# KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY

Má-li se spočítat např. spotřeba betonu na rovný plot s měnící se výškou, stačí spočítat integrál z této výšky podle základny plotu.

Co když je ale základnou plotu nikoli rovná úsečka, ale křivá čára?

Podobný problém vzniká, má-li se spočítat práce vykonaná působením síly po nějaké křivé dráze.

Na vyřešení tohoto úkolu zavedeme tzv. křivkové integrály.

Nejdříve bude nutné se podrobněji podívat na pojmy týkající se křivek. Jsou to většinou pojmy z diferenciální geometrie a není možné v tomto textu všechny potřebné pojmy podrobně probrat.

Pojmy, které představíme, mají názornou interpretaci a není problém si vybudovat vlastní představu.

Mám rád hezké křivky …

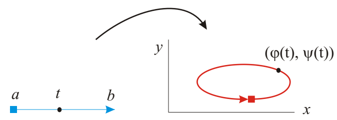
## KŘIVKY

Křivka může být zadána různými způsoby. Nejobvyklejší zadání (a pokud nebude řečeno jinak, právě toto zadání bude použito) je jako spojitý obraz kompaktního intervalu z $\mathbb{R}$. Jedná se vlastně o parametrické zadání, protože spojité zobrazení $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je $n$-tice spojitých reálných funkcí jedné proměnné definovaných na $[a, b]$.

Křivka v rovině je tedy popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in [a, b]\}$.

Křivka v prostoru je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi, \tau : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in [a, b]\}$.

Počáteční bod křivky je $\Phi(a)$, koncový bod je $\Phi(b)$ (pokud není orientace stanovena jinak – viz dále). Křivky, u kterých počáteční a koncový bod splývají, se nazývá *uzavřené*.



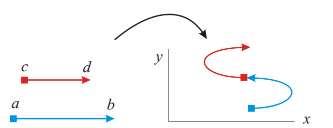

Např. elipsa, lemniskata (tj. „ležatá osmička"), obvod obdélníku jsou uzavřené křivky.

Graf funkce jedné proměnné nejsou uzavřené křivky.

Teď si budeme s křivkami hrát, nastavovat, spojovat …

Nechť jsou dány dvě křivky $C_1, C_2$ definované funkcemi $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a $\Psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$, přičemž koncový bod křivky $C_1$ je počáteční bod křivky $C_2$, tj. $\Phi(b) = \Psi(c)$. Spojením obou křivek se rozumí křivka, značená jako $C_1 + C_2$, definovaná funkcí $T(t)$ na intervalu $[a, b + d - c]$ předpisem

$$T(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \text{pro } t \in [a, b]; \\ \Psi(t + c - b), & \text{pro } t \in [b, b + d - c]. \end{cases} .$$




Je zřejmé, jak se definuje spojení tří a více křivek.

Následující definice a tvrzení budou formulovány pro rovinu. Na prostor se většinou přenášejí zřejmým způsobem (některé složitější případy jsou napovězeny v *Poznámkách*).

V dalším textu bude používán pojem hladká křivka. Je-li křivka popsána parametricky funkcemi $\varphi, \psi$, znamená to:

1. funkce $\varphi, \psi$ mají spojité první derivace;
2. pro každé $t \in [a, b]$ je aspoň jedna z derivací $\varphi'(t), \psi'(t)$ nenulová;
3. každý bod křivky je obrazem jediného bodu z $[a, b]$ s jedinou možnou výjimkou: počáteční a koncový bod mohou splývat.

Například oblouk, elipsa, graf spojité funkce mající spojitou derivaci na kompaktním intervalu, jsou hladké křivky. Lemniskata není hladkou křivkou.

"Osmička"se sama protíná, její zobrazení tedy není prosté. Ať se snažíte jak chcete. Zkusil jsem.

Po částech hladká křivka je křivka, která vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.

Například lemniskata, asteroida, cykloida, obvod obdélníku, jsou po částech hladké křivky.

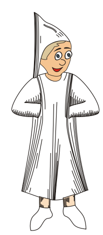
Příklad lemniskaty dává příklad uzavřené křivky, která však má nepříjemný bod. V mnoha případech lze tuto nepříjemnost obejít, pro jednoduchost ji však vyloučíme v definici jednoduše uzavřené křivky.

Nechť je po částech hladká křivka $C$ spojením křivek $C_1, C_2, ..., C_n$ v uvedeném pořadí. Křivka $C$ se nazývá jednoduše uzavřená, jestliže všechny křivky $C_i$ jsou navzájem disjunktní s jedinými výjimkami:

• počáteční bod křivky $C_1$ splývá s koncovým bodem křivky $C_n$

• počáteční bod křivky $C_{i+1}$ splývá s koncovým bodem křivky $C_i$ pro $i = 1..n-1$.

Dá se dokázat, podobně jako u kružnice, že jednoduše uzavřená křivka $C$ dělí rovinu na dvě části: omezenou, tzv. *vnitřek* křivky $C$ (značený $\iota C$) a neomezenou, tzv. *vnějšek*.



Tomu jsem sám nevěřil. Nějak se mi to nakonec samo povedlo.

Některá tvrzení zaslouží zvláštní uznání. Ď.

V dalším textu bude potřeba orientace křivky, tj. určení kladného a záporného směru křivky. Je-li $C$ orientovaná křivka, značí $-C$ množinově tutéž křivku s opačnou orientací.

U křivky zadané pomocí funkce $\Phi$ na nějakém intervalu $[a, b]$ je kladná orientace dána (pokud není určeno jinak) tímto intervalem. Kladná orientace probíhá od bodu $\Phi(a)$ do bodu $\Phi(b)$, tj. podle rostoucího parametru.

Kladná orientace jednoduše uzavřené křivky (pokud nebude řečeno jinak) je proti směru pohybu hodinových ručiček. Přesněji řečeno: jdete-li po této křivce v kladném směru, máte její vnitřek po levé straně.

Kdo nyní postrádá přesnou definici, postrádá i intuici.

Tečný vektor u orientovaných hladkých křivek bude označován tučně, např. $\mathrm{d}\boldsymbol{t}$. Bude-li funkce $f$ s hodnotami v rovině nebo prostoru chápána jako vektor, bude se též značit tučně jako $\mathbf{f}$.

Dávám zde prostor vektorové představivosti.

Takzvaný vektorový prostor.

Poznámky 1:

Uvědomte si, že graf spojité funkce $f$ na $[a, b]$ je speciální případ parametricky zadané křivky: $\varphi(t) = t, \psi(t) = f(t), t \in [a, b]$. Tato křivka je hladká právě když $f$ má spojitou derivaci na $[a, b]$.

Po částech hladké křivky nemusejí mít v konečně mnoha bodech tečny. V těchto bodech však mají tečny jednostranné (zleva a zprava).

Uzavřené křivky jsou speciálním případech tzv *Jordanových křivek*, což jsou spojité prosté obrazy kružnice (např. elipsa, obvod obdélníku). Jordanova křivka v rovině dělí (stejně jako kružnice) rovinu na dvě souvislé části, jednu omezenou (tzv. vnitřek) a jednu neomezenou (tzv. vnějšek).

Toto dokázat ale není jen tak. Nezkoušejte to během semestru.

Ani o prázdninách.

Další možností zadání křivky v rovině je pomocí spojité funkce $f(x, y)$ dvou proměnných, jako množina bodů $\{(x, y); f(x, y) = 0\}$.

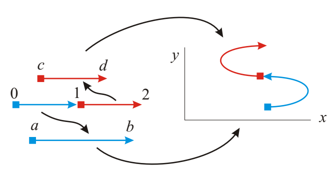
První dvě vlastnosti hladké křivky se snadno přenesou na toto zadání (místo derivace se použijí parciální derivace). Třetí vlastnost se popisuje hůře i když je jasné, co tato vlastnost znamená; občas se nahrazuje vlastností, že v každém bodě křivky existuje jediná tečna.

V tomto textu se integrály přes takto zadané křivky nebudou studovat.

Už z použitého názvu *křivky* se dá usoudit, že je tu obraz důležitější než funkce, které křivku popisují.

Protože každé dva uzavřené omezené intervaly lze na sebe vzájemně převést rostoucí (nebo klesající) prostou spojitou funkcí, lze dost volně nakládat s definičními obory křivek.

