

PLOŠNÉ INTEGRÁLY



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY



V praxi se vyskytuje potřeba integrovat funkce nejen podle křivých čar, ale i podle křivých ploch (např. přes povrch koule).



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY



V praxi se vyskytuje potřeba integrovat funkce nejen podle křivých čar, ale i podle křivých ploch (např. přes povrch koule).



Před definicí plošných integrálů je nutné se zmínit o plochách, které se budou používat.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY



V praxi se vyskytuje potřeba integrovat funkce nejen podle křivých čar, ale i podle křivých ploch (např. přes povrch koule).



Před definicí plošných integrálů je nutné se zmínit o plochách, které se budou používat.



Plochy jsou značně náročnější na definice a charakterizace než křivky, na což v tomto textu není místo.

LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Podrobnosti lze nalézt v učebnici diferenciální geometrie.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podrobnosti lze nalézt v učebnici diferenciální geometrie.



Na plochy chodím s placaticí, ta uvolňuje představivost.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOCHY



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOCHY



Plochy v prostoru, které byly zatím hlavně používány, byly grafy funkcí dvou proměnných.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOCHY



Plochy v prostoru, které byly zatím hlavně používány, byly grafy funkcí dvou proměnných.



To je, stejně jako u křivek, speciální případ zadání plochy parametricky, nebo speciální případ zadání plochy funkcí tří proměnných (tj., jako množina bodů splňujících rovnost $g(x, y, z) = 0$ pro nějakou spojitou funkci g , obvykle mající spojitě parciální derivace).



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOCHY



Plochy v prostoru, které byly zatím hlavně používány, byly grafy funkcí dvou proměnných.



To je, stejně jako u křivek, speciální případ zadání plochy parametricky, nebo speciální případ zadání plochy funkcí tří proměnných (tj., jako množina bodů splňujících rovnost $g(x, y, z) = 0$ pro nějakou spojitou funkci g , obvykle mající spojitě parciální derivace).



Důraz bude v dalším textu dán na parametrické zadání. Pro jednoduchost představy se bude v definici zadání plochy předpokládat omezený interval.

LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9





Parametrizace je vlastně udělání dvojrozměrného plánu.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

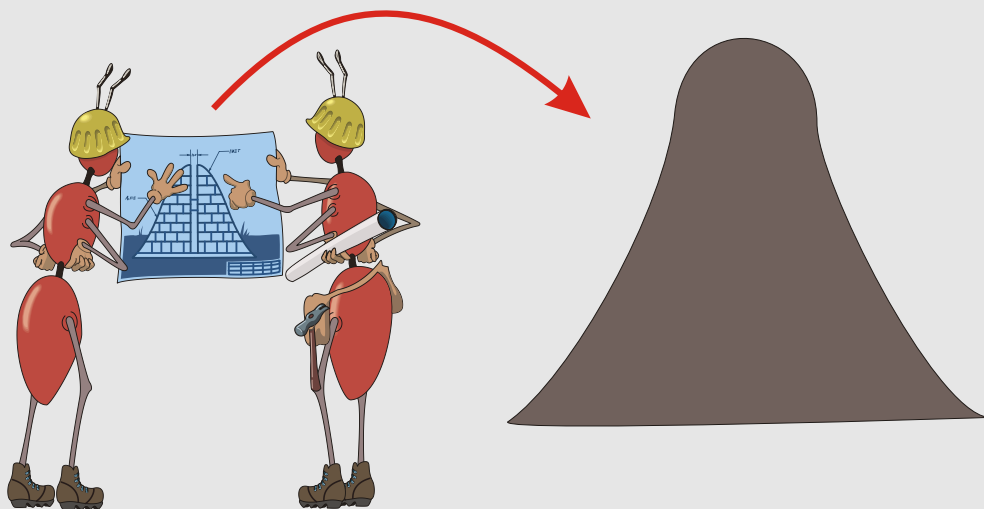
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Parametrizace je vlastně udělání dvojrozměrného plánu.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Takhle se dělají mapy.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

