliže jsou limity pro všechny takovéto posloupnosti dělení stejné, definuje se tato limita jako křivkový integrál funkce f přes křivku C .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Postupem obdobným Riemannovu postupu u funkcí jedné proměnné na \mathbb{R} lze definovat křivkový integrál 1.druhu i pro nehladké křivky.



Křivka se rozdělí na konečně mnoho dílků C_i a v každém se zvolí jeden bod s_i . Pak se vezme součet $\sum_i f(s_i)d(C_i)$, kde $d(C_i)$ je délka křivky C_i .



Je možné se vyhnout délce křivky a místo délky C_i vzít vzdálenost krajních bodů křivky C_i .



V dalším kroku se vezme posloupnost těchto dělení křivky, takových, že délky jednotlivých dílků konvergují stejnoměrně k 0, a limita součtů příslušných k těmto dělením.



Jestliže jsou limity pro všechny takovéto posloupnosti dělení stejné, definuje se tato limita jako křivkový integrál funkce f přes křivku C .



Pro formální smysl této definice je pouze třeba, aby křivka měla konečnou délku.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Postupem obdobným Riemannovu postupu u funkcí jedné proměnné na \mathbb{R} lze definovat křivkový integrál 1.druhu i pro nehladké křivky.



Křivka se rozdělí na konečně mnoho dílků C_i a v každém se zvolí jeden bod s_i . Pak se vezme součet $\sum_i f(s_i)d(C_i)$, kde $d(C_i)$ je délka křivky C_i .



Je možné se vyhnout délce křivky a místo délky C_i vzít vzdálenost krajních bodů křivky C_i .



V dalším kroku se vezme posloupnost těchto dělení křivky, takových, že délky jednotlivých dílků konvergují stejnoměrně k 0, a limita součtů příslušných k těmto dělením.



Jestliže jsou limity pro všechny takovéto posloupnosti dělení stejné, definuje se tato limita jako křivkový integrál funkce f přes křivku C .



Pro formální smysl této definice je pouze třeba, aby křivka měla konečnou délku.



Pro spojitě funkce na po částech hladkých křivkách dávají obě definice stejný integrál.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Postupem obdobným Riemannovu postupu u funkcí jedné proměnné na \mathbb{R} lze definovat křivkový integrál 1.druhu i pro nehladké křivky.



Křivka se rozdělí na konečně mnoho dílků C_i a v každém se zvolí jeden bod s_i . Pak se vezme součet $\sum_i f(s_i)d(C_i)$, kde $d(C_i)$ je délka křivky C_i .



Je možné se vyhnout délce křivky a místo délky C_i vzít vzdálenost krajních bodů křivky C_i .



V dalším kroku se vezme posloupnost těchto dělení křivky, takových, že délky jednotlivých dílků konvergují stejnoměrně k 0, a limita součtů příslušných k těmto dělením.



Jestliže jsou limity pro všechny takovéto posloupnosti dělení stejné, definuje se tato limita jako křivkový integrál funkce f přes křivku C .



Pro formální smysl této definice je pouze třeba, aby křivka měla konečnou délku.



Pro spojité funkce na po částech hladkých křivkách dávají obě definice stejný integrál.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Křivkový integrál prvního druhu má velice blízko k známé integraci reálné funkce.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Křivkový integrál prvního druhu má velice blízko k známé integraci reálné funkce.



Až na tu odmocninu ...



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Bylo možné definovat křivkový integrál jen pro hladké křivky a pak dodefinovat křivkový integrál pro po částech hladké křivky jako součet křivkových integrálů přes jednotlivé hladké křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Bylo možné definovat křivkový integrál jen pro hladké křivky a pak dodefinovat křivkový integrál pro po částech hladké křivky jako součet křivkových integrálů přes jednotlivé hladké křivky.



Křivkové integrály se také většinou počítají jako součet přes „hezké“ kousky křivek, např. u hranice obdélníku se sečtou integrály přes jednotlivé úsečky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Je zřejmé, jak se definice křivkového integrálu 1.druhu přepíše pro prostorové křivky:

$$\int_C f(s) \, ds = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t), \tau(t))) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \tau'^2(t)} \, dt .$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Je zřejmé, jak se definice křivkového integrálu 1.druhu přepíše pro prostorové křivky:

$$\int_C f(s) ds = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t), \tau(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \tau'^2(t)} dt .$$



Stejně tak i uvedená Pozorování a předchozí poznámky platí beze změny pro prostorové křivky.

Konec poznámek 2.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

1. Spočtěte křivkový integrál 1.druhu funkce $x + y$ přes obvod trojúhelníka s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

1. Spočítejte křivkový integrál 1.druhu funkce $x + y$ přes obvod trojúhelníka s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.



Uvědomte si, že nezáleží na tom, v jakém směru budete brát strany trojúhelníka.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočtete křivkový integrál 1.druhu funkce xy přes hranici elipsy $x^2/4 + y^2 = 1$ v 1.kvadrantu, a to jak pomocí uvedeného vyjádření křivky jako grafu funkce, tak pomocí parametrického vyjádření $x = 2 \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi/2]$. [14/9]



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočítejte křivkový integrál 1.druhu funkce xy přes hranici elipsy $x^2/4 + y^2 = 1$ v 1.kvadrantu, a to jak pomocí uvedeného vyjádření křivky jako grafu funkce, tak pomocí parametrického vyjádření $x = 2 \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi/2]$. [14/9]



S tou odmocninou to bylo o chlup ...



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

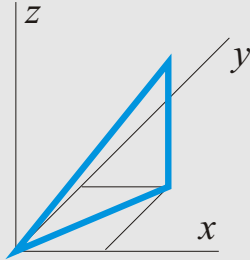
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Vypočtěte křivkový integrál 1.druhu funkce $x - 3y^2 + z$ přes obvod prostorového trojúhelníka s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$.



Konec příkladů 2.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Ukažte, že křivkový integrál 1.druhu z funkce identicky rovné 1 je roven délce křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Dokažte uvedená Pozorování, zvláště pečlivě druhé a třetí (i pro prostorové křivky).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Dokažte pomocí substituční věty, že křivkový integrál 1.druhu nezávisí na ekvivalentním popisu křivky (viz *Poznámky 1* pro ekvivalenci křivek).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Vysvětlete, proč se změní znaménko u integrace na intervalu, jestliže se interval „obráť“, tj. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, ale znaménko se nezmění u křivkového integrálu 1.druhu, jestliže se křivka „obráť“, tj. $\int_C f(s) ds = \int_{-C} f(s) ds$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Vysvětlete, proč se změní znaménko u integrace na intervalu, jestliže se interval „obráť“, tj. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, ale znaménko se nezmění u křivkového integrálu 1.druhu, jestliže se křivka „obráť“, tj. $\int_C f(s) ds = \int_{-C} f(s) ds$.



Malý hint: \int_{-C} se opět rozepíše na \int_a^b , jenom funkce parametrizující křivku $-C$ bude jiná: např. obrazy bodů a a b se prohodí.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kdo má zájem? Je to la-
hůdka.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kdo má zájem? Je to la-
hůdka.



5*. Dokažte (podobným způsobem jako rovnost Riemannova a Newtonova integrálu), že pro spojitě funkce a hladké křivky je definice křivkového integrálu 1.druhu uvedené v textu ekvivalentní definici uvedené v *Poznámkách*.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kdo má zájem? Je to la-
hůdka.



5*. Dokažte (podobným způsobem jako rovnost Riemannova a Newtonova integrálu), že pro spojitě funkce a hladké křivky je definice křivkového integrálu 1.druhu uvedené v textu ekvivalentní definici uvedené v *Poznámkách*.



Je to tak. Vím to.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



6. V posledním tvrzení Pozorování je číslo na pravé straně konečné, pokud je f po částech spojitá na C .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Ukažte, že křivkový integrál 1.druhu přes bod (tj., křivku, kde příslušné funkce v parametrickém zadání jsou konstantní) je roven 0.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Ukažte, že křivkový integrál 1.druhu přes bod (tj., křivku, kde příslušné funkce v parametrickém zadání jsou konstantní) je roven 0.



Konstantní křivka mne do-
jímá ...

Konec otázek 2.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Vypočítejte integrál funkce $f(x, y) = x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}$ definované na křivce L dané vztahem $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, kde $a > 0$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Vypočítejte integrál funkce $f(x, y) = x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}$ definované na křivce L dané vztahem $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, kde $a > 0$.



Napřed jenom koukejte. Až to už nepůjde, zkuste přemýšlet. Až to už nepůjde, tak to spočítáme "raz-dva".



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Křivku lze parametrizovat tímto způsobem

$$\varphi(t) = a^3 \cos^3 t, \quad \psi(t) = a^3 \sin^3 t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Křivku lze parametrizovat tímto způsobem

$$\varphi(t) = a^3 \cos^3 t, \quad \psi(t) = a^3 \sin^3 t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$



Na to jsem nepomyslel, ale vypadá to fikaně.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Při derivování podle času t mají fyzici rádi, když se používají tečky a dvojtečky:



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Při derivování podle času t mají fyzici rádi, když se používají tečky a dvojtečky:



Potom

$$\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) = 9a^6 \sin^2 t \cos^2 t.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Při derivování podle času t mají fyzici rádi, když se používají tečky a dvojtečky:



Potom

$$\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) = 9a^6 \sin^2 t \cos^2 t.$$



Můžeme tedy psát

$$\int_L x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t) \sqrt{9a^6 \sin^2 t \cos^2 t} dt = \dots = 4a^7.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Když se chci líbit nějaké fyzice, musím ty tečky taky dělat?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Když se chci líbit nějaké fyzice, musím ty tečky taky dělat?



Ten příklad mi dal největší práci při vymýšlení zadání tak, aby to šlo spočítat. Slibuji, že se příště nebudu tolik snažit ...



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Když se chci líbit nějaké fyzice, musím ty tečky taky dělat?



Ten příklad mi dal největší práci při vymýšlení zadání tak, aby to šlo spočítat. Slibuji, že se příště nebudu tolik snažit ...



A to si napřed nechal poradit. Ještě že má u koho.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

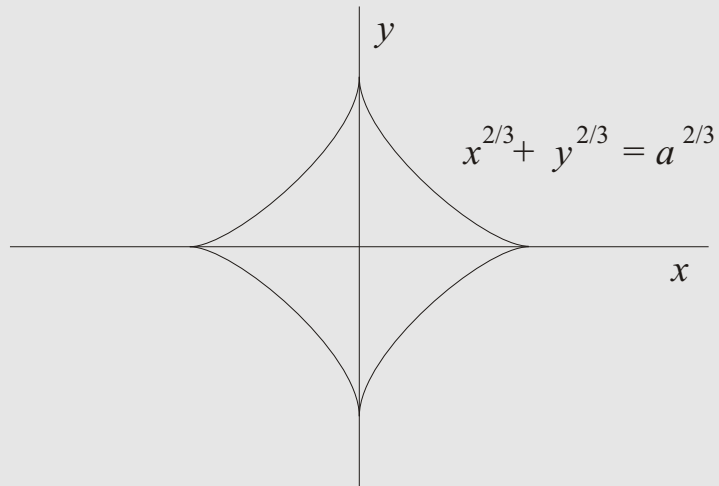
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

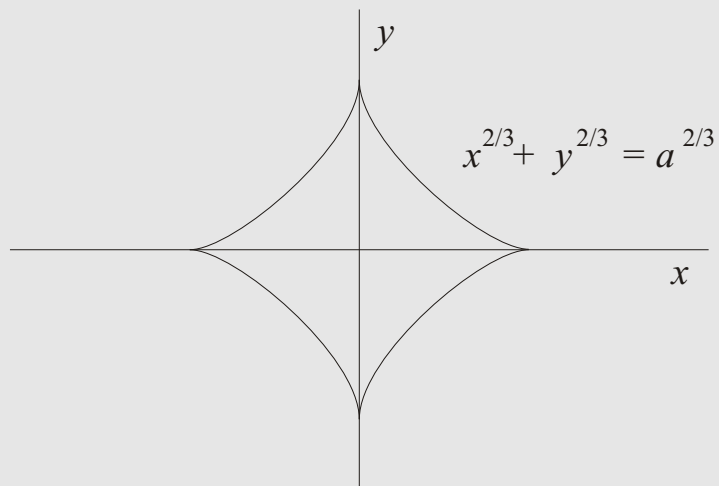
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Myslím se svoje ...