Např. u spojení dvou křivek bylo možné předpokládat, že oba intervaly $[a.b]$, $[c, d]$ na sebe navazují, tj., že $b = c$. Nebo, že první křivka je definována na $[0, 1, ]$ a druhá křivka na $[1, 2]$.




Kvůli zachování orientace křivek je lépe používat rostoucí funkce převádějící jeden interval na druhý.

Pokud orientace není důležitá (např. pro integrály 1.druhu), může se použít i klesající funkce.

Obecně řečeno, určit kladnou orientaci hladké křivky znamená určit ze dvou možností směru tečného vektoru právě jeden, který se bude spojitě měnit. U po částech hladké křivky může být kladná orientace určena svými hladkými částmi, možností je pak více.

**Křivky v prostoru.** Zadání křivek v rovině implicitním tvarem pomocí funkce dvou proměnných nelze automaticky přenést do prostoru, protože rovnice $f(x, y, z) = 0$ obecně udává plochu a nikoli křivku. Lze však použít dvou funkcí a křivku zadat jako průnik dvou ploch, tj. jako množinu bodů $\{(x, y, z); f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0\}$. Tato situace se vyskytovala u vázaných extrémů funkcí více proměnných, pro křivkové integrály se v tomto textu nebude používat.

U prostorových křivek popsaných parametricky, lze kladnou orientaci chápat stejně jako u rovinných křivek, tj. pomocí rostoucího parametru. Popsat orientaci uzavřených křivek v prostoru způsobem použitým pro rovinné křivky nelze, protože křivka může být všelijak nakloněná nebo jinak složitá. Není proto jasné, jak se na křivku postavit.

Orientace vzhledem k ploše, kterou křivka ohraničuje, bude popsána v příští kapitole.

Jsou ovšem prostorové uzavřené křivky, které žádnou vhodnou plochu neohraničují (např. kraj Möbiova listu).

V této kapitole nebude orientace prostorové křivky podstatná.

Křivky mohou mnohému z nás zatočit hlavou. Pozor na ně.

S orientací nemám problém.

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

**1.** Najděte po částech hladkou funkci $\Phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, jejíž obraz je obvod čtverce s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$.

**2.** Najděte po částech hladkou funkci $\Phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, jejíž obraz tvoří osmičku tvořenou ze dvou kružnic, horní o poloměru 1, spodní o poloměru 2. Osmičku si sami vhodně umístěte do roviny $xy$.

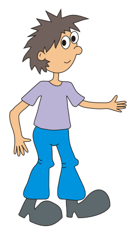
**3.** Nalezněte parametrický popis křivky zadané rovností $x^2 + 3y^3 = 7$.

Co bude lepší vyjádřit, $x$ nebo $y$? Kdy by se člověk měl vyjádřit sedmičkou?

**4.** Jakou prostorovou křivku představuje parametrické zadání

$$\varphi(t) = 2\sin t\,, \psi(t) = 2\cos(t)\,, \tau(t) = 4t\,, t \in [0, 20]\,?$$

Je tato křivka hladká? Je uzavřená? Leží v nějaké rovině?



Vidím to, ale nevím, co to je . . .

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

**1.** Najděte lineární rostoucí funkci, která převádí interval $[a, b]$ na interval $[c, d]$.

**2.** Místo lineární funkce v předchozím příkladu použijte kvadratickou funkci. Lze použít funkci tvaru $\sin(\alpha x + \beta)$ pro nějaká $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?

**3.** Ukažte, že elipsa je spojitým prostým obrazem jednotkové kružnice.

S chutí do toho, půl je hotovo.

**4.** * S pomocí věty o implicitních funkcích ukažte, že hladká křivka zadaná rovností $f(x, y) = 0$ je po částech hladká křivka zadaná parametricky.

Malinké opáčko, žeeeeeeeeeeee.

**5.** Rozmyslete si, proč bylo snadné definovat orientaci kružnice v rovině a proč to tak nejde v prostoru.

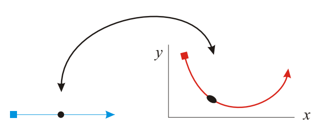
**6.** Je možné přirozeně definovat orientaci prostorové uzavřené křivky, která je krajem Möbiova listu?

**7.** Dokažte, že po částech hladké křivky mají konečnou délku.

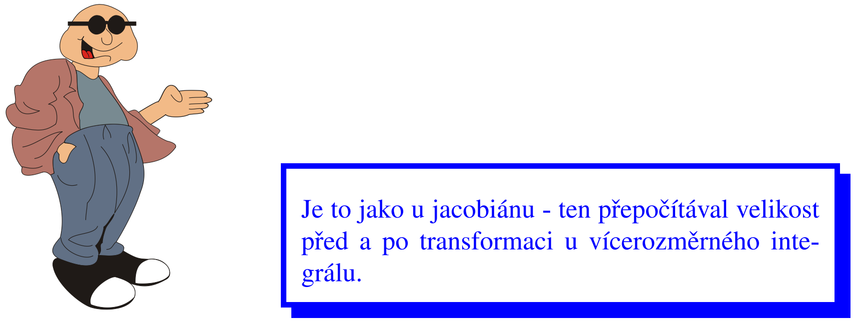
Konec otázek 1.

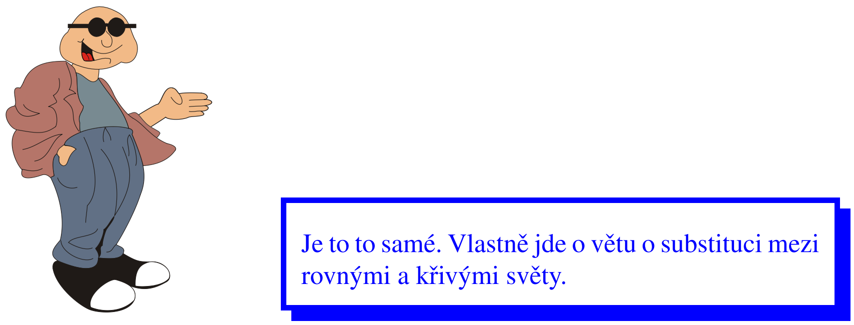
# KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU

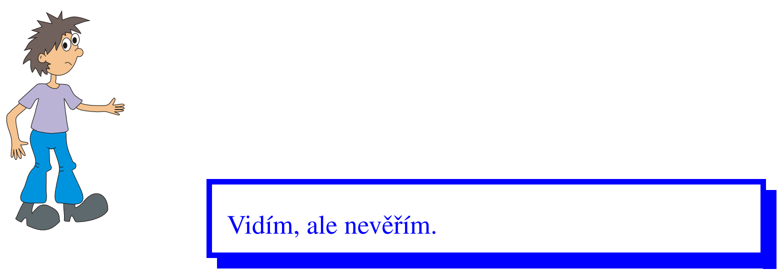
Postup, jak počítat integrál funkce podle křivky je přirozený: křivka se narovná do úsečky a spočte se integrál z transformované funkce přes tuto úsečku.




Každý kousek křivky odpovídá kousku definičního oboru zobrazení, které popisuje křivku. Spojitá transformace dovoluje přepočítat velikosti těchto kousků.

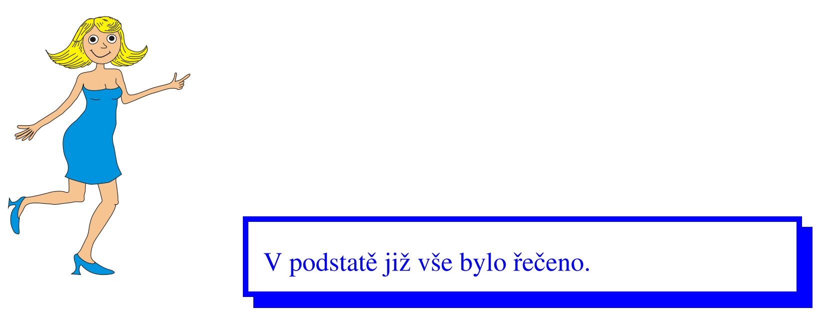



Tak jako u reálných funkcí na $\mathbb{R}$ dává integrál z funkce identicky rovné 1 délku (míru) množiny, přes kterou se integruje, měl by křivkový integrál z identické 1 přes křivku $C$ dávat délku křivky $C$.

V kapitole o použití integrálu se délka křivky vypočítala jako $\int_C \mathrm{d}s$, kde $\mathrm{d}s$ symbolicky značilo délku maličké části křivky, která se dala považovat za úsečku, takže se spočítala z Pythagorovy věty pomocí $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$.