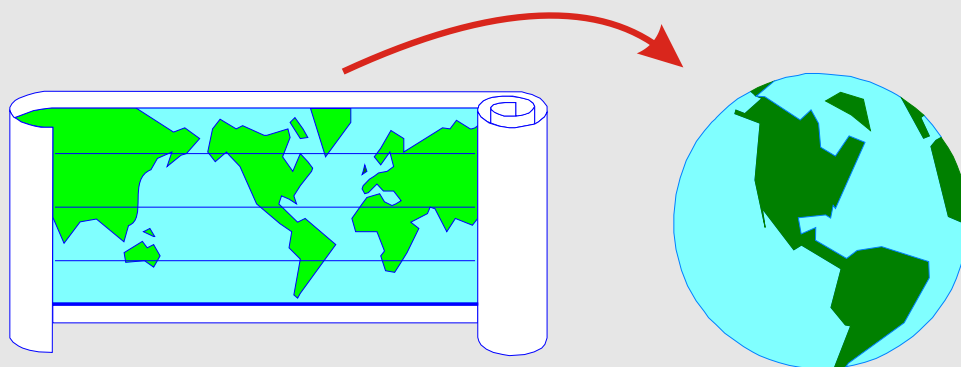
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Takhle se dělají mapy.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Válcové souřadnice dělají
válcové mapy. A ty jsou
vlastně rovinné.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Musí se vlastně daná plocha
"osahat".



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

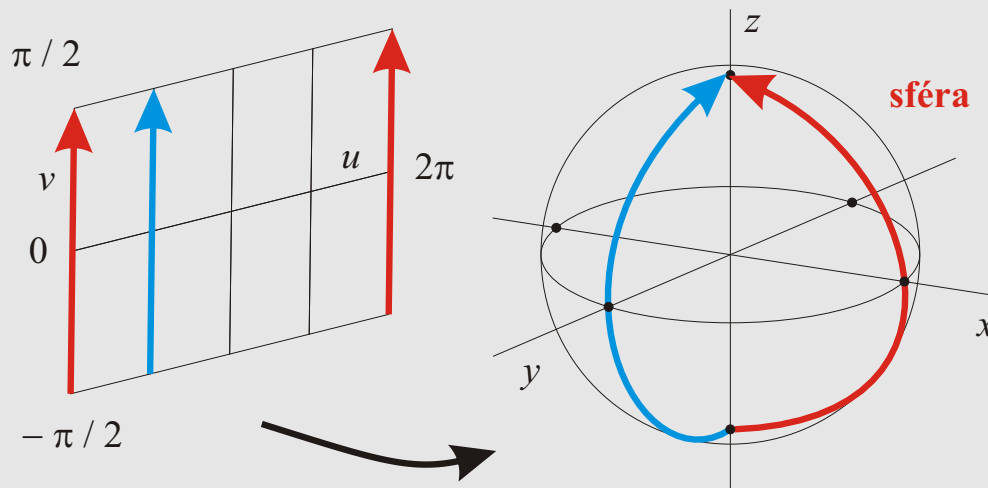
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Musí se vlastně daná plocha "osahat".



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

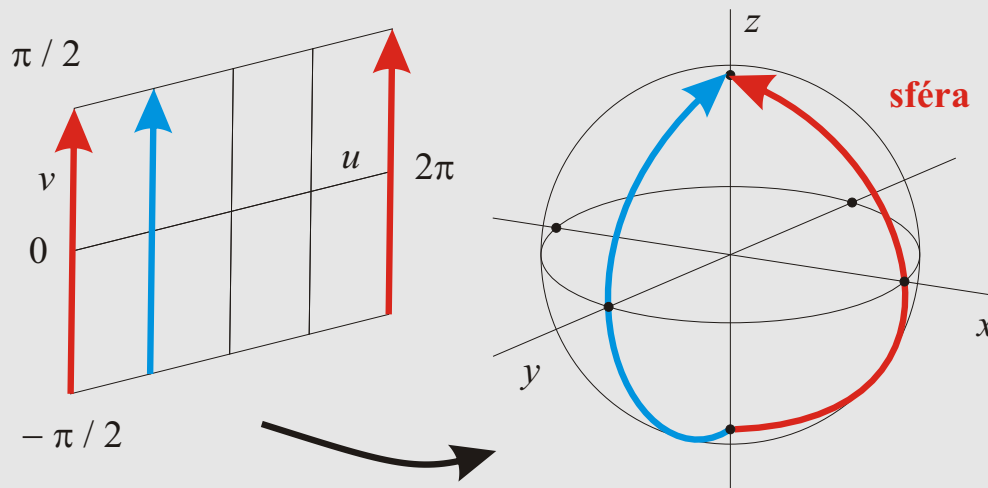
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Musí se vlastně daná plocha "osahat".



