KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY

Má-li se spočítat např. spotřeba betonu na rovný plot s měnící se výškou, stačí spočítat integrál z této výšky podle základny plotu.

Co když je ale základnou plotu nikoli rovná úsečka, ale křivá čára?

Podobný problém vzniká, má-li se spočítat práce vykonaná působením síly po nějaké křivé dráze.

Nejdříve bude nutné se podrobněji podívat na pojmy týkající se křivek. Jsou to většinou pojmy z diferenciální geometrie a není možné v tomto textu všechny potřebné pojmy podrobně probrat.

KŘIVKY

Křivka může být zadána různými způsoby. Nejobvyklejší zadání (a pokud nebude řečeno jinak, právě toto zadání bude použito) je jako spojitý obraz kompaktního intervalu z $\mathbb{R}$. Jedná se vlastně o parametrické zadání, protože spojité zobrazení $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je n-tice spojitých reálných funkcí jedné proměnné definovaných na $[a, b]$.

Křivka v rovině je tedy popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in [a, b]\}$.

Křivka v prostoru je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi, \tau : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in [a, b]\}$.

Počáteční bod křivky je $\Phi(a)$, koncový bod je $\Phi(b)$ (pokud není orientace stanovena jinak – viz dále). Křivky, u kterých počáteční a koncový bod splývají, se nazývá *uzavřené*.

Např. elipsa, lemniskata (tj. „ležatá osmička"), obvod obdélníku jsou uzavřené křivky.

Graf funkce jedné proměnné nejsou uzavřené křivky.

Nechť jsou dány dvě křivky C_1, C_2 definované funkcemi $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a $\Psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$, přičemž koncový bod křivky C_1 je počáteční bod křivky C_2, tj. $\Phi(b) = \Psi(c)$. Spojením obou křivek se rozumí křivka, značená jako $C_1 + C_2$, definovaná funkcí $T(t)$ na intervalu $[a, b + d - c]$ předpisem

$$T(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \text{pro } t \in [a, b]; \\ \Psi(t + c - b), & \text{pro } t \in [b, b + d - c]. \end{cases} .$$

Je zřejmé, jak se definuje spojení tří a více křivek.

V dalším textu bude používán pojem hladká křivka. Je-li křivka popsána parametricky funkcemi φ, ψ, znamená to:

1. funkce φ, ψ mají spojité první derivace;
2. pro každé $t \in [a, b]$ je aspoň jedna z derivací $\varphi'(t), \psi'(t)$ nenulová;
3. každý bod křivky je obrazem jediného bodu z $[a, b]$ s jedinou možnou výjimkou: počáteční a koncový bod mohou splývat.

Například oblouk, elipsa, graf spojité funkce mající spojitou derivaci na kompaktním intervalu, jsou hladké křivky. Lemniskata není hladkou křivkou.

Po částech hladká křivka je křivka, která vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.

Například lemniskata, asteroida, cykloida, obvod obdélníku, jsou po částech hladké křivky.

Příklad lemniskaty dává příklad uzavřené křivky, která však má nepříjemný bod. V mnoha případech lze tuto nepříjemnost obejít, pro jednoduchost ji však vyloučíme v definici jednoduše uzavřené křivky.

Nechť je po částech hladká křivka C spojením křivek $C_1, C_2, ..., C_n$ v uvedeném pořadí. Křivka C se nazývá jednoduše uzavřená, jestliže všechny křivky C_i jsou navzájem disjunktní s jedinými výjimkami:
• počáteční bod křivky C_1 splývá s koncovým bodem křivky C_n
• počáteční bod křivky C_{i+1} splývá s koncovým bodem křivky C_i pro $i = 1..n - 1$.

Dá se dokázat, podobně jako u kružnice, že jednoduše uzavřená křivka C dělí rovinu na dvě části: omezenou, tzv. *vnitřek* křivky C (značený ιC) a neomezenou, tzv. *vnějšek*.

V dalším textu bude potřeba orientace křivky, tj. určení kladného a záporného směru křivky. Je-li C orientovaná křivka, značí $-C$ množinově tutéž křivku s opačnou orientací.

U křivky zadané pomocí funkce Φ na nějakém intervalu $[a, b]$ je kladná orientace dána (pokud není určeno jinak) tímto intervalem. Kladná orientace probíhá od bodu $\Phi(a)$ do bodu $\Phi(b)$, tj. podle rostoucího parametru.