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 2.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



V praxi se vyskytují úlohy typu: spočtete, jaká práce byla vykonána lokomotivou při jízdě vlaku po křivé dráze proti větru.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



V praxi se vyskytují úlohy typu: spočtete, jaká práce byla vykonána lokomotivou při jízdě vlaku po křivé dráze proti větru.



Pokud vlak jede chvíli proti větru, chvíli po větru, může nakonec vyjít nula.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



V praxi se vyskytují úlohy typu: spočtete, jaká práce byla vykonána lokomotivou při jízdě vlaku po křivé dráze proti větru.



Pokud vlak jede chvíli proti větru, chvíli po větru, může nakonec vyjít nula.



A když se jede na okružní cestu okolo oka hurikánu je vhodné zvolit správný směr ;-)

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Zkusíme roviný případ.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkusíme roviný případ.



Počítáme práci, tedy sílu krát dráhu.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkusíme roviný případ.



Počítáme práci, tedy sílu krát dráhu.



Síla i křivka jsou v tomto případě „dvojměrné“, síla je vektor a křivka je popsána svými tečnými vektory $d\mathbf{t} = (dx, dy)$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkusíme roviný případ.



Počítáme práci, tedy sílu krát dráhu.



Síla i křivka jsou v tomto případě „dvojrozměrné“, síla je vektor a křivka je popsána svými tečnými vektory $d\mathbf{t} = (dx, dy)$.



Práce je skalární součin síly a tečného vektoru dráhy.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkusíme roviný případ.



Počítáme práci, tedy sílu krát dráhu.



Síla i křivka jsou v tomto případě „dvojměrné“, síla je vektor a křivka je popsána svými tečnými vektory $d\mathbf{t} = (dx, dy)$.



Práce je skalární součin síly a tečného vektoru dráhy.



V praxi je jasné, jaký má vektor tečny směr. V obecném případě to zřejmé není a je nutné tento směr nejdříve zadat, tj. křivku je nutné orientovat.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Základní zajímavé případy
jsou na obrázku:



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

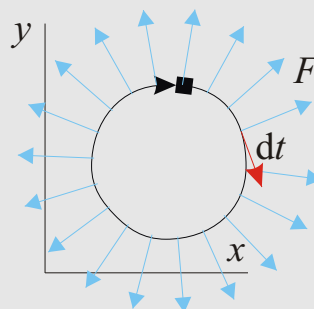
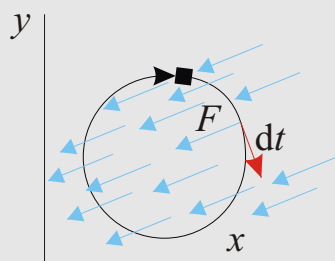
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Základní zajímavé případy jsou na obrázku:



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

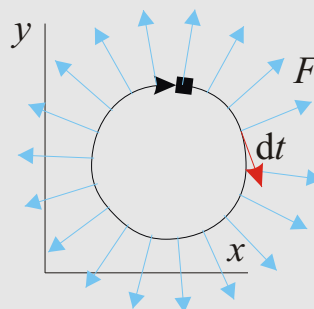
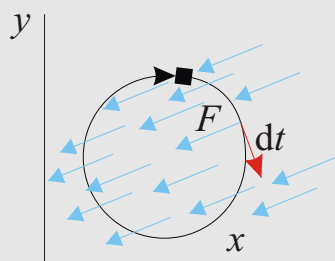
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Základní zajímavé případy jsou na obrázku:



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



V prvním případě i v druhém případě se celková práce rovná nule.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ale krom toho je spousta nezajímavých případů, které se musejí upočítat ...



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z uvedené motivace výpočtu práce se nabízí následující definice.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z uvedené motivace výpočtu práce se nabízí následující definice.



DEFINICE. Necht' je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka C funkcemi φ, ψ na intervalu $[a, b]$ a funkce f na C s hodnotami v \mathbb{R}^2 se souřadnicemi (f_1, f_2) .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z uvedené motivace výpočtu práce se nabízí následující definice.



DEFINICE. Necht' je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka C funkcemi φ, ψ na intervalu $[a, b]$ a funkce f na C s hodnotami v \mathbb{R}^2 se souřadnicemi (f_1, f_2) .



Pak se definuje **křivkový integrál 2.druhu** funkce f podle křivky C jako

$$\int_C \mathbf{f}(s) \cdot d\mathbf{t} = \int_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_a^b (f_1(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_2(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z uvedené motivace výpočtu práce se nabízí následující definice.



DEFINICE. Necht' je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka C funkcemi φ, ψ na intervalu $[a, b]$ a funkce f na C s hodnotami v \mathbb{R}^2 se souřadnicemi (f_1, f_2) .



Pak se definuje **křivkový integrál 2.druhu** funkce f podle křivky C jako

$$\int_C \mathbf{f}(s) \cdot dt = \int_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_a^b (f_1(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_2(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt.$$



První dva integrály jsou ekvivalentní formy zápisu křivkového integrálu 2.druhu, třetí integrál je jeho definice pomocí obyčejného integrálu reálné funkce jedné proměnné na intervalu.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z uvedené motivace výpočtu práce se nabízí následující definice.



DEFINICE. Necht' je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka C funkcemi φ, ψ na intervalu $[a, b]$ a funkce f na C s hodnotami v \mathbb{R}^2 se souřadnicemi (f_1, f_2) .



Pak se definuje **křivkový integrál 2.druhu** funkce f podle křivky C jako

$$\int_C \mathbf{f}(s) \cdot d\mathbf{t} = \int_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_a^b (f_1(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_2(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt.$$



První dva integrály jsou ekvivalentní formy zápisu křivkového integrálu 2.druhu, třetí integrál je jeho definice pomocí obyčejného integrálu reálné funkce jedné proměnné na intervalu.



To si promyslete. Děkuji.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující základní vlastnosti křivkového integrálu 2.druhu se opět snadno dokazují. Všimněte si rozdílu oproti křivkovému integrálu 1.druhu u předposlední vlastnosti.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující základní vlastnosti křivkového integrálu 2.druhu se opět snadno dokazují. Všimněte si rozdílu oproti křivkovému integrálu 1.druhu u předposlední vlastnosti.



POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany.

$$1. \int_C (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{t} = \alpha \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} + \beta \int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{t};$$

$$2. \int_{C_1+C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} = \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t};$$

$$3. \int_{-C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} = - \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t};$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující základní vlastnosti křivkového integrálu 2.druhu se opět snadno dokazují. Všimněte si rozdílu oproti křivkovému integrálu 1.druhu u předposlední vlastnosti.



POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany.

$$1. \int_C (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{t} = \alpha \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} + \beta \int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{t};$$

$$2. \int_{C_1+C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} = \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t};$$

$$3. \int_{-C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} = - \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t};$$



Pozor, třetí vlastnost je jiná!

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující tvrzení uvádí vztah mezi oběma křivkovými integrály.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení uvádí vztah mezi oběma křivkovými integrály.



POZOROVÁNÍ.

$$\int_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_C (f_1(s) \cos \alpha(s) + f_2(s) \sin \alpha(s)) ds ,$$

kde $\alpha(s)$ je úhel, který svírá tečný vektor k C v bodě s s osou x .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující úvaha se často používá:



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující úvaha se často používá:



Nechť C, D jsou dvě různé jednoduše uzavřené kladně orientované po částech hladké křivky, které se protínají v křivce K . Pak C je spojením dvou orientovaných křivek C_1, K_1 a podobně D je spojením dvou orientovaných křivek D_1, K_2 (v pořadí podle orientace), kde K_1 a K_2 je křivka K s odlišnými orientacemi. Spojení $C_1 + D_1$ je pak kladně orientovaná uzavřená po částech hladká křivka.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

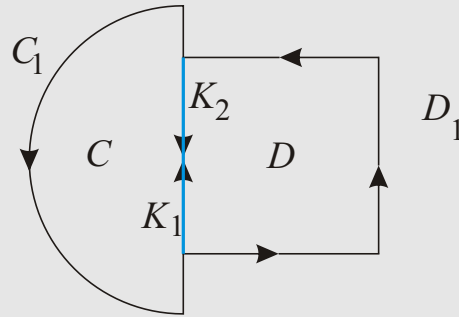
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

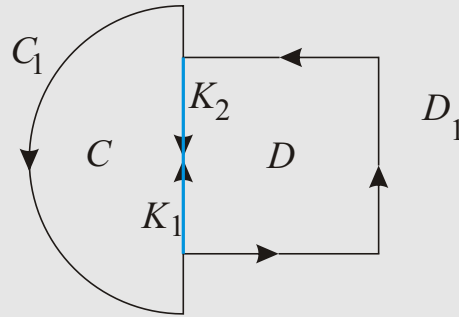
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



POZOROVÁNÍ. Je-li f funkce $C + D \rightarrow \mathbb{R}^2$, pak

$$\int_{C+D} \mathbf{f} \, dt = \int_{C_1+D_1} \mathbf{f} \, dt .$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



U křivkových integrálů je třeba mít oči otevřené.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Podobně jako u křivkového integrálu 1.druhu lze i křivkový integrál 2.druhu zdefinovat pomocí limit „Riemannových“ součtů a to i na nehladké křivce.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Podobně jako u křivkového integrálu 1.druhu lze i křivkový integrál 2.druhu zdefinovat pomocí limit „Riemannových“ součtů a to i na nehladké křivce.



Ve většině praktických situací stačí definice uvedená v textu pro po částech hladké křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Podobně jako u křivkového integrálu 1.druhu lze i křivkový integrál 2.druhu zdefinovat pomocí limit „Riemannových“ součtů a to i na nehladké křivce.



Ve většině praktických situací stačí definice uvedená v textu pro po částech hladké křivky.



Navíc je nutné dodat, že výpočet integrálu pomocí limit součtů je v praktických příkladech těžko proveditelný.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Naše definice jsou nejhezčí.
Jsem prostě taková.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedeným přístupem pomocí limit součtů se většinou definují obě části integrálu zvlášť, tj. integrály $\int_C f_1(x, y) dx$ a $\int_C f_2(x, y) dy$. Tím se ztrácí jejich vektorový charakter.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedeným přístupem pomocí limit součtů se většinou definují obě části integrálu zvlášť, tj. integrály $\int_C f_1(x, y) dx$ a $\int_C f_2(x, y) dy$. Tím se ztrácí jejich vektorový charakter.



Definuje-li se křivkový integrál pomocí skalárního součinu vektorů, snadno se z tohoto přístupu získá $\int_C f_1(x, y) dx$ jako speciální případ, kdy funkce $f = (f_1, f_2)$ má druhou složku f_2 nulovou. Podobně pro integrál $\int_C f_2(x, y) dy$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Není nad sladké vektory.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže si pod křivkovým integrálem 2.druhu představíte práci vykonanou po dané křivce vektorem (f_1, f_2) , říká Pozorování 2, že práce vykonaná na několika spojených křivkách je součtem prací vykonaných na jednotlivých křivkách.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže si pod křivkovým integrálem 2.druhu představíte práci vykonanou po dané křivce vektorem (f_1, f_2) , říká Pozorování 2, že práce vykonaná na několika spojených křivkách je součtem prací vykonaných na jednotlivých křivkách.



Obrátí-li se směr křivky, je zřejmé, že se změní znaménko výsledku práce.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže si pod křivkovým integrálem 2.druhu představíte práci vykonanou po dané křivce vektorem (f_1, f_2) , říká Pozorování 2, že práce vykonaná na několika spojených křivkách je součtem prací vykonaných na jednotlivých křivkách.



Obrátí-li se směr křivky, je zřejmé, že se změní znaménko výsledku práce.



Mám rád zápornou práci. Ke kladné práci se stavím raději záporně.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Uvedený vztah křivkového integrálu 2.druhu k integrálu 1.druhu se může zdát těžko použitelný. Někdy je však jednoduché popsat $\cos \alpha(s)$ i $\sin \alpha(s)$ a spočítat pak křivkový integrál 1.druhu.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedený vztah křivkového integrálu 2.druhu k integrálu 1.druhu se může zdát těžko použitelný. Někdy je však jednoduché popsat $\cos \alpha(s)$ i $\sin \alpha(s)$ a spočítat pak křivkový integrál 1.druhu.