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde zase o zobrazení. Těch už jsem viděl ...



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin. uzavřená
plocha

orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Plocha je množina $\{(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)); (u, v) \in I\}$, kde $\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Plocha je množina $\{(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)); (u, v) \in I\}$, kde $\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.



Předchozí plocha se nazývá *uzavřená*, jestliže I je uzavřený a všechny body z hranice I se zobrazí do jediného bodu.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Plocha je množina $\{(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)); (u, v) \in I\}$, kde $\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.



Předchozí plocha se nazývá *uzavřená*, jestliže I je uzavřený a všechny body z hranice I se zobrazí do jediného bodu.



Teď není čas na slova.
Máchejte ručičkama, člo-
víčkové, ať je ta plocha
opravdu vidět.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Plocha je množina $\{(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)); (u, v) \in I\}$, kde $\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.



Předchozí plocha se nazývá *uzavřená*, jestliže I je uzavřený a všechny body z hranice I se zobrazí do jediného bodu.



Teď není čas na slova.
Máchejte ručičkama, člo-
víčkové, ať je ta plocha
opravdu vidět.



Kulová plocha je uzavřená, povrch kvádru je uzavřenou plochou, graf funkce dvou proměnných není uzavřenou plochou.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť P_1, P_2 jsou plochy zadané na intervalech I_1, I_2 resp., které mají společnou jednu svou stranu. **Spojení** ploch P_1, P_2 je pak jejich sjednocení definované na $I_1 \cup I_2$. Značí se $P_1 + P_2$.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť P_1, P_2 jsou plochy zadané na intervalech I_1, I_2 resp., které mají společnou jednu svou stranu. **Spojení** ploch P_1, P_2 je pak jejich sjednocení definované na $I_1 \cup I_2$. Značí se $P_1 + P_2$.



Indukcí lze tento pojem zavést pro spojení konečně mnoha ploch.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť P_1, P_2 jsou plochy zadané na intervalech I_1, I_2 resp., které mají společnou jednu svou stranu. **Spojení** ploch P_1, P_2 je pak jejich sjednocení definované na $I_1 \cup I_2$. Značí se $P_1 + P_2$.



Indukcí lze tento pojem zavést pro spojení konečně mnoha ploch.



Např. povrch kváдру vznikne postupným spojením všech obdélníků této plochy.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť P_1, P_2 jsou plochy zadané na intervalech I_1, I_2 resp., které mají společnou jednu svou stranu. **Spojení** ploch P_1, P_2 je pak jejich sjednocení definované na $I_1 \cup I_2$. Značí se $P_1 + P_2$.



Indukcí lze tento pojem zavést pro spojení konečně mnoha ploch.



Např. povrch kvádrů vznikne postupným spojením všech obdélníků této plochy.



Jednou jsem kvádro
opravdu takto spojoval.
Pohoda.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Povrch hrníčku s uchem vznikne spojením dvou vhodně deformovaných válcových ploch (bez podstav).



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Povrch hrníčku s uchem vznikne spojením dvou vhodně deformovaných válcových ploch (bez podstav).



To chce kafe!!!



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Povrch hrníčku s uchem vznikne spojením dvou vhodně deformovaných válcových ploch (bez podstav).



To chce kafe!!!



Nebude to dno chybět?

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedm.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Povrch sněhuláka vznikne spojením tří kulových ploch (případně vhodně zdeformovaných kvůli knoflíkům, nosu,...).



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Plocha zadaná parametry $\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)$ na intervalu I se nazývá **hladká**, jestliže platí:

1. funkce φ, ψ, τ mají spojité první parciální derivace na I ;
2. pro každé $(u, v) \in I$ má matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{pmatrix}$$

hodnost 2;

3. každý bod plochy je obrazem jediného bodu $(u, v) \in I$ s jedinou možnou výjimkou: obrazy bodů z hranice I mohou splývat.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Plocha zadaná parametry $\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)$ na intervalu I se nazývá **hladká**, jestliže platí:

1. funkce φ, ψ, τ mají spojité první parciální derivace na I ;
2. pro každé $(u, v) \in I$ má matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{pmatrix}$$

hodnost 2;

3. každý bod plochy je obrazem jediného bodu $(u, v) \in I$ s jedinou možnou výjimkou: obrazy bodů z hranice I mohou splývat.