V souladu s tímto značením se bude integrál funkce $f$ podél křivky $C$ značit $\int_C f(s)\,\mathrm{d}s$, kde $s$ jsou body křivky $C$.

Způsob, jakým byla délka křivky počítána, naznačuje, jak se bude počítat křivkový integrál.



Za chvíli bude probírán jiný přístup integrování funkcí podle křivky. Oba způsoby se odliší v názvu jako první a druhý druh.

Následující definice je vhodná pro výpočty v praxi se vyskytujících případů, ale požaduje po částech hladké křivky.

**DEFINICE.** Nechť je dána reálná funkce $f$ na po částech hladké křivce v rovině zadané parametricky funkcemi $\varphi$ a $\psi$ na intervalu $[a, b]$. Pak se definuje křivkový integrál 1.druhu funkce $f$ podél křivky $C$ jako

$$\int_C f(s)\ \mathrm{d}s = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$


**POZOROVÁNÍ.** Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany, poslední nerovnost platí, pokud existuje levá strana.

1. $\int_C (\alpha f(s) + \beta g(s))\ \mathrm{d}s = \alpha \int_C f(s)\ \mathrm{d}s + \beta \int_C g(s)\ \mathrm{d}s$;
2. $\int_{C_1+C_2} f(s)\ \mathrm{d}s = \int_{C_1} f(s)\ \mathrm{d}s + \int_{C_2} f(s)\ \mathrm{d}s$;
3. $\int_{-C} f(s)\ \mathrm{d}s = \int_C f(s)\ \mathrm{d}s$;
4. $|\int_C f(s)\ \mathrm{d}s| \leq L(C) \max_{s\in C} |f(s)|$, kde $L(C)$ je délka křivky $C$.

Předposlední tvrzení říká, že křivkový integrál prvního druhu nezávisí na orientaci křivky.

Poznámky 2:

**1.** Když si projdete předchozí definici a vlastnosti křivkového integrálu 1.druhu, zjistíte, že nic nebrání použití komplexní funkce $f$, tj. funkce mající za hodnoty komplexní čísla.

**2.** Postupem obdobným Riemannovu postupu u funkcí jedné proměnné na $\mathbb{R}$ lze definovat křivkový integrál 1.druhu i pro nehladké křivky.

Křivka se rozdělí na konečně mnoho dílků $C_i$ a v každém se zvolí jeden bod $s_i$. Pak se vezme součet $\sum_i f(s_i)d(C_i)$, kde $d(C_i)$ je délka křivky $C_i$.

Je možné se vyhnout délce křivky a místo délky $C_i$ vzít vzdálenost krajních bodů křivky $C_i$.

V dalším kroku se vezme posloupnost těchto dělení křivky, takových, že délky jednotlivých dílků konvergují stejnoměrně k 0, a limita součtů příslušných k těmto dělením.

Jestliže jsou limity pro všechny takovéto posloupnosti dělení stejné, definuje se tato limita jako křivkový integrál funkce $f$ přes křivku $C$.

Pro formální smysl této definice je pouze třeba, aby křivka měla konečnou délku.

Pro spojité funkce na po částech hladkých křivkách dávají obě definice stejný integrál.

Křivkový integrál prvního druhu má velice blízko k známé integraci reálné funkce.

Až na tu odmocninu ...

**3.** Bylo možné definovat křivkový integrál jen pro hladké křivky a pak dodefinovat křivkový integrál pro po částech hladké křivky jako součet křivkových integrálů přes jednotlivé hladké křivky.

Křivkové integrály se také většinou počítají jako součet přes „hezké" kousky křivek, např. u hranice obdélníku se sečtou integrály přes jednotlivé úsečky.

**4.** Je zřejmé, jak se definice křivkového integrálu 1.druhu přepíše pro prostorové křivky:

$$\int_C f(s)\ \mathrm{d}s = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t), \tau(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \tau'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Stejně tak i uvedená Pozorování a předchozí poznámky platí beze změny pro prostorové křivky.

Konec poznámek 2.

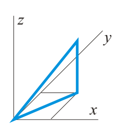
Příklady 2:

**1.** Spočtěte křivkový integrál 1.druhu funkce $x + y$ přes obvod trojúhelníka s vrcholy $(0,0), (1,0), (1,1)$. Uvědomte si, že nezáleží na tom, v jakém směru budete brát strany trojúhelníka.

**2.** Spočtěte křivkový integrál 1.druhu funkce $xy$ přes hranici elipsy $x^2/4 + y^2 = 1$ v 1.kvadrantu, a to jak pomocí uvedeného vyjádření křivky jako grafu funkce, tak pomocí parametrického vyjádření $x = 2\cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi/2]$. [14/9]

S tou odmocninou to bylo o chlup . . .

**3.** Vypočtěte křivkový integrál 1.druhu funkce $x - 3y^2 + z$ přes obvod prostorového trojúhelníka s vrcholy $(0,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$.




Konec příkladů 2.

Otázky 2:

**1.** Ukažte, že křivkový integrál 1.druhu z funkce identicky rovné 1 je roven délce křivky.

**2.** Dokažte uvedená Pozorování, zvláště pečlivě druhé a třetí (i pro prostorové křivky).

**3.** Dokažte pomocí substituční věty, že křivkový integrál 1.druhu nezávisí na ekvivalentním popisu křivky (viz *Poznámky 1* pro ekvivalenci křivek).

**4.** Vysvětlete, proč se změní znaménko u integrace na intervalu, jestliže se interval „obrátí", tj. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, ale znaménko se nezmění u křivkového integrálu 1.druhu, jestliže se křivka „obrátí", tj. $\int_C f(s)\ \mathrm{d}s = \int_{-C} f(s)\ \mathrm{d}s$.

Malý hint: $\int_{-C}$ se opět rozepíše na $\int_a^b$, jenom funkce parametrizující křivku $-C$ bude jiná: např. obrazy bodů $a$ a $b$ se prohodí.

Kdo má zájem? Je to lahůdka.

**5*.** Dokažte (podobným způsobem jako rovnost Riemannova a Newtonova integrálu), že pro spojité funkce a hladké křivky je definice křivkového integrálu 1.druhu uvedené v textu ekvivalentní definici uvedené v *Poznámkách*.

Je to tak. Vím to.

**6.** V posledním tvrzení Pozorování je číslo na pravé straně konečné, pokud je $f$ po částech spojitá na $C$.

**7.** Ukažte, že křivkový integrál 1.druhu přes bod (tj., křivku, kde příslušné funkce v parametrickém zadání jsou konstantní) je roven 0.

Konstantní křivka mne dojímá ...

Konec otázek 2.

Cvičení 2:

Příklad. Vypočítejte integrál funkce $f(x,y) = x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}$ definované na křivce $L$ dané vztahem $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, kde $a > 0$.

Napřed jenom koukejte. Až to už nepůjde, zkuste přemýšlet. Až to už nepůjde, tak to spočítáme "raz-dva".

Řešení. Křivku lze parametrizovat tímto způsobem

$$\varphi(t) = a^3 \cos^3 t, \quad \psi(t) = a^3 \sin^3 t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Na to jsem nepomyslel, ale vypadá to fikaně.

Při derivování podle času $t$ mají fyzici rádi, když se používají tečky a dvojtečky:

Potom

$$\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) = 9a^6 \sin^2 t \cos^2 t.$$

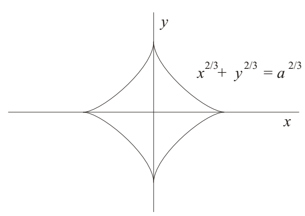
Můžeme tedy psát

$$\int_L x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t)\sqrt{9a^6 \sin^2 t \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \cdots = 4a^7.$$

Když se chci líbit nějaké fyzičce, musím ty tečky taky dělat?

Ten příklad mi dal největší práci při vymýšlení zadání tak, aby to šlo spočítat. Slibuji, že se příště nebudu tolik snažit …

A to si napřed nechal poradit. Ještě že má u koho.




Myslím se svoje …

Konec cvičení 2.

# KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU

V praxi se vyskytují úlohy typu: spočtěte, jaká práce byla vykonána lokomotivou při jízdě vlaku po křivé dráze proti větru.

Pokud vlak jede chvíli proti větru, chvíli po větru, může nakonec vyjít nula.