Hodně si kreslete a můžete být překvapeni.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedený vztah křivkového integrálu 2.druhu k integrálu 1.druhu se může zdát těžko použitelný. Někdy je však jednoduché popsat $\cos \alpha(s)$ i $\sin \alpha(s)$ a spočítat pak křivkový integrál 1.druhu.



Hodně si kreslete a můžete být překvapeni.



Hodně si kreslím a jsem pořád překvapená.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Přenos definice a **Pozorování** z roviny do prostoru je zcela formální, přidáním třetí proměnné.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přenos definice a **Pozorování** z roviny do prostoru je zcela formální, přidáním třetí proměnné.



První a třetí **Pozorování** jsou v textu již formulována nezávisle na dimenzi.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přenos definice a **Pozorování** z roviny do prostoru je zcela formální, přidáním třetí proměnné.



První a třetí **Pozorování** jsou v textu již formulována nezávisle na dimenzi.



Uvědomte si, že třetí **Pozorování** neplatí pro křivkové integrály 1.druhu (najděte příklad.)



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přenos definice a **Pozorování** z roviny do prostoru je zcela formální, přidáním třetí proměnné.



První a třetí **Pozorování** jsou v textu již formulována nezávisle na dimenzi.



Uvědomte si, že třetí **Pozorování** neplatí pro křivkové integrály 1.druhu (najděte příklad.)



Jednou jsem byl na pozorování ...

Konec poznámek 3.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

1. Spočtěte křivkový integrál 2.druhu z funkce $(-y^2, xy)$ po obvodu čtverce s vrcholy $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočtete křivkový integrál 2.druhu z funkce $\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ po kružnici o poloměru r se středem v počátku.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Spočtete křivkový integrál 2.druhu z funkce $(yz, z\sqrt{r^2 - y^2}, xy)$ po části šroubovice $x = r \cos t, y = r \sin t, z = 2t, t \in [0, 2\pi]$. Použijte vyjádření integrálu pomocí křivkového integrálu 1.druhu.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Spočtete křivkový integrál 2.druhu z funkce $(yz, z\sqrt{r^2 - y^2}, xy)$ po části šroubovice $x = r \cos t, y = r \sin t, z = 2t, t \in [0, 2\pi]$. Použijte vyjádření integrálu pomocí křivkového integrálu 1.druhu.



Šroubovice je asi zašroubovaná slivovice ...



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Spočtete křivkový integrál 2.druhu z funkce $(yz, z\sqrt{r^2 - y^2}, xy)$ po části šroubovice $x = r \cos t, y = r \sin t, z = 2t, t \in [0, 2\pi]$. Použijte vyjádření integrálu pomocí křivkového integrálu 1.druhu.



Šroubovice je asi zašroubovaná slivovice ...



Ne. BTW, jednou jsem makal jak šroub.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



4. Spočtete integrál $\int_C (y \, dx + z \, dy + x \, dz)$ přes křivku $x = a \cos^2 t, y = a\sqrt{2} \sin t \cos t, z = a \sin^2 t$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Spočítejte integrál $\int_C (y \, dx + z \, dy + x \, dz)$ přes křivku $x = a \cos^2 t, y = a\sqrt{2} \sin t \cos t, z = a \sin^2 t$.



SMYSL to nedává ani mně,
ale spočítat to umím.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Spočítejte integrál $\int_C (y dx + z dy + x dz)$ přes křivku $x = a \cos^2 t, y = a\sqrt{2} \sin t \cos t, z = a \sin^2 t$.



SMYSL to nedává ani mně,
ale spočítat to umím.



Mám rád SMYSLné křivky.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



5. Spočtěte integrál z předchozího příkladu přes křivku, která je průnikem dvou ploch: $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, $\{(x, y, z); x + y + z = 0\}$. Zkuste různé možnosti (např. dosazení za jednu proměnnou z druhé podmínky, nalezení parametrického vyjádření, ...).

Konec příkladů 3.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

1. Dokažte všechny vlastnosti **Pozorování**, zvláště pečlivě položky 2 a 3. Kde se projevívají v definici křivkového integrálu 2.druhu (tj. ve třetím integrálu v definici) změna orientace křivky?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Dokažte druhé Pozorování o vztahu obou křivkových integrálů (použijte výpočet kosinu a sinu z trojúhelníku s odvěsnami dx , dy).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Dokažte druhé Pozorování o vztahu obou křivkových integrálů (použijte výpočet kosinu a sinu z trojúhelníku s odvěsnami dx , dy).



Pomocí tohoto vztahu a odhadu křivkového integrálu 1.druhu dokažte znovu 3. tvrzení prvního Pozorování.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ukažte, že pro funkci $f = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$ je výsledkem integrálu $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t}$ délka křivky C .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Zformulujte definici křivkového integrálu 2.druhu pro prostorovou křivku a funkci $f = (f_1, f_2, f_3)$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Zformulujte druhé Pozorování o vztahu obou křivkových integrálů pro prostor a dokažte jej.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Zapište křivkový integrál 2.druhu pro případ, kdy druhá složka f_2 funkce f je nulová a křivka C je grafem funkce g na intervalu $[a, b]$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Zapište křivkový integrál 2.druhu pro případ, kdy druhá složka f_2 funkce f je nulová a křivka C je grafem funkce g na intervalu $[a, b]$.



Tady tuším čertovinu ...



LEKCE22-IKR
Křivkový integrál
křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek
- Greenova věta
- těžiště drátu
- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Dokažte poslední Pozorování.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace

křivk.integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu

- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Dokažte poslední Pozorování.



To je jednoduché, není-liž pravda?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Dokažte poslední Pozorování.



To je jednoduché, není-liž pravda?



Já zažil jedno SUPERprolínání.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



8. Ukažte, že křivkový integrál 2.druhu přes bod (tj., křivku, kde příslušné funkce v parametrickém zadání jsou konstantní) je roven 0.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

8. Ukažte, že křivkový integrál 2.druhu přes bod (tj., křivku, kde příslušné funkce v parametrickém zadání jsou konstantní) je roven 0.



A pak že matematici nedovedou počítat něco užitečného.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

8. Ukažte, že křivkový integrál 2.druhu přes bod (tj., křivku, kde příslušné funkce v parametrickém zadání jsou konstantní) je roven 0.



A pak že matematici nedovedou počítat něco užitečného.



To jsem jednou strašně moc chtěl pracovat, ale nemohl jsem se pohnout z místa. Nezaplátili mi to ...

Konec otázek 3.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Vypočtete integrál

$$\int_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

kde křivka L je spojením křivek L_1, L_2, L_3 daných parametrizacemi

$$L_1 : \quad \varphi(t) = \cos t, \quad \psi(t) = \sin t, \quad \tau(t) = 0, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$L_2 : \quad \varphi(t) = 0, \quad \psi(t) = \sin t, \quad \tau(t) = \cos t, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$L_3 : \quad \varphi(t) = \cos(\pi t), \quad \psi(t) = 0, \quad \tau(t) = \sin(\pi t), \quad t \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Vypočtete integrál

$$\int_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

kde křivka L je spojením křivek L_1, L_2, L_3 daných parametrizacemi

$$L_1: \quad \varphi(t) = \cos t, \quad \psi(t) = \sin t, \quad \tau(t) = 0, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$L_2: \quad \varphi(t) = 0, \quad \psi(t) = \sin t, \quad \tau(t) = \cos t, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$L_3: \quad \varphi(t) = \cos(\pi t), \quad \psi(t) = 0, \quad \tau(t) = \sin(\pi t), \quad t \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$



BTW, nevíte kdo vymyslel
ta spletitá řecká písmenka?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Nejdříve spočteme integrály (2. druhu) po křivkách L_1, L_2, L_3 .

$$\begin{aligned} \int_{L_1} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz &= \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t(-\sin t) + (-\cos^2 t) \cos t + (\cos^2 t - \sin^2 t)0) dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^3 t - \cos^3 t) dt = \dots = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Nejdříve spočteme integrály (2. druhu) po křivkách L_1, L_2, L_3 .

$$\begin{aligned} \int_{L_1} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz &= \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t(-\sin t) + (-\cos^2 t) \cos t + (\cos^2 t - \sin^2 t)0) dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^3 t - \cos^3 t) dt = \dots = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Podobně zjistíme, že

$$\int_{L_2} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz = -\frac{4}{3}$$

a

$$\int_{L_3} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz = -\frac{4}{3}.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Nejdříve spočteme integrály (2. druhu) po křivkách L_1, L_2, L_3 .

$$\begin{aligned} \int_{L_1} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz &= \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t(-\sin t) + (-\cos^2 t) \cos t + (\cos^2 t - \sin^2 t)0) dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^3 t - \cos^3 t) dt = \dots = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Podobně zjistíme, že

$$\int_{L_2} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz = -\frac{4}{3}$$

a

$$\int_{L_3} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz = -\frac{4}{3}.$$



Celkový výsledek tedy bude

$$\int_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -4.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Bylo to takhle: HOP, HOP a
HOP.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Bylo to takhle: HOP, HOP a
HOP.



HOP já rád.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

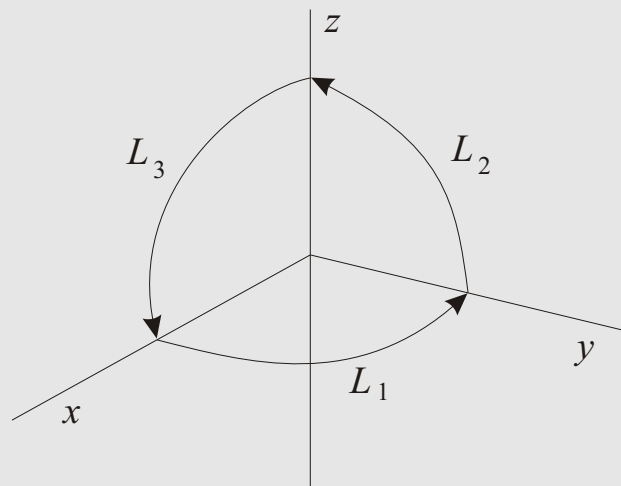
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 3.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GREENOVA VĚTA



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GREENOVA VĚTA



Základní věta analýzy říká, že na hranici množiny poznáme, co uvnitř dělala derivace.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GREENOVA VĚTA



Základní věta analýzy říká, že na hranici množiny poznáme, co uvnitř dělala derivace.



Vím a znám. $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9





Vím a znám se lehce řekne,
v rovině to byla fuška zaří-
dit.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Vím a znám se lehce řekne,
v rovině to byla fuška zaří-
dit.



Já si toho považuji. Jsem po-
ctěna přízní skřítků.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Křivkový integrál 2.druhu po uzavřené křivce se často značí symbolem \oint a chápe se přes kladnou orientaci křivky (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Křivkový integrál 2.druhu po uzavřené křivce se často značí symbolem \oint a chápe se přes kladnou orientaci křivky (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček).



Následující velmi důležitá věta uvádí vztah mezi křivkovým integrálem 2.druhu po jednoduše uzavřené křivce a integrálem přes vnitřek této křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Křivkový integrál 2.druhu po uzavřené křivce se často značí symbolem \oint a chápe se přes kladnou orientaci křivky (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček).



Následující velmi důležitá věta uvádí vztah mezi křivkovým integrálem 2.druhu po jednoduše uzavřené křivce a integrálem přes vnitřek této křivky.