Kladná orientace jednoduše uzavřené křivky (pokud nebude řečeno jinak) je proti směru pohybu hodinových ručiček. Přesněji řečeno: jdete-li po této křivce v kladném směru, máte její vnitřek po levé straně.

Tečný vektor u orientovaných hladkých křivek bude označován tučně, např. $\mathrm{d}\boldsymbol{t}$. Bude-li funkce f s hodnotami v rovině nebo prostoru chápána jako vektor, bude se též značit tučně jako $\mathbf{f}$.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU

Tak jako u reálných funkcí na $\mathbb{R}$ dává integrál z funkce identicky rovné 1 délku (míru) množiny, přes kterou se integruje, měl by křivkový integrál z identické 1 přes křivku C dávat délku křivky C.

V kapitole o použití integrálu se délka křivky vypočítala jako $\int_C \mathrm{d}s$, kde $\mathrm{d}s$ symbolicky značilo délku maličké části křivky, která se dala považovat za úsečku, takže se spočítala z Pythagorovy věty pomocí $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$.

V souladu s tímto značením se bude integrál funkce f podél křivky C značit $\int_C f(s)\ \mathrm{d}s$, kde s jsou body křivky C.

Způsob, jakým byla délka křivky počítána, naznačuje, jak se bude počítat křivkový integrál.

Za chvíli bude probírán jiný přístup integrování funkcí podle křivky. Oba způsoby se odliší v názvu jako první a druhý druh.

Následující definice je vhodná pro výpočty v praxi se vyskytujících případů, ale požaduje po částech hladké křivky.

DEFINICE. Nechť je dána reálná funkce f na po částech hladké křivce v rovině zadané parametricky funkcemi φ a ψ na intervalu $[a, b]$. Pak se definuje křivkový integrál 1.druhu funkce f podél křivky C jako

$$\int_C f(s)\ \mathrm{d}s = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany, poslední nerovnost platí, pokud existuje levá strana.

1. $\int_C (\alpha f(s) + \beta g(s))\ \mathrm{d}s = \alpha \int_C f(s)\ \mathrm{d}s + \beta \int_C g(s)\ \mathrm{d}s$;
2. $\int_{C_1+C_2} f(s)\ \mathrm{d}s = \int_{C_1} f(s)\ \mathrm{d}s + \int_{C_2} f(s)\ \mathrm{d}s$;
3. $\int_{-C} f(s)\ \mathrm{d}s = \int_C f(s)\ \mathrm{d}s$;
4. $|\int_C f(s)\ \mathrm{d}s| \le L(C) \max_{s\in C} |f(s)|$, kde $L(C)$ je délka křivky C.

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU

V praxi se vyskytují úlohy typu: spočtěte, jaká práce byla vykonána lokomotivou při jízdě vlaku po křivé dráze proti větru.

Zkusíme roviný případ.

Počítáme práci, tedy sílu krát dráhu.

Síla i křivka jsou v tomto případě „dvojrozměrné", síla je vektor a křivka je popsána svými tečnými vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{t} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$.

Práce je skalární součin síly a tečného vektoru dráhy.

V praxi je jasné, jaký má vektor tečny směr. V obecném případě to zřejmé není a je nutné tento směr nejdříve zadat, tj. křivku je nutné orientovat.

Z uvedené motivace výpočtu práce se nabízí následující definice.

DEFINICE. Nechť je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka C funkcemi φ, ψ na intervalu $[a, b]$ a funkce f na C s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ se souřadnicemi (f_1, f_2).

Pak se definuje křivkový integrál 2.druhu funkce f podle křivky C jako

$$\int_C \mathbf{f}(s).\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_C \big(f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y\big) = \int_a^b \big(f_1(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_2(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

První dva integrály jsou ekvivalentní formy zápisu křivkového integrálu 2.druhu, třetí integrál je jeho definice pomocí obyčejného integrálu reálné funkce jedné proměnné na intervalu.

Následující základní vlastnosti křivkového integrálu 2.druhu se opět snadno dokazují. Všimněte si rozdílu oproti křivkovému integrálu 1.druhu u předposlední vlastnosti.

POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany.

1. $\int_C(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}).\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \alpha\int_C \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} + \beta\int_C \mathbf{g}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$;
2. $\int_{C_1+C_2}\mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{C_1}\mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} + \int_{C_2}\mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$;
3. $\int_{-C}\mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = -\int_C \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$;

Následující tvrzení uvádí vztah mezi oběma křivkovými integrály.