A když se jede na okružní cestu okolo oka hurikánu je vhodné zvolit správný směr ;-)

Zkusíme roviný případ.

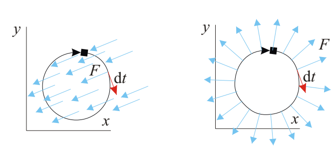
Počítáme práci, tedy sílu krát dráhu.

Síla i křivka jsou v tomto případě „dvojrozměrné", síla je vektor a křivka je popsána svými tečnými vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{t} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$.

Práce je skalární součin síly a tečného vektoru dráhy.

V praxi je jasné, jaký má vektor tečny směr. V obecném případě to zřejmé není a je nutné tento směr nejdříve zadat, tj. křivku je nutné orientovat.

Základní zajímavé případy jsou na obrázku:



V prvním případě i v druhém případě se celková práce rovná nule.

Ale krom toho je spousta nezajímavých případů, které se musejí upočítat ...

Z uvedené motivace výpočtu práce se nabízí následující definice.

**DEFINICE.** Nechť je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka $C$ funkcemi $\varphi, \psi$ na intervalu $[a, b]$ a funkce $f$ na $C$ s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ se souřadnicemi $(f_1, f_2)$.
Pak se definuje křivkový integrál 2.druhu funkce $f$ podle křivky $C$ jako

$$\int_C \mathbf{f}(s) . \,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_C \big(f_1(x,y)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y)\,\mathrm{dy}\big) = \int_a^b \big(f_1(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_2(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big)\,\mathrm{dt}\,.$$

První dva integrály jsou ekvivalentní formy zápisu křivkového integrálu 2.druhu, třetí integrál je jeho definice pomocí obyčejného integrálu reálné funkce jedné proměnné na intervalu.

To si promyslete. Děkuji.

Následující základní vlastnosti křivkového integrálu 2.druhu se opět snadno dokazují. Všimněte si rozdílu oproti křivkovému integrálu 1.druhu u předposlední vlastnosti.

**POZOROVÁNÍ.** Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany.

1. $\int_C (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) . \,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \alpha \int_C \mathbf{f} . \,\mathrm{d}\boldsymbol{t} + \beta \int_C \mathbf{g} . \,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$;
2. $\int_{C_1 + C_2} \mathbf{f} . \,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{C_1} \mathbf{f} . \,\mathrm{d}\boldsymbol{t} + \int_{C_2} \mathbf{f} . \,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$;
3. $\int_{-C} \mathbf{f} . \,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = - \int_C \mathbf{f} . \,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$;

Pozor, třetí vlastnost je jiná!

Následující tvrzení uvádí vztah mezi oběma křivkovými integrály.

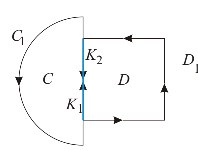
**POZOROVÁNÍ.**

$$\int_C (f_1(x,y)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y)\,\mathrm{dy}) = \int_C (f_1(s)\cos\alpha(s) + f_2(s)\sin\alpha(s))\ \mathrm{d}s\,,$$

kde $\alpha(s)$ je úhel, který svírá tečný vektor k $C$ v bodě $s$ s osou $x$.

Následující úvaha se často používá:

Nechť $C, D$ jsou dvě různé jednoduše uzavřené kladně orientované po částech hladké křivky, které se protínají v křivce $K$. Pak $C$ je spojením dvou orientovaných křivek $C_1, K_1$ a podobně $D$ je spojením dvou orientovaných křivek $D_1, K_2$ (v pořadí podle orientace), kde $K_1$ a $K_2$ je křivka $K$ s odlišnými orientacemi. Spojení $C_1 + D_1$ je pak kladně orientovaná uzavřená po částech hladká křivka.




**POZOROVÁNÍ.** Je-li $f$ funkce $C + D \to \mathbb{R}^2$, pak

$$\int_{C+D} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{C_1+D_1} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}\,.$$

U křivkových integrálů je třeba mít oči otevřené.

Poznámky 3:

Podobně jako u křivkového integrálu 1.druhu lze i křivkový integrál 2.druhu zadefinovat pomocí limit „Riemannových" součtů a to i na nehladké křivce.

Ve většině praktických situací stačí definice uvedená v textu pro po částech hladké křivky.

Navíc je nutné dodat, že výpočet integrálu pomocí limit součtů je v praktických příkladech těžko proveditelný.

Naše definice jsou nejhezčí. Jsem prostě taková.

Uvedeným přístupem pomocí limit součtů se většinou definují obě části integrálu zvlášť, tj. integrály $\int_C f_1(x,y)\,\mathrm{d}x$ a $\int_C f_2(x,y)\,\mathrm{d}y$. Tím se ztrácí jejich vektorový charakter.

Definuje-li se křivkový integrál pomocí skalárního součinu vektorů, snadno se z tohoto přístupu získá $\int_C f_1(x,y)\,\mathrm{d}x$ jako speciální případ, kdy funkce $f = (f_1, f_2)$ má druhou složku $f_2$ nulovou. Podobně pro integrál $\int_C f_2(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Není nad sladké vektory.

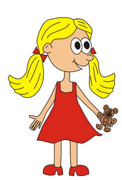
Jestliže si pod křivkovým integrálem 2.druhu představíte práci vykonanou po dané křivce vektorem $(f_1, f_2)$, říká Pozorování 2, že práce vykonaná na několika spojených křivkách je součtem prací vykonaných na jednotlivých křivkách.

Obrátí-li se směr křivky, je zřejmé, že se změní znaménko výsledku práce.

Mám rád zápornou práci. Ke kladné práci se stavím raději záporně.

Uvedený vztah křivkového integrálu 2.druhu k integrálu 1.druhu se může zdát těžko použitelný. Někdy je však jednoduché popsat $\cos\alpha(s)$ i $\sin\alpha(s)$ a spočítat pak křivkový integrál 1.druhu.

Hodně si kreslete a můžete být překvapeni.



Hodně si kreslím a jsem pořád překvapená.

Přenos definice a Pozorování z roviny do prostoru je zcela formální, přidáním třetí proměnné.

První a třetí Pozorování jsou v textu již formulována nezávisle na dimenzi.

Uvědomte si, že třetí Pozorování neplatí pro křivkové integrály 1.druhu (najděte příklad.)

Jednou jsem byl na pozorování …

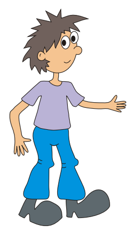
Konec poznámek 3.

Příklady 3:

**1.** Spočtěte křivkový integrál 2.druhu z funkce $(-y^2, xy)$ po obvodu čtverce s vrcholy $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$.

**2.** Spočtěte křivkový integrál 2.druhu z funkce $(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ po kružnici o poloměru $r$ se středem v počátku.

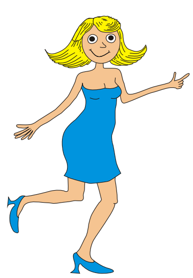
**3.** Spočtěte křivkový integrál 2.druhu z funkce $(yz, z\sqrt{r^2-y^2}, xy)$ po části šroubovice $x = r\cos t, y = r\sin t, z = 2t, t \in [0, 2\pi]$. Použijte vyjádření integrálu pomocí křivkového integrálu 1.druhu.



Šroubovice je asi zašroubovaná slivovice …

Ne. BTW, jednou jsem makal jak šroub.

**4.** Spočtěte integrál $\int_C (y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z)$ přes křivku $x = a\cos^2 t, y = a\sqrt{2}\sin t\cos t, z = a\sin^2 t$.



SMYSL to nedává ani mně, ale spočítat to umím.

Mám rád SMYSLné křivky.

**5.** Spočtěte integrál z předchozího příkladu přes křivku, která je průnikem dvou ploch: $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2=a^2\}, \{(x,y,z); x+y+z=0\}$. Zkuste různé možnosti (např. dosazení za jednu proměnnou z druhé podmínky, nalezení parametrického vyjádření, ...).

Konec příkladů 3.

Otázky 3:

**1.** Dokažte všechny vlastnosti Pozorování, zvláště pečlivě položky 2 a 3. Kde se projeví v definici křivkového integrálu 2.druhu (tj. ve třetím integrálu v definici) změna orientace křivky?

**2.** Dokažte druhé Pozorování o vztahu obou křivkových integrálů (použijte výpočet kosinu a sinu z trojúhelníku s odvěsnami $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$).