VĚTA. (Green) Necht' H je otevřená množina v rovině obsahující jednoduše uzavřenou křivku C i s jejím vnitřkem ιC a $f = (f_1, f_2)$ je funkce $H \rightarrow \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace na H . Pak platí

$$\oint_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_{\iota C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy .$$

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Greenova věta mimo jiné říká, že integrál 2. druhu po uzavřené křivce přes konstantní vektorovou funkci (vítr) je roven plošnému integrálu přes nulovou funkci (žádné víry, tornáda a podobně), tedy nule.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

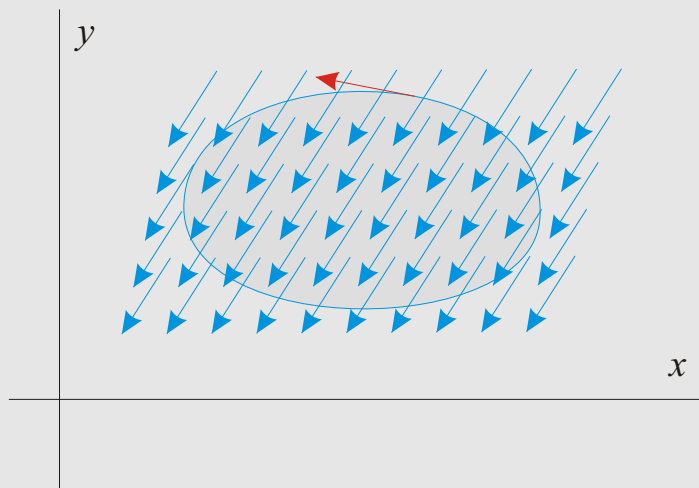
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Greenova věta mimo jiné říká, že integrál 2. druhu po uzavřené křivce přes konstantní vektorovou funkci (vítr) je roven plošnému integrálu přes nulovou funkci (žádné víry, tornáda a podobně), tedy nule.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

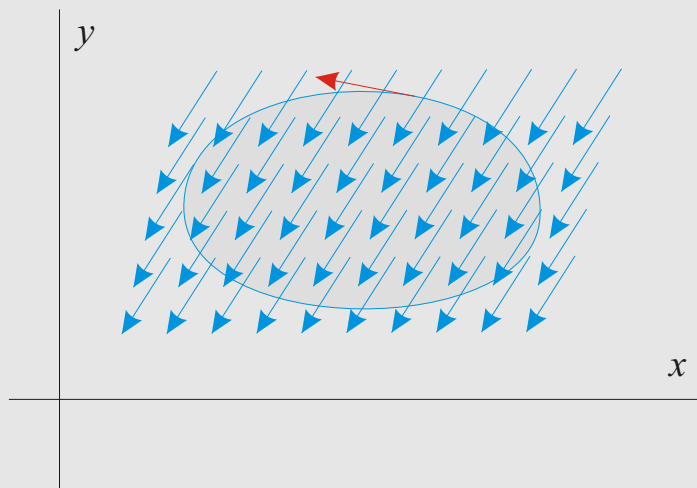
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Greenova věta mimo jiné říká, že integrál 2. druhu po uzavřené křivce přes konstantní vektorovou funkci (vítr) je roven plošnému integrálu přes nulovou funkci (žádné víry, tornáda a podobně), tedy nule.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Taky tak se chová déšť'. Kolik mi napršeno do spacáku, tolik vyteklo.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. V případě, že C je obvod obdélníku s vrcholy (a, c) , (b, c) , (b, d) , (a, d) , je důkaz snadný, protože podle definic příslušných integrálů je

$$\oint_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_a^b f_1(x, c) dx + \int_c^d f_2(b, y) dy - \int_a^b f_1(x, d) dx - \int_c^d f_2(a, y) dy$$

a

$$\int_{\iota C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_c^d (f_2(b, y) - f_2(a, y)) dy - \int_a^b (f_1(x, d) dx - f_1(x, c)) dx$$

a obě pravé strany jsou stejné.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. V případě, že C je obvod obdélníku s vrcholy (a, c) , (b, c) , (b, d) , (a, d) , je důkaz snadný, protože podle definic příslušných integrálů je

$$\oint_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_a^b f_1(x, c) dx + \int_c^d f_2(b, y) dy - \int_a^b f_1(x, d) dx - \int_c^d f_2(a, y) dy$$

a

$$\int_{\iota C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_c^d (f_2(b, y) - f_2(a, y)) dy - \int_a^b (f_1(x, d) - f_1(x, c)) dx$$

a obě pravé strany jsou stejné.



Podle posledního pozorování z předchozí části o křivkových integrálech 2.druhu platí tedy Greenův vzorec i pro konečná sjednocení nepřekrývajících se obdélníků v H , jejichž hranici tvoří lomená čára, která je uzavřená.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá křivka
- uz.

- orientace

křivk.integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

- vlastnosti 2.dr.

- vztah 1. a 2. dr.

- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu

- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. V případě, že C je obvod obdélníku s vrcholy (a, c) , (b, c) , (b, d) , (a, d) , je důkaz snadný, protože podle definic příslušných integrálů je

$$\oint_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_a^b f_1(x, c) dx + \int_c^d f_2(b, y) dy - \int_a^b f_1(x, d) dx - \int_c^d f_2(a, y) dy$$

a

$$\int_{\iota C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_c^d (f_2(b, y) - f_2(a, y)) dy - \int_a^b (f_1(x, d) dx - f_1(x, c)) dx$$

a obě pravé strany jsou stejné.



Podle posledního Pozorování z předchozí části o křivkových integrálech 2.druhu platí tedy Greenův vzorec i pro konečná sjednocení nepřekrývajících se obdélníků v H , jejichž hranici tvoří lomená čára, která je uzavřená.



Nyní si stačí uvědomit (musí se to ovšem přesně dokázat), že lze najít takovou lomenou čáru D libovolně blízko křivky C v tom smyslu, že jak křivkové integrály přes C a přes D se budou lišit nejvýše o předem dané $\varepsilon > 0$, tak integrály přes ιC a přes ono sjednocení obdélníků se budou lišit nejvýše o ε . ◇



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se v Greenově rovnosti místo funkce (f_1, f_2) vezme funkce $(-f_2, f_1)$, dostává se vzorec

$$\oint_C (f_1(x, y) dy - f_2(x, y) dx) = \int_{iC} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx dy.$$

Zde je v levém integrálu skalární součin \mathbf{f} a normály \mathbf{k} C , který se často značí jako $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{n}$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dobře si promyslete předchozí důkaz.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dobře si promyslete předchozí důkaz.



Dali byste za něj ruku do ohně?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dobře si promyslete předchozí důkaz.



Dali byste za něj ruku do ohně?



Přečtu si důkaz pro jistotu ještě jednou ...

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

1. Greenova věta v obecném tvaru.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

1. Greenova věta v obecném tvaru.



Greenovu větu lze zobecnit na konečný počet křivek. V tomto případě je ale jednodušší se na situaci dívat ne z hlediska křivek, ale z hlediska množin majících za hranici křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

1. Greenova věta v obecném tvaru.



Greenovu větu lze zobecnit na konečný počet křivek. V tomto případě je ale jednodušší se na situaci dívat ne z hlediska křivek, ale z hlediska množin majících za hranici křivky.



Otevřená množina G v rovině se nazývá souvislá, jestliže každé dva její body lze spojit lomenou čarou ležící v G .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

1. Greenova věta v obecném tvaru.



Greenovu větu lze zobecnit na konečný počet křivek. V tomto případě je ale jednodušší se na situaci dívat ne z hlediska křivek, ale z hlediska množin majících za hranici křivky.



Otevřená množina G v rovině se nazývá souvislá, jestliže každé dva její body lze spojit lomenou čarou ležící v G .



Nechť G je otevřená souvislá množina, která má za hranici ∂G konečně mnoho disjunktních, jednoduše uzavřených křivek.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

1. Greenova věta v obecném tvaru.



Greenovu větu lze zobecnit na konečný počet křivek. V tomto případě je ale jednodušší se na situaci dívat ne z hlediska křivek, ale z hlediska množin majících za hranici křivky.



Otevřená množina G v rovině se nazývá souvislá, jestliže každé dva její body lze spojit lomenou čarou ležící v G .



Nechť G je otevřená souvislá množina, která má za hranici ∂G konečně mnoho disjunktních, jednoduše uzavřených křivek.



Jako příklad lze uvést otevřené mezikružší, nebo vnitřek elipsy s konečně mnoha kulaťými „děrami“.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

1. Greenova věta v obecném tvaru.



Greenovu větu lze zobecnit na konečný počet křivek. V tomto případě je ale jednodušší se na situaci dívat ne z hlediska křivek, ale z hlediska množin majících za hranici křivky.



Otevřená množina G v rovině se nazývá souvislá, jestliže každé dva její body lze spojit lomenou čarou ležící v G .



Nechť G je otevřená souvislá množina, která má za hranici ∂G konečně mnoho disjunktních, jednoduše uzavřených křivek.



Jako příklad lze uvést otevřené mezikružší, nebo vnitřek elipsy s konečně mnoha kulaťými „děrami“.



Je-li C jedna z uzavřených křivek tvořící hranici, pak orientace C vzhledem ke G se nazývá kladná v následujícím případě: stojíte-li na křivce tváří v jejím kladném směru, máte G po levé straně.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

1. Greenova věta v obecném tvaru.



Greenovu větu lze zobecnit na konečný počet křivek. V tomto případě je ale jednodušší se na situaci dívat ne z hlediska křivek, ale z hlediska množin majících za hranici křivky.



Otevřená množina G v rovině se nazývá souvislá, jestliže každé dva její body lze spojit lomenou čarou ležící v G .



Nechť G je otevřená souvislá množina, která má za hranici ∂G konečně mnoho disjunktních, jednoduše uzavřených křivek.



Jako příklad lze uvést otevřené mezikruží, nebo vnitřek elipsy s konečně mnoha kulatými „děrami“.



Je-li C jedna z uzavřených křivek tvořící hranici, pak orientace C vzhledem ke G se nazývá kladná v následujícím případě: stojíte-li na křivce tváří v jejím kladném směru, máte G po levé straně.



U mezikruží je tedy kladný směr vnější kružnice proti směru pohybu hodinových ru-

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

čiček, u vnitřní kružnice je tomu opačně.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jezdil jsem jako kaskadér
s autem po hranici střechy
mrakodrapu a držel jsem
kladnou orientaci.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jezdil jsem jako kaskadér
s autem po hranici střechy
mrakodrapu a držel jsem
kladnou orientaci.



Mám volant vlevo. Šlo to
snadno.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro zjednodušení zápisu bude pro jednoduché množiny G značit $\oint_{\partial G}$ součet součet křivkových integrálů 2.druhu přes jednotlivé uzavřené křivky hranice, brané s kladnou orientací vzhledem ke G .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro zjednodušení zápisu bude pro jednoduché množiny G značit $\oint_{\partial G}$ součet součet křivkových integrálů 2.druhu přes jednotlivé uzavřené křivky hranice, brané s kladnou orientací vzhledem ke G .



To je šikovný zápis. Musí se ale zapojit všechny části hranice.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Greenova věta v obecném tvaru)



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Greenova věta v obecném tvaru)



Nechť G je otevřená souvislá množina, která má za hranici konečně mnoho disjunkt-
ních, jednoduše uzavřených křivek a H otevřená množina obsahující $G \cup \partial G$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Greenova věta v obecném tvaru)

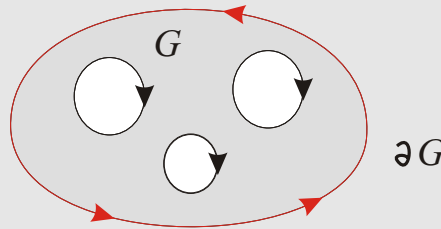


Nechť G je otevřená souvislá množina, která má za hranici konečně mnoho disjunkt-
ních, jednoduše uzavřených křivek a H otevřená množina obsahující $G \cup \partial G$.



Nechť $f = (f_1, f_2)$ je funkce $\bar{H} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace. Pak platí

$$\oint_{\partial G} (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_G \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy .$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Greenova věta v obecném tvaru)

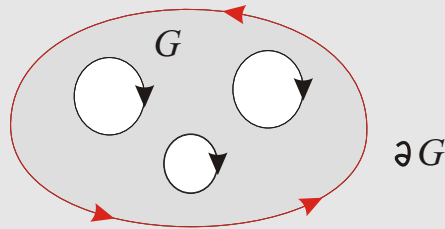


Nechť G je otevřená souvislá množina, která má za hranici konečně mnoho disjunkt-ních, jednoduše uzavřených křivek a H otevřená množina obsahující $G \cup \partial G$.



Nechť $f = (f_1, f_2)$ je funkce $\bar{H} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace. Pak platí

$$\oint_{\partial G} (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_G \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy .$$



Stejně jako u základní verze Greenovy věty lze vzorec psát ve tvaru

$$\oint_{\partial G} (f_1(x, y) dy - f_2(x, y) dx) = \int_G \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx dy .$$

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace

křivk.integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

- vlastnosti 2.dr.

- vztah 1. a 2. dr.

- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu

- plocha křivkovým int.

STANDARDY

- Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



2. Greenova věta má přirozené fyzikální vysvětlení, které bude podrobněji uvedeno v kapitole o vektorových funkcích.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Greenova věta má přirozené fyzikální vysvětlení, které bude podrobněji uvedeno v kapitole o vektorových funkcích.



Např. v druhé formulaci znamená integrál skalárního součinu vektoru f na křivce C s normálou křivky tok vektoru křivkou C (např. tok kapaliny).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Greenova věta má přirozené fyzikální vysvětlení, které bude podrobněji uvedeno v kapitole o vektorových funkcích.



Např. v druhé formulaci znamená integrál skalárního součinu vektoru f na křivce C s normálou křivky tok vektoru křivkou C (např. tok kapaliny).



Dvojrozměrný integrál znamená, kolik kapaliny uvnitř křivky přibylo nebo se ztratilo.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Greenova věta má přirozené fyzikální vysvětlení, které bude podrobněji uvedeno v kapitole o vektorových funkcích.



Např. v druhé formulaci znamená integrál skalárního součinu vektoru f na křivce C s normálou křivky tok vektoru křivkou C (např. tok kapaliny).



Dvojměrný integrál znamená, kolik kapaliny uvnitř křivky přibylo nebo se ztratilo.



Takže opět například, pokud bude tok všude stejný, uvnitř křivky at' už bude jakákoliv, bude kapaliny pořád stejně.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Greenův vzorec lze použít i pro neuzavřené křivky, pokud takovou křivku vhodně doplníme na uzavřenou.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Greenův vzorec lze použít i pro neuzavřené křivky, pokud takovou křivku vhodně doplníme na uzavřenou.



Slovo „vhodně“ tu pak znamená, že můžeme snadno spočítat integrál přes tuto doplněnou křivku i dvojrozměrný integrál přes vzniklý vnitřek uzavřené křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. V první formulaci Greenova vzorce je křivkový integrál uveden podle definice a je to tedy integrál ze skalárního součinu vektoru funkce a tečného vektoru.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. V první formulaci Greenova vzorce je křivkový integrál uveden podle definice a je to tedy integrál ze skalárního součinu vektoru funkce a tečného vektoru.



Ve druhé formulaci je to křivkový integrál ze skalárního součinu vektoru funkce a normálového vektoru křivky.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. V první formulaci Greenova vzorce je křivkový integrál uveden podle definice a je to tedy integrál ze skalárního součinu vektoru funkce a tečného vektoru.



Ve druhé formulaci je to křivkový integrál ze skalárního součinu vektoru funkce a normálového vektoru křivky.



Zobecnění Greenovy věty z roviny do prostoru se může týkat jednak křivek v prostoru, jednak ploch v prostoru. Hladká křivka v prostoru nemá obecně normálový vektor, ale má jednoznačně určené tečné vektory; proto se na tento případ zobecňuje první varianta Greenova vzorce.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá křivka uz.
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. V první formulaci Greenova vzorce je křivkový integrál uveden podle definice a je to tedy integrál ze skalárního součinu vektoru funkce a tečného vektoru.



Ve druhé formulaci je to křivkový integrál ze skalárního součinu vektoru funkce a normálového vektoru křivky.



Zobecnění Greenovy věty z roviny do prostoru se může týkat jednak křivek v prostoru, jednak ploch v prostoru. Hladká křivka v prostoru nemá obecně normálový vektor, ale má jednoznačně určené tečné vektory; proto se na tento případ zobecňuje první varianta Greenova vzorce.



Naopak plocha (orientovaná) nemá jednoznačně určené tečné vektory ale má normálový vektor v každém bodě, proto se pro tento případ zobecňuje druhá varianta Greenova vzorce.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. V první formulaci Greenova vzorce je křivkový integrál uveden podle definice a je to tedy integrál ze skalárního součinu vektoru funkce a tečného vektoru.



Ve druhé formulaci je to křivkový integrál ze skalárního součinu vektoru funkce a normálového vektoru křivky.



Zobecnění Greenovy věty z roviny do prostoru se může týkat jednak křivek v prostoru, jednak ploch v prostoru. Hladká křivka v prostoru nemá obecně normálový vektor, ale má jednoznačně určené tečné vektory; proto se na tento případ zobecňuje první varianta Greenova vzorce.



Naopak plocha (orientovaná) nemá jednoznačně určené tečné vektory ale má normálový vektor v každém bodě, proto se pro tento případ zobecňuje druhá varianta Greenova vzorce.



To pro případ, kdy by G mohla být třeba krychle a ∂G by bylo šest jejích stěn.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec poznámek 4.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

1. Přepočtete křivkové integrály z prvních dvou *Příkladů* předchozí části pomocí Greenovy věty.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Použijte Greenův vzorec na mezikruží $\{(x, y); r < x^2 + y^2 < R\}$, kde $0 \leq r < R$ pro funkci $(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ (viz předchozí příklad).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu
- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Použijte Greenův vzorec na mezikruží $\{(x, y); r < x^2 + y^2 < R\}$, kde $0 \leq r < R$ pro funkci $(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ (viz předchozí příklad).



Dovedete vysvětlit, k jakým problémům došlo? A proč?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Spočtete integrál $\int_C(xy^2 dx - yx^2 dy)$ přes horní jednotkovou polokružnici doplněním této polokružnice buď na kružnici nebo spojením úsečkou obou koncových bodů, pak použijte Greenův vzorec.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Spočtete integrál $\int_C(xy^2 dx - yx^2 dy)$ přes horní jednotkovou polokružnici doplněním této polokružnice buď na kružnici nebo spojením úsečkou obou koncových bodů, pak použijte Greenův vzorec.



Co bude jednodušší?



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ověřte platnost Greenova vzorce na funkci $((x + y)^2, x^2 + y^2)$ a obvodu trojúhelníku s vrcholy $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 5)$.

Konec příkladů 4.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

Zkuste ukázat platnost Greenovy věty v obecném tvaru použitím následující úvahy:



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

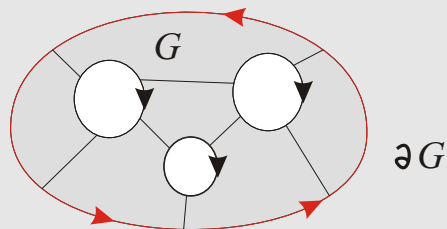
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

Zkuste ukázat platnost Greenovy věty v obecném tvaru použitím následující úvahy:



Jednotlivé křivky hranice ∂G se spojí disjunktními lomenými čarami (někdy stačí jednou čarou, někdy dvěma) tak, aby se vytvořily jednoduché uzavřené křivky, jejichž vnitřek pokrývá G až na ony lomené čáry (ty nehrají žádnou roli při dvojrozměrné integraci).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

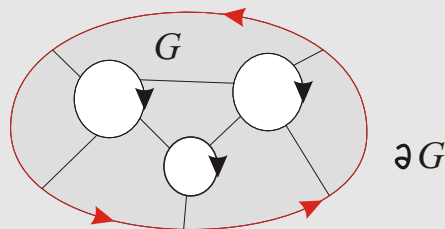
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

Zkuste ukázat platnost Greenovy věty v obecném tvaru použitím následující úvahy:



Jednotlivé křivky hranice ∂G se spojí disjunktními lomenými čarami (někdy stačí jednou čarou, někdy dvěma) tak, aby se vytvořily jednoduché uzavřené křivky, jejichž vnitřek pokrývá G až na ony lomené čáry (ty nehrají žádnou roli při dvojrozměrné integraci).



Každou lomenou čáru proběhnete dvakrát, pokaždé v opačném směru, takže se při součtu křivkové integrály přes tyto křivky vyruší a zbude jen součet přes křivky hranice.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

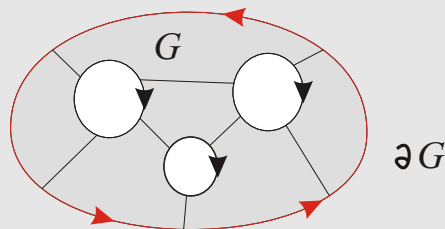
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

Zkuste ukázat platnost Greenovy věty v obecném tvaru použitím následující úvahy:



Jednotlivé křivky hranice ∂G se spojí disjunktními lomenými čarami (někdy stačí jednou čarou, někdy dvěma) tak, aby se vytvořily jednoduché uzavřené křivky, jejichž vnitřek pokrývá G až na ony lomené čáry (ty nehrají žádnou roli při dvojrozměrné integraci).



Každou lomenou čáru proběhnete dvakrát, pokaždé v opačném směru, takže se při součtu křivkové integrály přes tyto křivky vyruší a zůstane jen součet přes křivky hranice.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Takové obrázky jsem kreslil
jako malý.

Konec otázek 4.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ



Podíváte-li se nyní zpátky na popis délky křivky nebo na postup při zjišťování těžiště křivky, zjistíte, že vzorce z kapitoly 15-ia-p se dají přepsat pomocí křivkových integrálů 1.druhu.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ



Podíváte-li se nyní zpátky na popis délky křivky nebo na postup při zjišťování těžiště křivky, zjistíte, že vzorce z kapitoly 15-ia-p se dají přepsat pomocí křivkových integrálů 1.druhu.



Musím uznat, že to je šikovné. Už máme něco předem rozmyšleno. Vyplatilo se to.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ



Podíváte-li se nyní zpátky na popis délky křivky nebo na postup při zjišťování těžiště křivky, zjistíte, že vzorce z kapitoly 15-ia-p se dají přepsat pomocí křivkových integrálů 1.druhu.



Musím uznat, že to je šikovné. Už máme něco předem rozmyšleno. Vyplatilo se to.



Přemýšlím a marně vzpomínám, kdy přesně jsem to zapomněl.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Délka po částech hladké křivky C je rovna $\int_C ds$.
2. Hmotnost tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, je rovna $\int_C h(s) ds$.
3. Těžiště tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, má souřadnice (T_x, T_y) , kde (m značí hmotnost drátu)

$$T_x = \frac{\int_C xh(s) ds}{m}, \quad T_y = \frac{\int_C yh(s) ds}{m}.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Délka po částech hladké křivky C je rovna $\int_C ds$.
2. Hmotnost tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, je rovna $\int_C h(s) ds$.
3. Těžiště tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, má souřadnice (T_x, T_y) , kde (m značí hmotnost drátu)

$$T_x = \frac{\int_C xh(s) ds}{m}, \quad T_y = \frac{\int_C yh(s) ds}{m}.$$



V integrálech se musí za x, y, s dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je křivka C popsána.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Délka po částech hladké křivky C je rovna $\int_C ds$.
2. Hmotnost tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, je rovna $\int_C h(s) ds$.
3. Těžiště tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, má souřadnice (T_x, T_y) , kde (m značí hmotnost drátu)

$$T_x = \frac{\int_C xh(s) ds}{m}, \quad T_y = \frac{\int_C yh(s) ds}{m}.$$



V integrálech se musí za x, y, s dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je křivka C popsána.



Čitatele ve vzorcích pro těžiště drátu jsou (statické) momenty drátu vzhledem k osám y nebo x resp.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

První dvě položky platí i v prostoru beze změny. Pro těžiště se přidá analogický třetí výraz pro T_z , což je moment křivky vzhledem k rovině xy .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.



Nechť G je jednoduchá množina. Její obsah je roven $\int_G dx dy$, tj. integrálu z funkce identicky rovné 1 na G . Aby bylo možné použít Greenův vzorec, musí se vzít takové funkce f_1, f_2 mající spojitě parciální derivace na \overline{G} , aby $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz. křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu
- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.



Nechť G je jednoduchá množina. Její obsah je roven $\int_G dx dy$, tj. integrálu z funkce identicky rovné 1 na G . Aby bylo možné použít Greenův vzorec, musí se vzít takové funkce f_1, f_2 mající spojité parciální derivace na \overline{G} , aby $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$.



Nabízí se několik možností, např. $f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = 0$, nebo naopak $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = y$ anebo symetricky zvolené funkce $f_1(x, y) = x/2, f_2(x, y) = y/2$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.



Nechť G je jednoduchá množina. Její obsah je roven $\int_G dx dy$, tj. integrálu z funkce identicky rovné 1 na G . Aby bylo možné použít Greenův vzorec, musí se vzít takové funkce f_1, f_2 mající spojité parciální derivace na \overline{G} , aby $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$.