POZOROVÁNÍ.

$$\int_C (f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y) = \int_C (f_1(s)\cos\alpha(s) + f_2(s)\sin\alpha(s))\ \mathrm{d}s\,,$$

kde $\alpha(s)$ je úhel, který svírá tečný vektor k C v bodě s s osou x.

Nechť C, D jsou dvě různé jednoduše uzavřené kladně orientované po částech hladké křivky, které se protínají v křivce K. Pak C je spojením dvou orientovaných křivek C_1, K_1 a podobně D je spojením dvou orientovaných křivek D_1, K_2 (v pořadí podle orientace), kde K_1 a K_2 je křivka K s odlišnými orientacemi. Spojení $C_1 + D_1$ je pak kladně orientovaná uzavřená po částech hladká křivka.

POZOROVÁNÍ. Je-li f funkce $C + D \to \mathbb{R}^2$, pak

$$\int_{C+D} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{C_1+D_1} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}\,.$$

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3

GREENOVA VĚTA

Křivkový integrál 2.druhu po uzavřené křivce se často značí symbolem $\oint$ a chápe se přes kladnou orientaci křivky (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček).

VĚTA. (Green) Nechť H je otevřená množina v rovině obsahující jednoduše uzavřenou křivku C i s jejím vnitřkem ιC a $f = (f_1, f_2)$ je funkce $H \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace na H. Pak platí

$$\oint_C (f_1(x,y)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y)\,\mathrm{dy}) = \int_{\iota C} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Jestliže se v Greenově rovnosti místo funkce (f_1, f_2) vezme funkce $(-f_2, f_1)$, dostává se vzorec

$$\oint_C (f_1(x,y)\,\mathrm{dy} - f_2(x,y)\,\mathrm{dx}) = \int_{iC} \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Zde je v levém integrálu skalární součin $\mathbf{f}$ a normály k C, který se často značí jako $\mathbf{f}.\mathrm{d}\boldsymbol{n}$.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ

Podíváte-li se nyní zpátky na popis délky křivky nebo na postup při zjišťování těžiště křivky, zjistíte, že vzorce z kapitoly 15-iap se dají přepsat pomocí křivkových integrálů 1.druhu.

POZOROVÁNÍ.

1. Délka po částech hladké křivky C je rovna $\int_C \,\mathrm{d}s$.
2. Hmotnost tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C, který má v bodě s hustotu $h(s)$, je rovna $\int_C h(s)\,\mathrm{d}s$.
3. Těžiště tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C, který má v bodě s hustotu $h(s)$, má souřadnice (T_x, T_y), kde (m značí hmotnost drátu)

$$T_x = \frac{\int_C xh(s)\,\mathrm{d}s}{m}\,, \quad T_y = \frac{\int_C yh(s)\,\mathrm{d}s}{m}\,.$$

V integrálech se musí za x, y, s dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je křivka C popsána.

Čitatelé ve vzorcích pro těžiště drátu jsou (statické) momenty drátu vzhledem k osám y nebo x resp.

První dvě položky platí i v prostoru beze změny. Pro těžiště se přidá analogický třetí výraz pro T_z, což je moment křivky vzhledem k rovině xy.

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.

Nechť G je jednoduchá množina. Její obsah je roven $\int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, tj. integrálu z funkce identicky rovné 1 na G. Aby bylo možné použít Greenův vzorec, musí se vzít takové funkce f_1, f_2 mající spojité parciální derivace na $\overline{G}$, aby $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$.

Nabízí se několik možností, např. $f_1(x,y) = x, f_2(x,y) = 0$, nebo naopak $f_1(x,y) = 0, f_2(x,y) = y$ anebo symetricky zvolené funkce $f_1(x,y) = x/2, f_2(x,y) = y/2$.

POZOROVÁNÍ.

$$S(G) = \int_{\partial G} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial G} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial G} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\,.$$

Příklady 5 Cvičení 5

STANDARDY z kapitoly

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY

KŘIVKY

Křivka je spojitý obraz kompaktního intervalu $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, Φ je tedy n-tice spojitých reálných funkcí jedné proměnné definovaných na $[a,b]$. Křivka v rovině je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in [a,b]\}$.