Pomocí tohoto vztahu a odhadu křivkového integrálu 1.druhu dokažte znovu 3. tvrzení prvního Pozorování.

**3.** Ukažte, že pro funkci $f = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$ je výsledkem integrálu $\int_C \mathbf{f} . \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ délka křivky $C$.

**4.** Zformulujte definici křivkového integrálu 2.druhu pro prostorovou křivku a funkci $f = (f_1, f_2, f_3)$.

**5.** Zformulujte druhé Pozorování o vztahu obou křivkových integrálů pro prostor a dokažte jej.

**6.** Zapište křivkový integrál 2.druhu pro případ, kdy druhá složka $f_2$ funkce $f$ je nulová a křivka $C$ je grafem funkce $g$ na intervalu $[a,b]$.

Tady tuším čertovinu ...

**7.** Dokažte poslední Pozorování.

To je jednoduché, není-liž pravda?

Já zažil jedno SUPERprolínání.

**8.** Ukažte, že křivkový integrál 2.druhu přes bod (tj., křivku, kde příslušné funkce v parametrickém zadání jsou konstantní) je roven 0.

A pak že matematici nedovedou počítat něco užitečného.

To jsem jednou strašně moc chtěl pracovat, ale nemohl jsem se pohnout z místa. Nezaplatili mi to ...

Konec otázek 3.

Cvičení 3: Příklad. Vypočtěte integrál

$$\int_L (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka $L$ je spojením křivek $L_1, L_2, L_3$ daných parametrizacemi

$$L_1: \quad \varphi(t) = \cos t,\ \psi(t) = \sin t,\ \tau(t) = 0, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$L_2: \quad \varphi(t) = 0,\ \psi(t) = \sin t,\ \tau(t) = \cos t, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$L_3: \quad \varphi(t) = \cos(\pi t),\ \psi(t) = 0,\ \tau(t) = \sin(\pi t), \quad t \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

BTW, nevíte kdo vymyslel ta spletitá řecká písmenka?

Řešení. Nejdříve spočteme integrály (2. druhu) po křivkách $L_1, L_2, L_3$.

$$\begin{aligned}\int_{L_1} (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x \quad &+ \quad (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin^2 t(-\sin t) + (-\cos^2 t)\cos t + (\cos^2 t - \sin^2 t)0\Big)\ \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(-\sin^3 t - \cos^3 t\Big)\,dt = \cdots = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Podobně zjistíme, že

$$\int_{L_2} (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z = -\frac{4}{3}$$

a

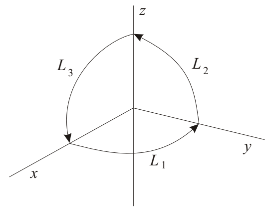
$$\int_{L_3} (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z = -\frac{4}{3}.$$

Celkový výsledek tedy bude

$$\int_{L} (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -4.$$

Bylo to takhle: HOP, HOP a HOP.

HOP já rád.

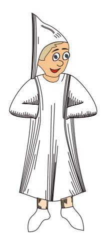



Konec cvičení 3.

# GREENOVA VĚTA

Základní věta analýzy říká, že na hranici množiny poznáme, co uvnitř dělala derivace.

Vím a znám. $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.



Vím a znám se lehce řekne, v rovině to byla fuška zařídit.

Já si toho považuji. Jsem poctěna přízní skřítků.

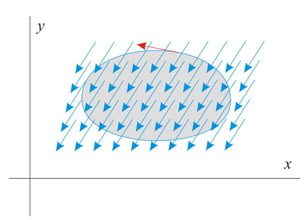
Křivkový integrál 2.druhu po uzavřené křivce se často značí symbolem $\oint$ a chápe se přes kladnou orientaci křivky (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček).

Následující velmi důležitá věta uvádí vztah mezi křivkovým integrálem 2.druhu po jednoduše uzavřené křivce a integrálem přes vnitřek této křivky.

**VĚTA.** (Green) Nechť $H$ je otevřená množina v rovině obsahující jednoduše uzavřenou křivku $C$ i s jejím vnitřkem $\iota C$ a $f = (f_1, f_2)$ je funkce $H \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace na $H$. Pak platí

$$\oint_C (f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y) = \int_{\iota C} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Greenova věta mimo jiné říká, že integrál 2. druhu po uzavřené křivce přes konstantní vektorovou funkci (vítr) je roven plošnému integrálu přes nulovou funkci (žádné víry, tornáda a podobně), tedy nule.




Taky tak se chová déšť. Kolik mi napršeno do spacáku, tolik vyteklo.

**Důkaz.** V případě, že $C$ je obvod obdélníku s vrcholy $(a, c), (b, c), (b, d), (a, d)$, je důkaz snadný, protože podle definic příslušných integrálů je

$$\oint_C (f_1(x, y)\,\mathrm{dx} + f_2(x, y)\,\mathrm{dy}) = \int_a^b f_1(x, c)\,\mathrm{dx} + \int_c^d f_2(b, y)\,\mathrm{dy} - \int_a^b f_1(x, d)\,\mathrm{dx} - \int_c^d f_2(a, y)\,\mathrm{dy}$$

a

$$\int_{\iota C} \Big( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \;=\int_c^d \big(f_2(b, y) - f_2(a, y)\big)\,\mathrm{dy} - \int_a^b \big(f_1(x, d)\,\mathrm{dx} - f_1(x, c)\big)\,\mathrm{dx}$$

a obě pravé strany jsou stejné.

Podle posledního Pozorování z předchozí části o křivkových integrálech 2.druhu platí tedy Greenův vzorec i pro konečná sjednocení nepřekrývajících se obdélníků v $H$, jejichž hranici tvoří lomená čára, která je uzavřená.

Nyní si stačí uvědomit (musí se to ovšem přesně dokázat), že lze najít takovouto lomenou čáru $D$ libovolně blízko křivky $C$ v tom smyslu, že jak křivkové integrály přes $C$ a přes $D$ se budou lišit nejvýše o předem dané $\varepsilon > 0$, tak integrály přes $\iota C$ a přes ono sjednocení obdélníků se budou lišit nejvýše o $\varepsilon$. $\diamond$

Jestliže se v Greenově rovnosti místo funkce $(f_1, f_2)$ vezme funkce $(-f_2, f_1)$, dostává se vzorec

$$\oint_C (f_1(x, y)\,\mathrm{dy} - f_2(x, y)\,\mathrm{dx}) = \int_{iC} \Big( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Zde je v levém integrálu skalární součin $\mathbf{f}$ a normály k $C$, který se často značí jako $\mathbf{f}.\mathrm{d}\boldsymbol{n}$.

Dobře si promyslete předchozí důkaz.

Dali byste za něj ruku do ohně?

Přečtu si důkaz pro jistotu ještě jednou ...

Poznámky 4:

**1. Greenova věta v obecném tvaru**.

Greenovu větu lze zobecnit na konečný počet křivek. V tomto případě je ale jednodušší se na situaci dívat ne z hlediska křivek, ale z hlediska množin majících za hranici křivky.

Otevřená množina $G$ v rovině se nazývá souvislá, jestliže každé dva její body lze spojit lomenou čarou ležící v $G$.

Nechť $G$ je otevřená souvislá množina, která má za hranici $\partial G$ konečně mnoho disjunktních, jednoduše uzavřených křivek.

Jako příklad lze uvést otevřené mezikruží, nebo vnitřek elipsy s konečně mnoha kulatými „děrami".

Je-li $C$ jedna z uzavřených křivek tvořící hranici, pak orientace $C$ vzhledem ke $G$ se nazývá kladná v následujícím případě: stojíte-li na křivce tváří v jejím kladném směru, máte $G$ po levé straně.

U mezikruží je tedy kladný směr vnější kružnice proti směru pohybu hodinových ručiček, u vnitřní kružnice je tomu opačně.

Jezdil jsem jako kaskadér s autem po hranici střechy mrakodrapu a držel jsem kladnou orientaci.

Mám volant vlevo. Šlo to snadno.

Pro zjednodušení zápisu bude pro jednoduché množiny $G$ značit $\oint_{\partial G}$ součet součet křivkových integrálů 2.druhu přes jednotlivé uzavřené křivky hranice, brané s kladnou orientací vzhledem ke $G$.

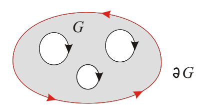
To je šikovný zápis. Musí se ale zapojit všechny části hranice.