Hladká plocha má body, kde je možné hladit, pánové.

LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Pro další část je důležitý pojem **kraj** plochy P .



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro další část je důležitý pojem **kraj** plochy P .



Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v \mathbb{R}^3 (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
plocha
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro další část je důležitý pojem **kraj** plochy P .



Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v \mathbb{R}^3 (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.



Pro představu si vezměte kruh, jakkoli položený v prostoru, třeba i zvlněný. Je jasné, co znamená kraj tohoto obrazce.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro další část je důležitý pojem **kraj** plochy P .



Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v \mathbb{R}^3 (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.



Pro představu si vezměte kruh, jakkoli položený v prostoru, třeba i zvlněný. Je jasné, co znamená kraj tohoto obrazce.



Oplatky jím od kraje. A ten tam je skoro až do konce.

LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Přesná definice je dost komplikovaná a nebude zde uváděna. V případech zde používaných bude intuitivně jasné, co kraj plochy znamená.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přesná definice je dost komplikovaná a nebude zde uváděna. V případech zde používaných bude intuitivně jasné, co kraj plochy znamená.

↓
Plocha s prázdným krajem je totéž, co uzavřená plocha.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přesná definice je dost komplikovaná a nebude zde uváděna. V případech zde používaných bude intuitivně jasné, co kraj plochy znamená.

↓
Plocha s prázdným krajem je totéž, co uzavřená plocha.



Kraj. Například kraj K . Tu mám ráda.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.



Příkladem je povrch krychle nebo válce, nebo „leporelo“, „sněhulák“ nebo lemniskata vynásobená úsečkou.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.



Příkladem je povrch krychle nebo válce, nebo „leporelo“, „sněhulák“ nebo lemniskata vynásobená úsečkou.



Povrch krychle nebo válce, i „sněhulák“, jsou příklady po částech hladké uzavřené plochy.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.



Příkladem je povrch krychle nebo válce, nebo „leporelo“, „sněhulák“ nebo lemniskata vynásobená úsečkou.



Povrch krychle nebo válce, i „sněhulák“, jsou příklady po částech hladké uzavřené plochy.



Každá po částech hladká plocha je parametricky zadaná reálnými spojitými funkcemi $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\tau(u, v)$, které jsou definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině, přičemž $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\tau(u, v)$ mají spojitě parciální derivace všude v I kromě konečně mnoha úseček.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.



Příkladem je povrch krychle nebo válce, nebo „leporelo“, „sněhulák“ nebo lemniskata vynásobená úsečkou.



Povrch krychle nebo válce, i „sněhulák“, jsou příklady po částech hladké uzavřené plochy.



Každá po částech hladká plocha je parametricky zadaná reálnými spojitými funkcemi $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\tau(u, v)$, které jsou definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině, přičemž $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\tau(u, v)$ mají spojitě parciální derivace všude v I kromě konečně mnoha úseček.



Průběžně zapojujte představivost.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podobně jako u křivek je vhodné dát název hezkým uzavřeným po částech hladkým plochám typu kulová plocha nebo povrch kvádrů.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podobně jako u křivek je vhodné dát název hezkým uzavřeným po částech hladkým plochám typu kulová plocha nebo povrch kvádrů.



Po částech hladká plocha P , parametricky zadaná zobrazením Φ na uzavřeném intervalu I , se nazývá **jednoduše uzavřená** jestliže Φ je prosté na vnitřku I , konstantní na hranici I s hodnotou různou od hodnot na vnitřku I .



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podobně jako u křivek je vhodné dát název hezkým uzavřeným po částech hladkým plochám typu kulová plocha nebo povrch kvádrů.



Po částech hladká plocha P , parametricky zadaná zobrazením Φ na uzavřeném intervalu I , se nazývá **jednoduše uzavřená** jestliže Φ je prosté na vnitřku I , konstantní na hranici I s hodnotou různou od hodnot na vnitřku I .



Jednoduše uzavřená plocha P rozděluje prostor na dvě souvislé části, jednu omezenou, zvanou vnitřek (značení ιP) a druhou neomezenou.



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

- Gauss-Ostrogradskij
- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak je to s orientací plochy?