Křivka v prostoru je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi, \tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in [a,b]\}$.

Počáteční bod křivky je $\Phi(a)$, koncový bod je $\Phi(b)$ (pokud není orientace stanovena jinak – viz dále). Křivky, u kterých počáteční a koncový bod splývají, se nazývá *uzavřené*.

Nechť jsou dány dvě křivky C_1, C_2 definované funkcemi $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a $\Psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$, přičemž koncový bod křivky C_1 je počáteční bod křivky C_2, tj. $\Phi(b) = \Psi(c)$. Spojením obou křivek se rozumí křivka, značená jako $C_1 + C_2$, definovaná funkcí $T(t)$ na intervalu $[a, b+d-c]$ předpisem

$$T(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \text{pro } t \in [a,b]; \\ \Psi(t+c-b), & \text{pro } t \in [b, b+d-c]. \end{cases}\ .$$

Je-li křivka Ψ popsána parametricky funkcemi φ, ψ, řekneme, že Ψ je hladká křivka, když:

1. funkce φ, ψ mají spojité první derivace;
2. pro každé $t \in [a,b]$ je aspoň jedna z derivací $\varphi'(t), \psi'(t)$ nenulová;
3. každý bod křivky je obrazem jediného bodu z $[a,b]$ s jedinou možnou výjimkou: počáteční a koncový bod mohou splývat.

Po částech hladká křivka je křivka, která vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.

Nechť je po částech hladká křivka C spojením křivek $C_1, C_2, ..., C_n$ v uvedeném pořadí. Křivka C se nazývá jednoduše uzavřená, jestliže všechny křivky C_i jsou navzájem disjunktní s jedinými výjimkami:
• počáteční bod křivky C_1 splývá s koncovým bodem křivky C_n
• počáteční bod křivky C_{i+1} splývá s koncovým bodem křivky C_i pro $i = 1..n-1$.

Dá se dokázat, podobně jako u kružnice, že jednoduše uzavřená křivka C dělí rovinu na dvě části: omezenou, tzv. *vnitřek* křivky C (značený ιC) a neomezenou, tzv. *vnějšek*.

V dalším textu bude potřeba orientace křivky, tj. určení kladného a záporného směru křivky. Je-li C orientovaná křivka, značí $-C$ množinově tutéž křivku s opačnou orientací.

U křivky zadané pomocí funkce Φ na nějakém intervalu $[a, b]$ je kladná orientace dána (pokud není určeno jinak) tímto intervalem. Kladná orientace probíhá od bodu $\Phi(a)$ do bodu $\Phi(b)$, tj. podle rostoucího parametru.

Kladná orientace jednoduše uzavřené křivky (pokud nebude řečeno jinak) je proti směru pohybu hodinových ručiček. Přesněji řečeno: jdete-li po této křivce v kladném směru, máte její vnitřek po levé straně.

Příklad. Jakou prostorovou křivku představuje parametrické zadání

$$\varphi(t) = \sin t\,, \psi(t) = \cos(t)\,, \tau(t) = t\,, t \in [0, 2\pi]\,?$$

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU

Nechť je dána reálná funkce f na po částech hladké křivce v rovině zadané parametricky funkcemi φ a ψ na intervalu $[a, b]$. Pak se definuje křivkový integrál 1.druhu funkce f podél křivky C jako

$$\int_C f(s)\ \mathrm{d}s = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Označme $\tau(t) = (\varphi'(t), \psi'(t))$ tečný vektor křivky v bodě. Pak substituujeme (velikost tečného vektoru je něco jako Jacobián):

$$s = (\varphi(t), \psi(t))$$

$$\mathrm{d}s = |(\varphi'(t), \psi'(t))|\,\mathrm{d}t = |\tau(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\int_C f(s)\ \mathrm{d}s = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))\,|\tau(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Pro prostorové křivky se pracuje se třemi složkami

$$\int_C f(s)\ \mathrm{d}s = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t), \tau(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \tau'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Příklad. Spočtěte křivkový integrál 1.druhu funkce $x+y$ přes obvod trojúhelníka s vrcholy $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$.