Nabízí se několik možností, např. $f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = 0$, nebo naopak $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = y$ anebo symetricky zvolené funkce $f_1(x, y) = x/2, f_2(x, y) = y/2$.



Tím se dostávají následující vzorce pro obsah $S(G)$ množiny G :

POZOROVÁNÍ.

$$S(G) = \int_{\partial G} x dy = - \int_{\partial G} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x dy - y dx).$$

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

1. Spočtěte těžiště drátu tvaru polokružnice $\{(x, y); x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ s hustotou $h(x, y) = 2 - y$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace

křivk.integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu

- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

1. Spočtete těžiště drátu tvaru polokružnice $\{(x, y); x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ s hustotou $h(x, y) = 2 - y$.



2. Spočtete plochu elipsy pomocí křivkového integrálu.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz. křivka
- orientace

křivk.integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu

- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

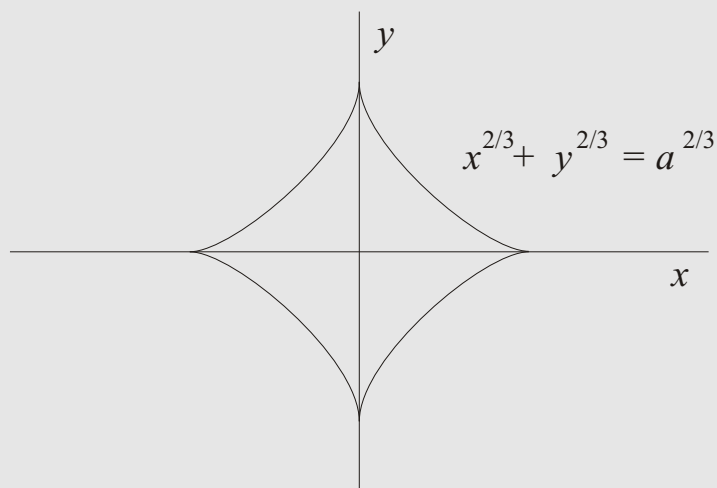
1. Spočítejte těžiště drátu tvaru polokružnice $\{(x, y); x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ s hustotou $h(x, y) = 2 - y$.



2. Spočítejte plochu elipsy pomocí křivkového integrálu.



3. Spočítejte plochu astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ pomocí křivkových integrálů.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

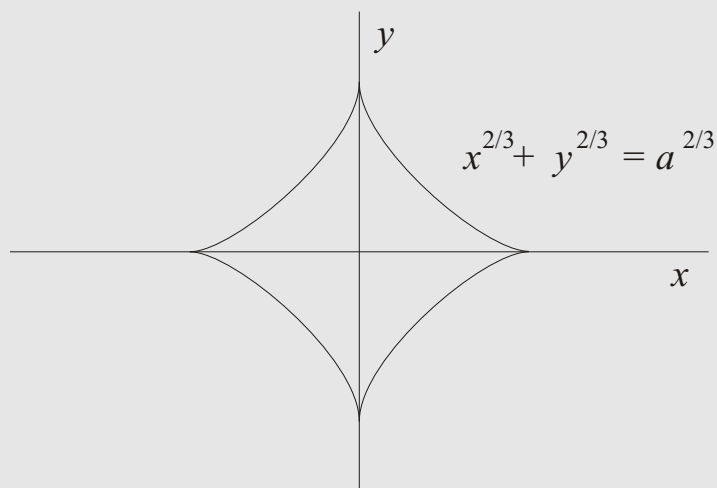
1. Spočtěte těžiště drátu tvaru polokružnice $\{(x, y); x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ s hustotou $h(x, y) = 2 - y$.



2. Spočtěte plochu elipsy pomocí křivkového integrálu.



3. Spočtěte plochu astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ pomocí křivkových integrálů.



4. Najděte těžiště cykloidy $x = (t - \sin t), y = (1 - \cos t), t \in [0, 4\pi]$.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

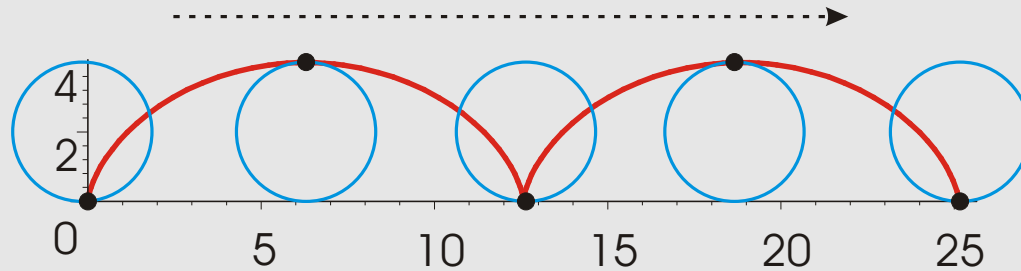
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cykloida = dráha hřebíku v pneumatice



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

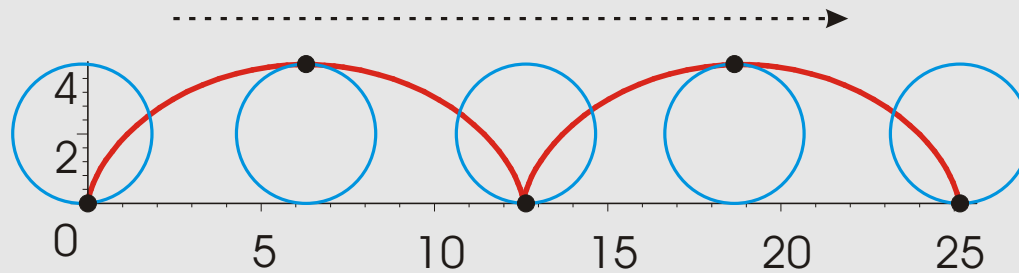
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cykloida = dráha hřebíku v pneumatice



Tak to jsem měl cykloidu i na autě.

Konec příkladů 5.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Pomocí Greenovy věty určete obsah $|G|$ plochy G uvnitř elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Pomocí Greenovy věty určete obsah $|G|$ plochy G uvnitř elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Řešení. Elipsu budeme parametrizovat modifikovanými polárními souřadnicemi

$$x = \varphi(t) = a \cos t, \quad y = \psi(t) = b \sin t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Pomocí Greenovy věty určete obsah $|G|$ plochy G uvnitř elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Řešení. Elipsu budeme parametrizovat modifikovanými polárními souřadnicemi

$$x = \varphi(t) = a \cos t, \quad y = \psi(t) = b \sin t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$



Zvolme funkci $f = (f_1, f_2)$, kde funkce jsou dány vztahy $f_1(x, y) = -y$, $f_2(x, y) = x$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Pomocí Greenovy věty určete obsah $|G|$ plochy G uvnitř elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Řešení. Elipsu budeme parametrizovat modifikovanými polárními souřadnicemi

$$x = \varphi(t) = a \cos t, \quad y = \psi(t) = b \sin t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$



Zvolme funkci $f = (f_1, f_2)$, kde funkce jsou dány vztahy $f_1(x, y) = -y$, $f_2(x, y) = x$.



To jsem se naučil v baru "U
tornáda".

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podle Greenovy věty dostáváme

$$\int_{\partial G} f_1(x, y) \, dx + f_2(x, y) \, dy = \int_G \left(\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right) \, dx \, dy = 2 \int_G \, dx \, dy.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle Greenovy věty dostáváme

$$\int_{\partial G} f_1(x, y) \, dx + f_2(x, y) \, dy = \int_G \left(\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right) \, dx \, dy = 2 \int_G \, dx \, dy.$$



Jelikož

$$|G| = \int_G \, dx \, dy,$$

hledaný obsah $|G|$ pak bude roven

$$|G| = \frac{1}{2} \int_{\partial G} -y \, dx + x \, dy = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ((-b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(b \cos t)) \, dt = \pi ab.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle Greenovy věty dostáváme

$$\int_{\partial G} f_1(x, y) \, dx + f_2(x, y) \, dy = \int_G \left(\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right) \, dx \, dy = 2 \int_G \, dx \, dy.$$



Jelikož

$$|G| = \int_G \, dx \, dy,$$

hledaný obsah $|G|$ pak bude roven

$$|G| = \frac{1}{2} \int_{\partial G} -y \, dx + x \, dy = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ((-b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(b \cos t)) \, dt = \pi ab.$$



Ta f mohla být i jiná. Ta jediné jsem podle GREENovy věty pochopil. Nejsem zelenáč.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 5.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STANDARDY z kapitoly

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STANDARDY z kapitoly

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKY



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKY



Křivka je spojitý obraz kompaktního intervalu $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, Φ je tedy n -tice spojitých reálných funkcí jedné proměnné definovaných na $[a, b]$. **Křivka** v rovině je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in [a, b]\}$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKY



Křivka je spojitý obraz kompaktního intervalu $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, Φ je tedy n -tice spojitých reálných funkcí jedné proměnné definovaných na $[a, b]$. **Křivka** v rovině je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in [a, b]\}$.

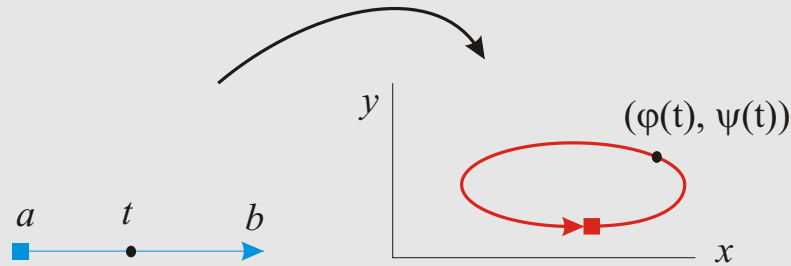


Křivka v prostoru je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi, \tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in [a, b]\}$.



LEKCE22-IKR
Křivkový integrál
křivka
uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek
Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Počáteční bod křivky je $\Phi(a)$, koncový bod je $\Phi(b)$ (pokud není orientace stanovena jinak – viz dále). Křivky, u kterých počáteční a koncový bod splývají, se nazývají *uzavřené*.

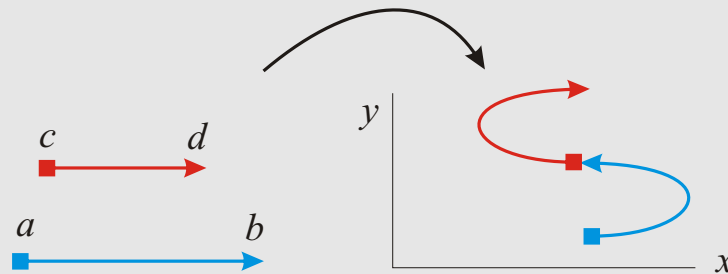


LEKCE22-IKR
 Křivkový integrál
 křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace
- křivk.integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- křivk.integrál 2.druhu
- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek
- Greenova věta
- těžiště drátu
- plocha křivkovým int.
- STANDARDY**
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť jsou dány dvě křivky C_1, C_2 definované funkcemi $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\Psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, přičemž koncový bod křivky C_1 je počáteční bod křivky C_2 , tj. $\Phi(b) = \Psi(c)$. **Spojením** obou křivek se rozumí křivka, značená jako $C_1 + C_2$, definovaná funkcí $T(t)$ na intervalu $[a, b + d - c]$ předpisem

$$T(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \text{pro } t \in [a, b]; \\ \Psi(t + c - b), & \text{pro } t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li křivka Ψ popsána parametricky funkcemi φ, ψ , řekneme, že Ψ je **hladká křivka**, když:

1. funkce φ, ψ mají spojité první derivace;
2. pro každé $t \in [a, b]$ je aspoň jedna z derivací $\varphi'(t), \psi'(t)$ nenulová;
3. každý bod křivky je obrazem jediného bodu z $[a, b]$ s jedinou možnou výjimkou: počáteční a koncový bod mohou splývat.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li křivka Ψ popsána parametricky funkcemi φ, ψ , řekneme, že Ψ je **hladká křivka**, když:

1. funkce φ, ψ mají spojité první derivace;
2. pro každé $t \in [a, b]$ je aspoň jedna z derivací $\varphi'(t), \psi'(t)$ nenulová;
3. každý bod křivky je obrazem jediného bodu z $[a, b]$ s jedinou možnou výjimkou: počáteční a koncový bod mohou splývat.