**VĚTA.** (Greenova věta v obecném tvaru)

Nechť $G$ je otevřená souvislá množina, která má za hranici konečně mnoho disjunktních, jednoduše uzavřených křivek a $H$ otevřená množina obsahující $G \cup \partial G$.

Nechť $f = (f_1, f_2)$ je funkce $\overline{H} \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace. Pak platí

$$\oint_{\partial G} (f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y) = \int_G \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$




Stejně jako u základní verze Greenovy věty lze vzorec psát ve tvaru

$$\oint_{\partial G} (f_1(x,y)\,\mathrm{d}y - f_2(x,y)\,\mathrm{d}x) = \int_G \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

**2.** Greenova věta má přirozené fyzikální vysvětlení, které bude podrobněji uvedeno v kapitole o vektorových funkcích.

Např. v druhé formulaci znamená integrál skalárního součinu vektoru $\mathbf{f}$ na křivce $C$ s normálou křivky tok vektoru křivkou $C$ (např. tok kapaliny).

Dvojrozměrný integrál znamená, kolik kapaliny uvnitř křivky přibylo nebo se ztratilo.

Takže opět například, pokud bude tok všude stejný, uvnitř křivky ať už bude jakákoliv, bude kapaliny pořád stejně.

**3.** Greenův vzorec lze použít i pro neuzavřené křivky, pokud takovou křivku vhodně doplníme na uzavřenou.

Slovo „vhodně" tu pak znamená, že můžeme snadno spočítat integrál přes tuto doplněnou křivku i dvojrozměrný integrál přes vzniklý vnitřek uzavřené křivky.

**4.** V první formulaci Greenova vzorce je křivkový integrál uveden podle definice a je to tedy integrál ze skalárního součinu vektoru funkce a tečného vektoru.

Ve druhé formulaci je to křivkový integrál ze skalárního součinu vektoru funkce a normálového vektoru křivky.

Zobecnění Greenovy věty z roviny do prostoru se může týkat jednak křivek v prostoru, jednak ploch v prostoru. Hladká křivka v prostoru nemá obecně normálový vektor, ale má jednoznačně určené tečné vektory; proto se na tento případ zobecňuje první varianta Greenova vzorce.

Naopak plocha (orientovaná) nemá jednoznačně určené tečné vektory ale má normálový vektor v každém bodě, proto se pro tento případ zobecňuje druhá varianta Greenova vzorce.

To pro případ, kdy by $G$ mohla být třeba krychle a $\partial G$ by bylo šest jejich stěn.

Konec poznámek 4.

Příklady 4:

**1.** Přepočtěte křivkové integrály z prvních dvou *Příkladů* předchozí části pomocí Greenovy věty.

**2.** Použijte Greenův vzorec na mezikruží $\{(x,y); r < x^2+y^2 < R\}$, kde $0 \le r < R$ pro funkci $(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ (viz předchozí příklad).

Dovedete vysvětlit, k jakým problémům došlo? A proč?

**3.** Spočtěte integrál $\int_C (xy^2\,\mathrm{d}x - yx^2\,\mathrm{d}y)$ přes horní jednotkovou polokružnici doplněním této polokružnice buď na kružnici nebo spojením úsečkou obou koncových bodů, pak použijte Greenův vzorec.

Co bude jednodušší?

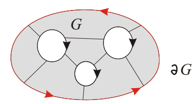
**4.** Ověřte platnost Greenova vzorce na funkci $((x+y)^2, x^2+y^2)$ a obvodu trojúhelníku s vrcholy $(1,1), (3,2), (2,5)$.

Konec příkladů 4.

Otázky 4:

Zkuste ukázat platnost Greenovy věty v obecném tvaru použitím následující úvahy:

Jednotlivé křivky hranice $\partial G$ se spojí disjunktními lomenými čarami (někdy stačí jednou čarou, někdy dvěma) tak, aby se vytvořily jednoduché uzavřené křivky, jejichž vnitřek pokrývá $G$ až na ony lomené čáry (ty nehrají žádnou roli při dvojrozměrné integraci).




Každou lomenou čáru proběhnete dvakrát, pokaždé v opačném směru, takže se při součtu křivkové integrály přes tyto křivky vyruší a zbude jen součet přes křivky hranice.

Takové obrázky jsem kreslil jako malý.

Konec otázek 4.

# POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ

Podíváte-li se nyní zpátky na popis délky křivky nebo na postup při zjišťování těžiště křivky, zjistíte, že vzorce z kapitoly 15-iap se dají přepsat pomocí křivkových integrálů 1.druhu.

Musím uznat, že to je šikovné. Už máme něco předem rozmyšleno. Vyplatilo se to.

Přemýšlím a marně vzpomínám, kdy přesně jsem to zapomněl.

**POZOROVÁNÍ.**

1. Délka po částech hladké křivky $C$ je rovna $\int_C \,\mathrm{d}s$.
2. Hmotnost tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky $C$, který má v bodě $s$ hustotu $h(s)$, je rovna $\int_C h(s)\,\mathrm{d}s$.

3. Těžiště tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky $C$, který má v bodě $s$ hustotu $h(s)$, má souřadnice $(T_x, T_y)$, kde ($m$ značí hmotnost drátu)

$$T_x = \frac{\int_C x h(s)\, \mathrm{d}s}{m}, \quad T_y = \frac{\int_C y h(s)\, \mathrm{d}s}{m}.$$

V integrálech se musí za $x, y, s$ dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je křivka $C$ popsána.
Čitatelé ve vzorcích pro těžiště drátu jsou (statické) momenty drátu vzhledem k osám $y$ nebo $x$ resp.

První dvě položky platí i v prostoru beze změny. Pro těžiště se přidá analogický třetí výraz pro $T_z$, což je moment křivky vzhledem k rovině $xy$.

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.
Nechť $G$ je jednoduchá množina. Její obsah je roven $\int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, tj. integrálu z funkce identicky rovné 1 na $G$. Aby bylo možné použít Greenův vzorec, musí se vzít takové funkce $f_1, f_2$ mající spojité parciální derivace na $\overline{G}$, aby $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$.
Nabízí se několik možností, např. $f_1(x,y) = x, f_2(x,y) = 0$, nebo naopak $f_1(x,y) = 0, f_2(x,y) = y$ anebo symetricky zvolené funkce $f_1(x,y) = x/2, f_2(x,y) = y/2$.

Tím se dostávají následující vzorce pro obsah $S(G)$ množiny $G$:

**POZOROVÁNÍ.**

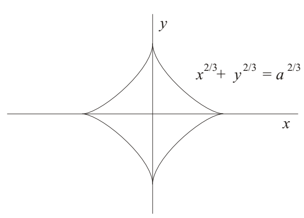
$$S(G) = \int_{\partial G} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial G} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial G} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

Příklady 5:

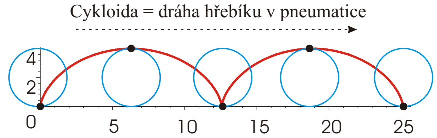
**1.** Spočtěte těžiště drátu tvaru polokružnice $\{(x,y); x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq)\}$ s hustotou $h(x,y) = 2 - y$.

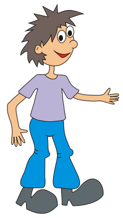
**2.** Spočtěte plochu elipsy pomocí křivkového integrálu.

**3.** Spočtěte plochu astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ pomocí křivkových integrálů.




**4.** Najděte těžiště cykloidy $x = (t - \sin t), y = (1 - \cos t), t \in [0, 4\pi]$.





Tak to jsem měl cykloidu i na autě.

Konec příkladů 5.

Cvičení 5: Příklad. Pomocí Greenovy věty určete obsah $|G|$ plochy $G$ uvnitř elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Řešení. Elipsu budeme parametrizovat modifikovanými polárními souřadnicemi

$$x = \varphi(t) = a\cos t, \quad y = \psi(t) = b\sin t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Zvolme funkci $f = (f_1, f_2)$, kde funkce jsou dány vztahy $f_1(x,y) = -y,\ f_2(x,y) = x$.

To jsem se naučil v baru "U tornáda".

Podle Greenovy věty dostáváme

$$\int_{\partial G} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_G \left( \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Jelikož

$$|G| = \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

hledaný obsah $|G|$ pak bude roven

$$|G| = \frac{1}{2}\int_{\partial G} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left((-b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t)(b\cos t)\right)\,\mathrm{d}t = \pi ab.$$

Ta $f$ mohla být i jiná. Ta jediné jsem podle GREENovy věty pochopil. Nejsem zelenáč.