Příklad. Nechť je dána reálná funkce H na hladké křivce $C = [0, 1]$ (jde o jednotkový interval na reálné ose). Nechť jsou dány dvě parametrizace $\varphi : [\alpha, \beta] \to C$ a $f : [a, b] \to C$ s rostoucími funkcemi φ a f.
Pak

$$\int_C H(s)\ \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta H(\varphi(\tau))\sqrt{\varphi'^2(\tau)}\ \mathrm{d}\tau\ = \int_\alpha^\beta H(\varphi(\tau))\ \varphi'(\tau)\ \mathrm{d}\tau\,.$$

Podobně

$$\int_C H(s)\ \mathrm{d}s = \int_a^b H(f(t))\sqrt{f'^2(t)}\,\mathrm{d}t\ = \int_a^b H(f(t))\ f'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dokažte, že se jedná o stejný výsledek při obou parametrizacích.

Řešení. Použijeme substituci $\tau = \varphi^{-1}(f(t))$. Pak

$$\int_\alpha^\beta H(\varphi(\tau))\ \varphi'(\tau)\ \mathrm{d}\tau\ =$$

$$= \int_a^b H(\varphi(\varphi^{-1}(f(t))))\varphi'(\varphi^{-1}(f(t)))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(f(t)))}\ f'(t)\,\mathrm{d}t\ =$$

$$= \int_a^b H(f(t))\, f'(t)\,\mathrm{d}t$$

A je to.

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU

DEFINICE. Nechť je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka C funkcemi φ, ψ na intervalu $[a, b]$ a funkce f na C s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ se souřadnicemi (f_1, f_2).

Pak se definuje křivkový integrál 2.druhu funkce f podle křivky C jako

$$\int_C \mathbf{f}(s).\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_C \big(f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y\big) = \int_a^b \big(f_1(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_2(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

První dva integrály jsou ekvivalentní formy zápisu křivkového integrálu 2.druhu, třetí integrál je jeho definice pomocí obyčejného integrálu reálné funkce jedné proměnné na intervalu.

Bude-li funkce f s hodnotami v rovině nebo prostoru chápána jako vektor, bude se též značit tučně jako $\mathbf{f}$.

Pro křivku uvažujeme bod křivky jako vektor $\boldsymbol{t}(t) = (x(t), y(t))$. Pak formálně získáme vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{t} = (\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}y)$. Zde $\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t = \varphi'(t)$ a $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t = \psi'(t)$, odtud vyjádříme $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ a použijeme následně substituci ve tvaru

$$\mathrm{d}\boldsymbol{t} = (\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}y) = (\varphi'(t), \psi'(t))\,\mathrm{d}t = \tau\,\mathrm{d}t\,.$$

Tedy

$$\mathbf{t} = (\varphi(t), \psi(t))$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{t} = (\varphi'(t), \psi'(t))\,\mathrm{d}t = \tau(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_C f(s).\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t)).\tau(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

POZOROVÁNÍ. Pokud má smysl pravá strana tak platí.

$$\int_{-C} \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = -\int_C \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}\,.$$

POZOROVÁNÍ. Je-li f funkce $C + D \to \mathbb{R}^2$, pak

$$\int_{C+D} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{C_1+D_1} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}\,.$$

Příklad. Spočtěte křivkový integrál 2.druhu z funkce $(-y^2, xy)$ po obvodu čtverce s vrcholy $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$.

Příklad. Spočtěte integrál $\int_C (y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z)$ přes vhodnou křivku.

Příklad. Zintegrujte konstantní vektorové pole přes uzavřenou křivku na obrázku.

GREENOVA VĚTA

$$\int_a^b f'(x)\;\mathrm{d}x \;=\; f(b) - f(a)\,.$$

Křivkový integrál 2.druhu po uzavřené křivce se často značí symbolem $\oint$ a chápe se přes kladnou orientaci křivky (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček).

VĚTA. (Green) Nechť H je otevřená množina v rovině obsahující jednoduše uzavřenou křivku C i s jejím vnitřkem ιC a $f = (f_1, f_2)$ je funkce $H \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace na H. Pak platí

$$\oint_C (f_1(x, y)\,\mathrm{d}x + f_2(x, y)\,\mathrm{d}y) = \int_{\iota C} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Greenovu větu lze psát

$$\oint_C \mathbf{f}.\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \oint_C (f_1(x, y)\,\mathrm{d}x + f_2(x, y)\,\mathrm{d}y) = \int_{\iota C} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Na levé straně se integruje ve skutečnosti skalární součin funkce $\mathbf{f}$ a tečného vektoru $\boldsymbol{\tau} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ ke křivce C. Na pravé straně se integruje rotace vektorové funkce.