Po částech **hladká křivka** je křivka, která vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je po částech hladká křivka C spojením křivek C_1, C_2, \dots, C_n v uvedeném pořadí. Křivka C se nazývá **jednoduše uzavřená**, jestliže všechny křivky C_i jsou navzájem disjunktní s jedinými výjimkami:

- počáteční bod křivky C_1 splývá s koncovým bodem křivky C_n
- počáteční bod křivky C_{i+1} splývá s koncovým bodem křivky C_i pro $i = 1..n - 1$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je po částech hladká křivka C spojením křivek C_1, C_2, \dots, C_n v uvedeném pořadí. Křivka C se nazývá **jednoduše uzavřená**, jestliže všechny křivky C_i jsou navzájem disjunktní s jedinými výjimkami:

- počáteční bod křivky C_1 splývá s koncovým bodem křivky C_n
- počáteční bod křivky C_{i+1} splývá s koncovým bodem křivky C_i pro $i = 1..n - 1$.



Dá se dokázat, podobně jako u kružnice, že jednoduše uzavřená křivka C dělí rovinu na dvě části: omezenou, tzv. *vnitřek* křivky C (značený ιC) a neomezenou, tzv. *vnějšek*.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V dalším textu bude potřeba orientace křivky, tj. určení kladného a záporného směru křivky. Je-li C orientovaná křivka, značí $-C$ množinově tutéž křivku s opačnou orientací.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V dalším textu bude potřeba orientace křivky, tj. určení kladného a záporného směru křivky. Je-li C orientovaná křivka, značí $-C$ množinově tutéž křivku s opačnou orientací.



U křivky zadané pomocí funkce Φ na nějakém intervalu $[a, b]$ je kladná orientace dána (pokud není určeno jinak) tímto intervalem. Kladná orientace probíhá od bodu $\Phi(a)$ do bodu $\Phi(b)$, tj. podle rostoucího parametru.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V dalším textu bude potřeba orientace křivky, tj. určení kladného a záporného směru křivky. Je-li C orientovaná křivka, značí $-C$ množinově tutéž křivku s opačnou orientací.



U křivky zadané pomocí funkce Φ na nějakém intervalu $[a, b]$ je kladná orientace dána (pokud není určeno jinak) tímto intervalem. Kladná orientace probíhá od bodu $\Phi(a)$ do bodu $\Phi(b)$, tj. podle rostoucího parametru.



Kladná orientace jednoduše uzavřené křivky (pokud nebude řečeno jinak) je proti směru pohybu hodinových ručiček. Přesněji řečeno: jdete-li po této křivce v kladném směru, máte její vnitřek po levé straně.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Jakou prostorovou křivku představuje parametrické zadání

$$\varphi(t) = \sin t, \psi(t) = \cos(t), \tau(t) = t, t \in [0, 2\pi] ?$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Jakou prostorovou křivku představuje parametrické zadání

$$\varphi(t) = \sin t, \psi(t) = \cos(t), \tau(t) = t, t \in [0, 2\pi] ?$$



Je to šroubovice.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

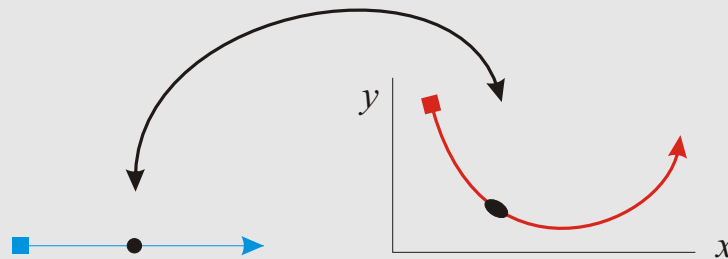
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



Postup, jak počítat integrál funkce podle křivky je přirozený: křivka se narovná do úsečky a spočte se integrál z transformované funkce přes tuto úsečku.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nechť je dána reálná funkce f na po částech hladké křivce v rovině zadané parametricky funkcemi φ a ψ na intervalu $[a, b]$. Pak se definuje **křivkový integrál 1.druhu** funkce f podél křivky C jako

$$\int_C f(s) \, ds = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je dána reálná funkce f na po částech hladké křivce v rovině zadané parametricky funkcemi φ a ψ na intervalu $[a, b]$. Pak se definuje **křivkový integrál 1.druhu** funkce f podél křivky C jako

$$\int_C f(s) \, ds = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt.$$



Označme $\tau(t) = (\varphi'(t), \psi'(t))$ tečný vektor křivky v bodě. Pak substituujeme (velikost tečného vektoru je něco jako Jacobián):

$$s = (\varphi(t), \psi(t))$$

$$ds = |(\varphi'(t), \psi'(t))| \, dt = |\tau(t)| \, dt$$

$$\int_C f(s) \, ds = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))) |\tau(t)| \, dt.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro prostorové křivky se pracuje se třemi složkami

$$\int_C f(s) \, ds = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t), \tau(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \tau'^2(t)} \, dt .$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte křivkový integrál 1.druhu funkce $x + y$ přes obvod trojúhelníka s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Necht' je dána reálná funkce H na hladké křivce $C = [0, 1]$ (jde o jednotkový interval na reálné ose).

Necht' jsou dány dvě parametrizace $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow C$ a $f : [a, b] \rightarrow C$ s rostoucími funkcemi φ a f .

Pak

$$\int_C H(s) \, ds = \int_{\alpha}^{\beta} H(\varphi(\tau)) \sqrt{\varphi'^2(\tau)} \, d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} H(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) \, d\tau .$$

Podobně

$$\int_C H(s) \, ds = \int_a^b H(f(t)) \sqrt{f'^2(t)} \, dt = \int_a^b H(f(t)) f'(t) \, dt .$$

Dokažte, že se jedná o stejný výsledek při obou parametrizacích.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Necht' je dána reálná funkce H na hladké křivce $C = [0, 1]$ (jde o jednotkový interval na reálné ose).

Necht' jsou dány dvě parametrizace $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow C$ a $f : [a, b] \rightarrow C$ s rostoucími funkcemi φ a f .

Pak

$$\int_C H(s) \, ds = \int_\alpha^\beta H(\varphi(\tau)) \sqrt{\varphi'(\tau)^2} \, d\tau = \int_\alpha^\beta H(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) \, d\tau.$$

Podobně

$$\int_C H(s) \, ds = \int_a^b H(f(t)) \sqrt{f'(t)^2} \, dt = \int_a^b H(f(t)) f'(t) \, dt.$$

Dokažte, že se jedná o stejný výsledek při obou parametrizacích.



Řešení. Použijeme substituci $\tau = \varphi^{-1}(f(t))$. Pak

$$\begin{aligned} & \int_\alpha^\beta H(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) \, d\tau = \\ &= \int_a^b H(\varphi(\varphi^{-1}(f(t)))) \varphi'(\varphi^{-1}(f(t))) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(f(t)))} f'(t) \, dt = \\ &= \int_a^b H(f(t)) f'(t) \, dt \end{aligned}$$

A je to.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

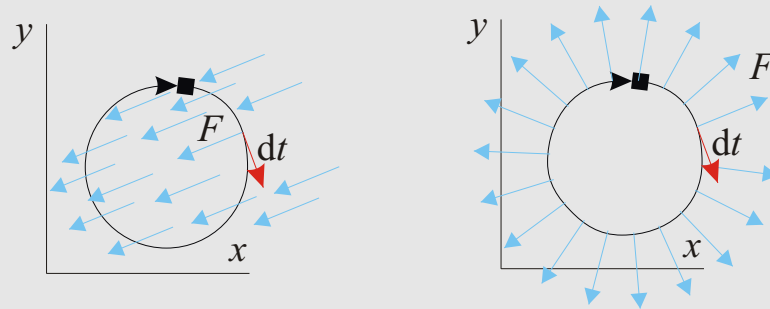
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Necht' je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka C funkcemi φ, ψ na intervalu $[a, b]$ a funkce f na C s hodnotami v \mathbb{R}^2 se souřadnicemi (f_1, f_2) .



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Necht' je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka C funkcemi φ, ψ na intervalu $[a, b]$ a funkce f na C s hodnotami v \mathbb{R}^2 se souřadnicemi (f_1, f_2) .



Pak se definuje **křivkový integrál 2.druhu** funkce f podle křivky C jako

$$\int_C \mathbf{f}(s) \cdot d\mathbf{t} = \int_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_a^b (f_1(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_2(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Necht' je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka C funkcemi φ, ψ na intervalu $[a, b]$ a funkce f na C s hodnotami v \mathbb{R}^2 se souřadnicemi (f_1, f_2) .



Pak se definuje **křivkový integrál 2.druhu** funkce f podle křivky C jako

$$\int_C \mathbf{f}(s) \cdot d\mathbf{t} = \int_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_a^b (f_1(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_2(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt.$$



První dva integrály jsou ekvivalentní formy zápisu křivkového integrálu 2.druhu, třetí integrál je jeho definice pomocí obyčejného integrálu reálné funkce jedné proměnné na intervalu.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Necht' je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka C funkcemi φ, ψ na intervalu $[a, b]$ a funkce f na C s hodnotami v \mathbb{R}^2 se souřadnicemi (f_1, f_2) .



Pak se definuje **křivkový integrál 2.druhu** funkce f podle křivky C jako

$$\int_C \mathbf{f}(s) \cdot d\mathbf{t} = \int_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_a^b (f_1(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_2(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt.$$



První dva integrály jsou ekvivalentní formy zápisu křivkového integrálu 2.druhu, třetí integrál je jeho definice pomocí obyčejného integrálu reálné funkce jedné proměnné na intervalu.



Bude-li funkce f s hodnotami v rovině nebo prostoru chápána jako vektor, bude se též značit tučně jako \mathbf{f} .



LEKCE22-IKR
Křivkový integrál
křivka
uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek
Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro křivku uvažujeme bod křivky jako vektor $\mathbf{t}(t) = (x(t), y(t))$. Pak formálně získáme vektor $d\mathbf{t} = (dx, dy)$. Zde $dx/dt = \varphi'(t)$ a $dy/dt = \psi'(t)$, odtud vyjádříme dx a dy a použijeme následně substituci ve tvaru

$$d\mathbf{t} = (dx, dy) = (\varphi'(t), \psi'(t)) dt = \tau dt .$$

Tedy

$$\mathbf{t} = (\varphi(t), \psi(t))$$

$$d\mathbf{t} = (\varphi'(t), \psi'(t)) dt = \tau(t) dt$$

$$\int_C f(s) \cdot d\mathbf{t} = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))) \cdot \tau(t) dt .$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kdykoliv potřebujeme nahradíme dx za $\varphi'(t) dt$ a podobně dy za $\psi'(t) dt$. Podobně $dt = (dx, dy)$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Pokud má smysl pravá strana tak platí.

$$\int_{-C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} = - \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} .$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Pokud má smysl pravá strana tak platí.

$$\int_{-C} f. dt = - \int_C f. dt .$$



To je důležité pro příklady.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

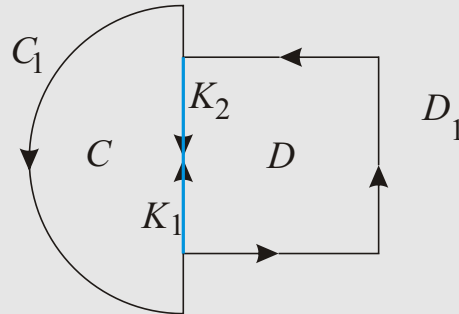
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Je-li f funkce $C + D \rightarrow \mathbb{R}^2$, pak

$$\int_{C+D} \mathbf{f} \, dt = \int_{C_1+D_1} \mathbf{f} \, dt .$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte křivkový integrál 2.druhu z funkce $(-y^2, xy)$ po obvodu čtverce s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte křivkový integrál 2.druhu z funkce $(-y^2, xy)$ po obvodu čtverce s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.