Konec cvičení 5.

# STANDARDY z kapitoly

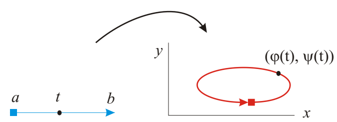
# KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY

## KŘIVKY

Křivka je spojitý obraz kompaktního intervalu $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\Phi$ je tedy $n$-tice spojitých reálných funkcí jedné proměnné definovaných na $[a, b]$. Křivka v rovině je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in [a, b]\}$.

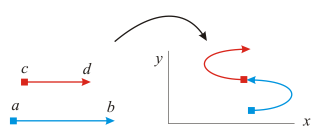
Křivka v prostoru je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi, \tau : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in [a, b]\}$.

Počáteční bod křivky je $\Phi(a)$, koncový bod je $\Phi(b)$ (pokud není orientace stanovena jinak – viz dále). Křivky, u kterých počáteční a koncový bod splývají, se nazývá *uzavřené*.




Nechť jsou dány dvě křivky $C_1, C_2$ definované funkcemi $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a $\Psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$, přičemž koncový bod křivky $C_1$ je počáteční bod křivky $C_2$, tj. $\Phi(b) = \Psi(c)$. Spojením obou křivek se rozumí křivka, značená jako $C_1 + C_2$, definovaná funkcí $T(t)$ na intervalu $[a, b + d - c]$ předpisem

$$T(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \text{pro } t \in [a, b]; \\ \Psi(t + c - b), & \text{pro } t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$




Je-li křivka $\Psi$ popsána parametricky funkcemi $\varphi, \psi$, řekneme, že $\Psi$ je hladká křivka, když:

1. funkce $\varphi, \psi$ mají spojité první derivace;
2. pro každé $t \in [a, b]$ je aspoň jedna z derivací $\varphi'(t), \psi'(t)$ nenulová;
3. každý bod křivky je obrazem jediného bodu z $[a, b]$ s jedinou možnou výjimkou: počáteční a koncový bod mohou splývat.

Po částech hladká křivka je křivka, která vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.

Nechť je po částech hladká křivka $C$ spojením křivek $C_1, C_2, ..., C_n$ v uvedeném pořadí. Křivka $C$ se nazývá jednoduše uzavřená, jestliže všechny křivky $C_i$ jsou navzájem disjunktní s jedinými výjimkami:
• počáteční bod křivky $C_1$ splývá s koncovým bodem křivky $C_n$
• počáteční bod křivky $C_{i+1}$ splývá s koncovým bodem křivky $C_i$ pro $i = 1..n - 1$.

Dá se dokázat, podobně jako u kružnice, že jednoduše uzavřená křivka $C$ dělí rovinu na dvě části: omezenou, tzv. *vnitřek* křivky $C$ (značený $\iota C$) a neomezenou, tzv. *vnějšek*.

V dalším textu bude potřeba orientace křivky, tj. určení kladného a záporného směru křivky. Je-li $C$ orientovaná křivka, značí $-C$ množinově tutéž křivku s opačnou orientací.

U křivky zadané pomocí funkce $\Phi$ na nějakém intervalu $[a, b]$ je kladná orientace dána (pokud není určeno jinak) tímto intervalem. Kladná orientace probíhá od bodu $\Phi(a)$ do bodu $\Phi(b)$, tj. podle rostoucího parametru.

Kladná orientace jednoduše uzavřené křivky (pokud nebude řečeno jinak) je proti směru pohybu hodinových ručiček. Přesněji řečeno: jdete-li po této křivce v kladném směru, máte její vnitřek po levé straně.

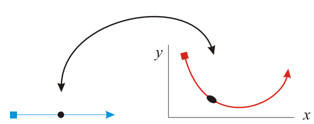
Příklad. Jakou prostorovou křivku představuje parametrické zadání

$$\varphi(t) = \sin t\,, \psi(t) = \cos(t)\,, \tau(t) = t\,, t \in [0, 2\pi]\,?$$

Je to šroubovice.

# KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU

Postup, jak počítat integrál funkce podle křivky je přirozený: křivka se narovná do úsečky a spočte se integrál z transformované funkce přes tuto úsečku.




Nechť je dána reálná funkce $f$ na po částech hladké křivce v rovině zadané parametricky funkcemi $\varphi$ a $\psi$ na intervalu $[a, b]$. Pak se definuje křivkový integrál 1.druhu funkce $f$ podél křivky $C$ jako

$$\int_C f(s)\ \mathrm{d}s = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Označme $\tau(t) = (\varphi'(t), \psi'(t))$ tečný vektor křivky v bodě. Pak substituujeme (velikost tečného vektoru je něco jako Jacobián):

$$s = (\varphi(t), \psi(t))$$

$$\mathrm{d}s = |(\varphi'(t), \psi'(t))|\,\mathrm{d}t = |\tau(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\int_C f(s)\ \mathrm{d}s = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))\,|\tau(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Pro prostorové křivky se pracuje se třemi složkami

$$\int_C f(s)\ \mathrm{d}s = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t), \tau(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \tau'^2(t)}\, \mathrm{d}t\,.$$

Příklad. Spočtěte křivkový integrál 1.druhu funkce $x+y$ přes obvod trojúhelníka s vrcholy $(0,0), (1,0), (1,1)$.

Příklad. Nechť je dána reálná funkce $H$ na hladké křivce $C = [0,1]$ (jde o jednotkový interval na reálné ose).
Nechť jsou dány dvě parametrizace $\varphi : [\alpha, \beta] \to C$ a $f : [a,b] \to C$ s rostoucími funkcemi $\varphi$ a $f$.
Pak

$$\int_C H(s)\ \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta H(\varphi(\tau))\sqrt{\varphi'^2(\tau)}\ \mathrm{d}\tau\ = \int_\alpha^\beta H(\varphi(\tau))\ \varphi'(\tau)\ \mathrm{d}\tau\,.$$

Podobně

$$\int_C H(s)\ \mathrm{d}s = \int_a^b H(f(t))\sqrt{f'^2(t)}\, \mathrm{d}t\ = \int_a^b H(f(t))\ f'(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Dokažte, že se jedná o stejný výsledek při obou parametrizacích.
Řešení. Použijeme substituci $\tau = \varphi^{-1}(f(t))$. Pak

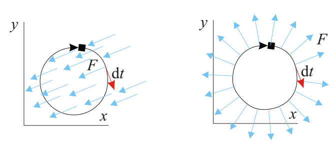
$$\int_\alpha^\beta H(\varphi(\tau))\ \varphi'(\tau)\ \mathrm{d}\tau\ =$$

$$= \int_a^b H(\varphi(\varphi^{-1}(f(t))))\varphi'(\varphi^{-1}(f(t)))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(f(t)))}\ f'(t)\, \mathrm{d}t\ =$$

$$= \int_a^b H(f(t))\ f'(t)\, \mathrm{d}t$$

A je to.

# KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU




**DEFINICE.** Nechť je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka $C$ funkcemi $\varphi, \psi$ na intervalu $[a,b]$ a funkce $f$ na $C$ s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ se souřadnicemi $(f_1, f_2)$.
Pak se definuje křivkový integrál 2.druhu funkce $f$ podle křivky $C$ jako

$$\int_C \mathbf{f}(s).\, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_C \big(f_1(x,y)\, \mathrm{d}x + f_2(x,y)\, \mathrm{d}y\big) = \int_a^b \big(f_1(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_2(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\big)\, \mathrm{d}t\,.$$

První dva integrály jsou ekvivalentní formy zápisu křivkového integrálu 2.druhu, třetí integrál je jeho definice pomocí obyčejného integrálu reálné funkce jedné proměnné na intervalu.
Bude-li funkce $f$ s hodnotami v rovině nebo prostoru chápána jako vektor, bude se též značit tučně jako $\mathbf{f}$.