Jestliže se Greenova rovnost použije na pomocnou funkci $(-f_2, f_1)$, dostává se vzorec

$$\oint_C \mathbf{f}.\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \oint_C (f_1(x, y)\,\mathrm{d}y - f_2(x, y)\,\mathrm{d}x) = \int_{iC} \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Na levé straně se integruje ve skutečnosti skalární součin funkce $\mathbf{f}$ a normály $\boldsymbol{n} = (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x)$ ke křivce C, značíme analogicky $\mathbf{f}.\mathrm{d}\boldsymbol{n}$. Na pravé straně se integruje divergence vektorové funkce.

VĚTA. (Greenova věta v obecném tvaru)

Nechť G je otevřená souvislá množina, která má za hranici konečně mnoho disjunktních, jednoduše uzavřených křivek a H otevřená množina obsahující $G \cup \partial G$.

Nechť $f = (f_1, f_2)$ je funkce $\overline{H} \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace. Pak platí

$$\oint_{\partial G} (f_1(x, y)\,\mathrm{d}x + f_2(x, y)\,\mathrm{d}y) = \int_G \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Stejně jako u základní verze Greenovy věty lze vzorec psát ve tvaru

$$\oint_{\partial G} (f_1(x, y)\,\mathrm{d}y - f_2(x, y)\,\mathrm{d}x) = \int_G \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Příklad. Použijte Greenův vzorec na mezikruží $\{(x, y); r < x^2 + y^2 < R\}$, kde $0 \le r < R$ pro funkci $(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.

POUŽITÍ KŘIVKOVÝCH INTEGRÁLŮ

POZOROVÁNÍ.

1. Délka po částech hladké křivky C je rovna $\int_C \,\mathrm{d}s$.
2. Hmotnost tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C, který má v bodě s hustotu $h(s)$, je rovna $\int_C h(s)\,\mathrm{d}s$.
3. Těžiště tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C, který má v bodě s hustotu $h(s)$, má souřadnice (T_x, T_y), kde (m značí hmotnost drátu)

$$T_x = \frac{\int_C xh(s)\,\mathrm{d}s}{m}\,, \quad T_y = \frac{\int_C yh(s)\,\mathrm{d}s}{m}\,.$$

V integrálech se musí za x, y, s dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je křivka C popsána.

Čitatelé ve vzorcích pro těžiště drátu jsou (statické) momenty drátu vzhledem k osám y nebo x resp.

První dvě položky platí i v prostoru beze změny. Pro těžiště se přidá analogický třetí výraz pro T_z, což je moment křivky vzhledem k rovině xy.

Na základě Greenovy věty lze nyní uvést nové vzorce pro výpočet obsahu některých rovinných množin.

Nechť G je jednoduchá množina. Její obsah je roven $\int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, tj. integrálu z funkce identicky rovné 1 na G. Aby bylo možné použít Greenův vzorec, musí se vzít takové funkce f_1, f_2 mající spojité parciální derivace na $\overline{G}$, aby $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$.

Nabízí se několik možností, např. $f_1(x,y) = x$, $f_2(x,y) = 0$, nebo naopak $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = y$ anebo symetricky zvolené funkce $f_1(x,y) = x/2$, $f_2(x,y) = y/2$.

POZOROVÁNÍ.

$$S(G) = \int_{\partial G} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial G} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial G} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\,.$$

Příklad. Spočtěte plochu elipsy pomocí křivkového integrálu.

Řešení. Pomocí Greenovy věty určíme obsah $|G|$ plochy G uvnitř elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elipsu budeme parametrizovat modifikovanými polárními souřadnicemi

$$x = \varphi(t) = a\cos t, \quad y = \psi(t) = b\sin t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Zvolme funkci $f = (f_1, f_2)$, kde funkce jsou dány vztahy $f_1(x,y) = -y,\ f_2(x,y) = x$.
Podle Greenovy věty dostáváme

$$\int_{\partial G} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_G \left(\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Jelikož

$$|G| = \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

hledaný obsah $|G|$ pak bude roven

$$|G| = \frac{1}{2}\int_{\partial G} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} ((-b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t)(b\cos t))\,\mathrm{d}t = \pi ab.$$

Příklad.
Najděte těžiště cykloidy $x = (t - \sin t), y = (1 - \cos t), t \in [0, 4\pi]$.