Příklad. Spočtěte integrál $\int_C (y \, dx + z \, dy + x \, dz)$ přes vhodnou křivku.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

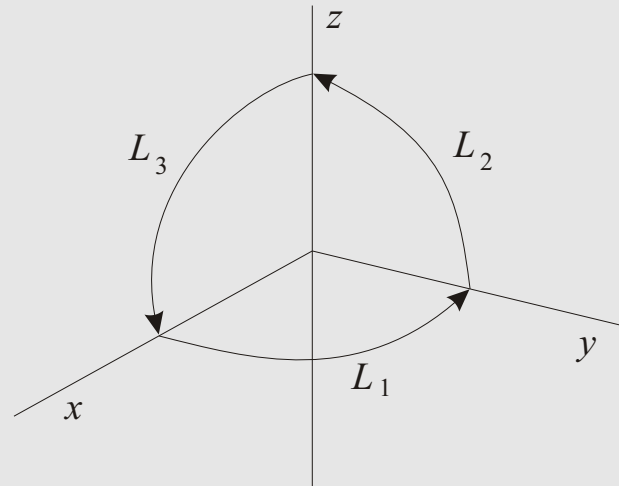
Příklad. Spočtěte křivkový integrál 2.druhu z funkce $(-y^2, xy)$ po obvodu čtverce s vrcholy $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$.



Příklad. Spočtěte integrál $\int_C (y dx + z dy + x dz)$ přes vhodnou křivku.



Příklad. Zintegrujte konstantní vektorové pole přes uzavřenou křivku na obrázku.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GREENOVA VĚTA



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GREENOVA VĚTA



Jde o rovinnou verzi základní věty analýzy.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GREENOVA VĚTA



Jde o rovinnou verzi základní věty analýzy.

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) .$$

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Křivkový integrál 2.druhu po uzavřené křivce se často značí symbolem \oint a chápe se přes kladnou orientaci křivky (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček).



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Křivkový integrál 2.druhu po uzavřené křivce se často značí symbolem \oint a chápe se přes kladnou orientaci křivky (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček).



VĚTA. (Green) Necht' H je otevřená množina v rovině obsahující jednoduše uzavřenou křivku C i s jejím vnitřkem ιC a $f = (f_1, f_2)$ je funkce $H \rightarrow \mathbb{R}^2$ mající spojitě parciální derivace na H . Pak platí

$$\oint_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_{\iota C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy .$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. V případě, že C je obvod obdélníku s vrcholy (a, c) , (b, c) , (b, d) , (a, d) , je důkaz snadný, protože podle definic příslušných integrálů je

$$\oint_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_a^b f_1(x, c) dx + \int_c^d f_2(b, y) dy - \int_a^b f_1(x, d) dx - \int_c^d f_2(a, y) dy$$

a

$$\int_{\iota C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_c^d (f_2(b, y) - f_2(a, y)) dy - \int_a^b (f_1(x, d) - f_1(x, c)) dx$$

a obě pravé strany jsou stejné.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Greenovu větu lze psát

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} = \oint_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_{\iota C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy .$$

Na levé straně se integruje ve skutečnosti skalární součin funkce \mathbf{f} a tečného vektoru $\boldsymbol{\tau} = (dx, dy)$ ke křivce C . Na pravé straně se integruje rotace vektorové funkce.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka

- orientace

křivk.integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

- vlastnosti 2.dr.

- vztah 1. a 2. dr.

- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu

- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Greenovu větu lze psát

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{t} = \oint_C (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_{iC} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy .$$

Na levé straně se integruje ve skutečnosti skalární součin funkce \mathbf{f} a tečného vektoru $\boldsymbol{\tau} = (dx, dy)$ ke křivce C . Na pravé straně se integruje rotace vektorové funkce.



Jestliže se Greenova rovnost použije na pomocnou funkci $(-f_2, f_1)$, dostává se vzorec

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{n} = \oint_C (f_1(x, y) dy - f_2(x, y) dx) = \int_{iC} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx dy .$$

Na levé straně se integruje ve skutečnosti skalární součin funkce \mathbf{f} a normály $\mathbf{n} = (dy, -dx)$ ke křivce C , značíme analogicky $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{n}$. Na pravé straně se integruje divergence vektorové funkce.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Greenova věta v obecném tvaru)



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Greenova věta v obecném tvaru)



Nechť G je otevřená souvislá množina, která má za hranici konečně mnoho disjunkt-
ních, jednoduše uzavřených křivek a H otevřená množina obsahující $G \cup \partial G$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Greenova věta v obecném tvaru)

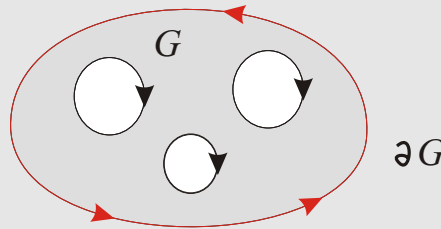


Nechť G je otevřená souvislá množina, která má za hranici konečně mnoho disjunkt-ních, jednoduše uzavřených křivek a H otevřená množina obsahující $G \cup \partial G$.



Nechť $f = (f_1, f_2)$ je funkce $\bar{H} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace. Pak platí

$$\oint_{\partial G} (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_G \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy .$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Greenova věta v obecném tvaru)

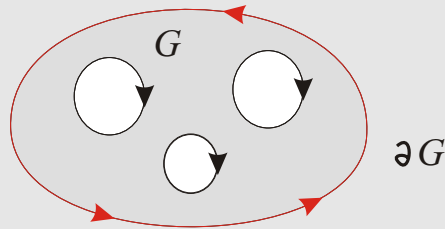


Nechť G je otevřená souvislá množina, která má za hranici konečně mnoho disjunkt-
ních, jednoduše uzavřených křivek a H otevřená množina obsahující $G \cup \partial G$.



Nechť $f = (f_1, f_2)$ je funkce $\bar{H} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace. Pak platí

$$\oint_{\partial G} (f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy) = \int_G \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy .$$



Stejně jako u základní verze Greenovy věty lze vzorec psát ve tvaru

$$\oint_{\partial G} (f_1(x, y) dy - f_2(x, y) dx) = \int_G \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx dy .$$

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Příklad. Použijte Greenův vzorec na mezikruží $\{(x, y); r < x^2 + y^2 < R\}$, kde $0 \leq r < R$ pro funkci $(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ



POZOROVÁNÍ.

1. Délka po částech hladké křivky C je rovna $\int_C ds$.
2. Hmotnost tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, je rovna $\int_C h(s) ds$.
3. Těžiště tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, má souřadnice (T_x, T_y) , kde (m značí hmotnost drátu)

$$T_x = \frac{\int_C xh(s) ds}{m}, \quad T_y = \frac{\int_C yh(s) ds}{m}.$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ



POZOROVÁNÍ.

1. Délka po částech hladké křivky C je rovna $\int_C ds$.
2. Hmotnost tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, je rovna $\int_C h(s) ds$.
3. Těžiště tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, má souřadnice (T_x, T_y) , kde (m značí hmotnost drátu)

$$T_x = \frac{\int_C xh(s) ds}{m}, \quad T_y = \frac{\int_C yh(s) ds}{m}.$$



V integrálech se musí za x, y, s dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je křivka C popsána.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ



POZOROVÁNÍ.

1. Délka po částech hladké křivky C je rovna $\int_C ds$.
2. Hmotnost tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, je rovna $\int_C h(s) ds$.
3. Těžiště tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C , který má v bodě s hustotu $h(s)$, má souřadnice (T_x, T_y) , kde (m značí hmotnost drátu)

$$T_x = \frac{\int_C xh(s) ds}{m}, \quad T_y = \frac{\int_C yh(s) ds}{m}.$$



V integrálech se musí za x, y, s dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je křivka C popsána.



Čitatelé ve vzorcích pro těžiště drátu jsou (statické) momenty drátu vzhledem k osám y nebo x resp.

První dvě položky platí i v prostoru beze změny. Pro těžiště se přidá analogický třetí výraz pro T_z , což je moment křivky vzhledem k rovině xy .

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.



Nechť G je jednoduchá množina. Její obsah je roven $\int_G dx dy$, tj. integrálu z funkce identicky rovné 1 na G . Aby bylo možné použít Greenův vzorec, musí se vzít takové funkce f_1, f_2 mající spojité parciální derivace na \overline{G} , aby $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka
- orientace

křivk.integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

- vlastnosti 2.dr.
- vztah 1. a 2. dr.
- prolínání křivek

Greenova věta

- těžiště drátu

- plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.



Nechť G je jednoduchá množina. Její obsah je roven $\int_G dx dy$, tj. integrálu z funkce identicky rovné 1 na G . Aby bylo možné použít Greenův vzorec, musí se vzít takové funkce f_1, f_2 mající spojité parciální derivace na \overline{G} , aby $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$.



Nabízí se několik možností, např. $f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = 0$, nebo naopak $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = y$ anebo symetricky zvolené funkce $f_1(x, y) = x/2, f_2(x, y) = y/2$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.



Nechť G je jednoduchá množina. Její obsah je roven $\int_G dx dy$, tj. integrálu z funkce identicky rovné 1 na G . Aby bylo možné použít Greenův vzorec, musí se vzít takové funkce f_1, f_2 mající spojité parciální derivace na \overline{G} , aby $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$.



Nabízí se několik možností, např. $f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = 0$, nebo naopak $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = y$ anebo symetricky zvolené funkce $f_1(x, y) = x/2, f_2(x, y) = y/2$.



POZOROVÁNÍ.

$$S(G) = \int_{\partial G} x dy = - \int_{\partial G} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x dy - y dx).$$



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka
orientace

křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtete plochu elipsy pomocí křivkového integrálu.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál

křivka

uzavřená křivka

spojení křivek

hladká křivka

část. hladká křivka

jednoduchá uz.

křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte plochu elipsy pomocí křivkového integrálu.



Řešení. Pomocí Greenovy věty určíme obsah $|G|$ plochy G uvnitř elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elipsu budeme parametrizovat modifikovanými polárními souřadnicemi

$$x = \varphi(t) = a \cos t, \quad y = \psi(t) = b \sin t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Zvolme funkci $f = (f_1, f_2)$, kde funkce jsou dány vztahy $f_1(x, y) = -y$, $f_2(x, y) = x$.
Podle Greenovy věty dostáváme

$$\int_{\partial G} f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy = \int_G \left(\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = 2 \int_G dx dy.$$

Jelikož

$$|G| = \int_G dx dy,$$

hledaný obsah $|G|$ pak bude roven

$$|G| = \frac{1}{2} \int_{\partial G} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ((-b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(b \cos t)) dt = \pi ab.$$

LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

uzavřená křivka
spojení křivek
hladká křivka
část. hladká křivka
jednoduchá uz.
křivka

orientace
křivk.integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu
vlastnosti 2.dr.
vztah 1. a 2. dr.
prolínání křivek

Greenova věta
těžiště drátu
plocha křivkovým int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

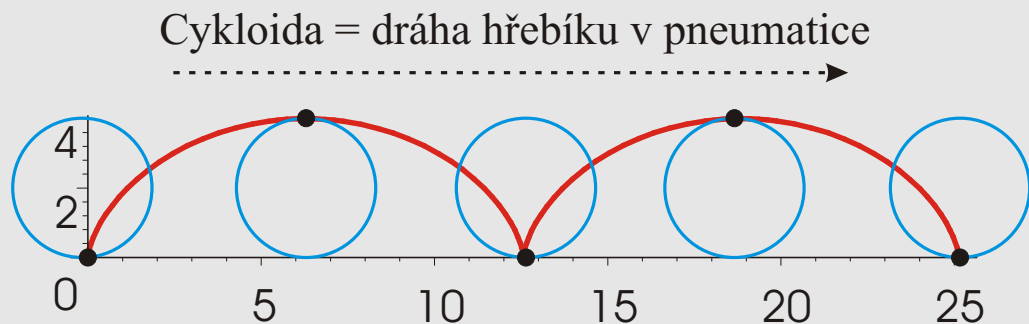
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Příklad.

Najděte těžiště cykloidy $x = (t - \sin t)$, $y = (1 - \cos t)$, $t \in [0, 4\pi]$.



LEKCE22-IKR

Křivkový integrál
křivka

- uzavřená křivka
- spojení křivek
- hladká křivka
- část. hladká křivka
- jednoduchá uz.
křivka

orientace

křivk.integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

křivk.integrál 2.druhu

vlastnosti 2.dr.

vztah 1. a 2. dr.

prolínání křivek

Greenova věta

těžiště drátu

plocha křivkovým int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9