Pro křivku uvažujeme bod křivky jako vektor $\boldsymbol{t}(t) = (x(t), y(t))$. Pak formálně získáme vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{t} = (\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y)$. Zde $\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t = \varphi'(t)$ a $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t = \psi'(t)$, odtud vyjádříme $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ a použijeme následně substituci ve tvaru

$$\mathrm{d}\boldsymbol{t} = (\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y) = (\varphi'(t), \psi'(t))\, \mathrm{d}t = \tau\, \mathrm{d}t\,.$$

Tedy

$$\mathbf{t} = (\varphi(t), \psi(t))$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{t} = (\varphi'(t), \psi'(t))\,\mathrm{dt} = \tau(t)\,\mathrm{dt}$$

$$\int_C f(s).\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t)).\tau(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Kdykoliv potřebujeme nahradíme $\mathrm{dx}$ za $\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$ a podobně $\mathrm{dy}$ za $\psi'(t)\,\mathrm{dt}$. Podobně $\mathrm{d}\boldsymbol{t} = (\mathrm{dx}, \mathrm{dy})$.

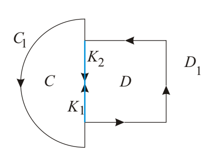
**POZOROVÁNÍ.** Pokud má smysl pravá strana tak platí.

$$\int_{-C} \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = -\int_C \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}\,.$$

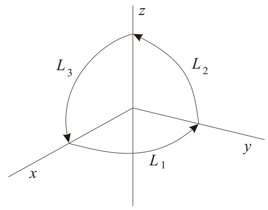
To je důležité pro příklady.

**POZOROVÁNÍ.** Je-li $f$ funkce $C + D \to \mathbb{R}^2$, pak

$$\int_{C+D} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{C_1+D_1} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}\,.$$




Příklad. Spočtěte křivkový integrál 2.druhu z funkce $(-y^2, xy)$ po obvodu čtverce s vrcholy $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$.
Příklad. Spočtěte integrál $\int_C (y\,\mathrm{dx} + z\,\mathrm{dy} + x\,\mathrm{dz})$ přes vhodnou křivku.
Příklad. Zintegrujte konstantní vektorové pole přes uzavřenou křivku na obrázku.




# GREENOVA VĚTA

Jde o rovinnou verzi základní věty analýzy.

$$\int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x \ = \ f(b) - f(a)\ .$$

Křivkový integrál 2.druhu po uzavřené křivce se často značí symbolem $\oint$ a chápe se přes kladnou orientaci křivky (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček).

**VĚTA.** (Green) Nechť $H$ je otevřená množina v rovině obsahující jednoduše uzavřenou křivku $C$ i s jejím vnitřkem $\iota C$ a $f = (f_1, f_2)$ je funkce $H \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace na $H$. Pak platí

$$\oint_C (f_1(x,y)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y)\,\mathrm{dy}) = \int_{\iota C} \Big( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

**Důkaz.** V případě, že $C$ je obvod obdélníku s vrcholy $(a,c), (b,c), (b,d), (a,d)$, je důkaz snadný, protože podle definic příslušných integrálů je

$$\oint_C (f_1(x,y)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y)\,\mathrm{dy}) = \int_a^b f_1(x,c)\,\mathrm{dx} + \int_c^d f_2(b,y)\,\mathrm{dy} - \int_a^b f_1(x,d)\,\mathrm{dx} - \int_c^d f_2(a,y)\,\mathrm{dy}$$

a

$$\int_{\iota C} \Big( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \ = \int_c^d \big(f_2(b,y) - f_2(a,y)\big)\,\mathrm{dy} - \int_a^b \big(f_1(x,d)\,\mathrm{dx} - f_1(x,c)\big)\,\mathrm{dx}$$

a obě pravé strany jsou stejné.

$\diamond$

Greenovu větu lze psát

$$\oint_C \mathbf{f}.\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \oint_C (f_1(x,y)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y)\,\mathrm{dy}) = \int_{\iota C} \Big( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Na levé straně se integruje ve skutečnosti skalární součin funkce $\mathbf{f}$ a tečného vektoru $\boldsymbol{\tau} = (\mathrm{dx}, \mathrm{dy})$ ke křivce $C$. Na pravé straně se integruje rotace vektorové funkce.
Jestliže se Greenova rovnost použije na pomocnou funkci $(-f_2, f_1)$, dostává se vzorec

$$\oint_C \mathbf{f}.\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \oint_C (f_1(x,y)\,\mathrm{dy} - f_2(x,y)\,\mathrm{dx}) = \int_{iC} \Big( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

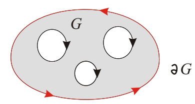
Na levé straně se integruje ve skutečnosti skalární součin funkce $\mathbf{f}$ a normály $\boldsymbol{n} = (\,\mathrm{dy}, -\,\mathrm{dx})$ ke křivce $C$, značíme analogicky $\mathbf{f}.\mathrm{d}\boldsymbol{n}$. Na pravé straně se integruje divergence vektorové funkce.

**VĚTA.** (Greenova věta v obecném tvaru)

Nechť $G$ je otevřená souvislá množina, která má za hranici konečně mnoho disjunktních, jednoduše uzavřených křivek a $H$ otevřená množina obsahující $G \cup \partial G$.

Nechť $f = (f_1, f_2)$ je funkce $\overline{H} \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace. Pak platí

$$\oint_{\partial G} (f_1(x,y)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y)\,\mathrm{dy}) = \int_G \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$




Stejně jako u základní verze Greenovy věty lze vzorec psát ve tvaru

$$\oint_{\partial G} (f_1(x,y)\,\mathrm{dy} - f_2(x,y)\,\mathrm{dx}) = \int_G \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Příklad. Použijte Greenův vzorec na mezikruží $\{(x,y); r < x^2 + y^2 < R\}$, kde $0 \le r < R$ pro funkci $(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.

# POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ

**POZOROVÁNÍ.**

1. Délka po částech hladké křivky $C$ je rovna $\int_C \,\mathrm{d}s$.
2. Hmotnost tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky $C$, který má v bodě $s$ hustotu $h(s)$, je rovna $\int_C h(s)\,\mathrm{d}s$.
3. Těžiště tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky $C$, který má v bodě $s$ hustotu $h(s)$, má souřadnice $(T_x, T_y)$, kde ($m$ značí hmotnost drátu)

$$T_x = \frac{\int_C xh(s)\,\mathrm{d}s}{m}\,, \quad T_y = \frac{\int_C yh(s)\,\mathrm{d}s}{m}\,.$$

V integrálech se musí za $x, y, s$ dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je křivka $C$ popsána.

Čitatelé ve vzorcích pro těžiště drátu jsou (statické) momenty drátu vzhledem k osám $y$ nebo $x$ resp. První dvě položky platí i v prostoru beze změny. Pro těžiště se přidá analogický třetí výraz pro $T_z$, což je moment křivky vzhledem k rovině $xy$.

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.

Nechť $G$ je jednoduchá množina. Její obsah je roven $\int_G \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, tj. integrálu z funkce identicky rovné 1 na $G$. Aby bylo možné použít Greenův vzorec, musí se vzít takové funkce $f_1, f_2$ mající spojité parciální derivace na $\overline{G}$, aby $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$.

Nabízí se několik možností, např. $f_1(x,y) = x, f_2(x,y) = 0$, nebo naopak $f_1(x,y) = 0, f_2(x,y) = y$ anebo symetricky zvolené funkce $f_1(x,y) = x/2, f_2(x,y) = y/2$.

**POZOROVÁNÍ.**

$$S(G) = \int_{\partial G} x\,\mathrm{dy} = -\int_{\partial G} y\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_{\partial G} (x\,\mathrm{dy} - y\,\mathrm{dx})\,.$$

Příklad. Spočtěte plochu elipsy pomocí křivkového integrálu.

Řešení. Pomocí Greenovy věty určíme obsah $|G|$ plochy $G$ uvnitř elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elipsu budeme parametrizovat modifikovanými polárními souřadnicemi

$$x = \varphi(t) = a\cos t, \quad y = \psi(t) = b\sin t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Zvolme funkci $f = (f_1, f_2)$, kde funkce jsou dány vztahy $f_1(x,y) = -y,\ f_2(x,y) = x$.
Podle Greenovy věty dostáváme

$$\int_{\partial G} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_G \left(\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_G \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Jelikož

$$|G| = \int_G \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

hledaný obsah $|G|$ pak bude roven

$$|G| = \frac{1}{2}\int_{\partial G} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left((-b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t)(b\cos t)\right)\,\mathrm{d}t = \pi ab.$$

Příklad.
Najděte těžiště cykloidy $x = (t - \sin t), y = (1 - \cos t), t \in [0, 4\pi]$.