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak je to s orientací plochy?



Orientace u křivky znamenalo zadat směr tečen ke křivce. U plochy nelze mluvit o směru tečen, ale o směru normál.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedm.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak je to s orientací plochy?



Orientace u křivky znamenalo zadat směr tečen ke křivce. U plochy nelze mluvit o směru tečen, ale o směru normál.



Orientace plochy znamená, že lze mluvit o dvou stranách plochy, jedna se označí za kladnou a druhá za zápornou.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedin.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

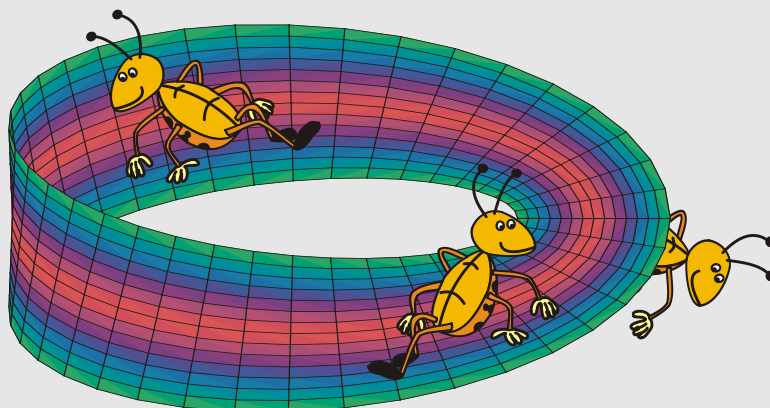
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ne všechny plochy lze orientovat – typickou neorientovatelnou plochou je Möbiův list.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.



Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Zkoušel jsem to na svém pásku a nevydržel.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Zkoušel jsem to na svém pásku a nevydržel.



Takže má dva kraje, které jsou totožné.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jdn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.



U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jeden.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.



U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.



U grafů funkcí dvou proměnných se za kladnou stranu bere horní strana.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.



U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.



U grafů funkcí dvou proměnných se za kladnou stranu bere horní strana.



Pokud se to poplete, vyjde
výsledek "až na znaménko".
Blahopřeji.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Mouchy dovedou chodit po
ploše zespodu. Mi se to ni-
kdy nepovedlo.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Orientace hladké plochy znamená, že v každém jejím bodě je určen směr normály a to spojitým způsobem: jestliže půjdete po jednoduše uzavřené křivce na dané ploše, musíte dojít do výchozího bodu ve stejné poloze.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Orientace hladké plochy znamená, že v každém jejím bodě je určen směr normály a to spojitým způsobem: jestliže půjdete po jednoduše uzavřené křivce na dané ploše, musíte dojít do výchozího bodu ve stejné poloze.



Skončíte hlavou nahoru.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Orientace hladké plochy znamená, že v každém jejím bodě je určen směr normály a to spojitým způsobem: jestliže půjdete po jednoduše uzavřené křivce na dané ploše, musíte dojít do výchozího bodu ve stejné poloze.



Skončíte hlavou nahoru.'



Pokud jste začali hlavou nahoru ...

LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

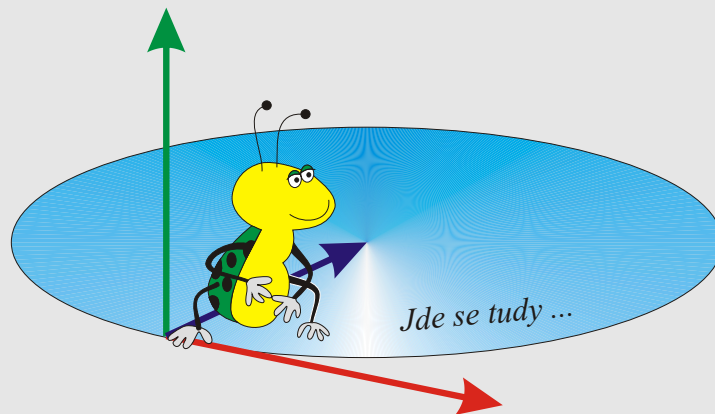
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je-li orientovaná křivka C částí kraje orientované plochy P , říká se, že obě orientace jsou **souhlasné**, jestliže při chůzi po křivce v kladném směru a po kladné straně plochy, máte plochu po levé straně.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

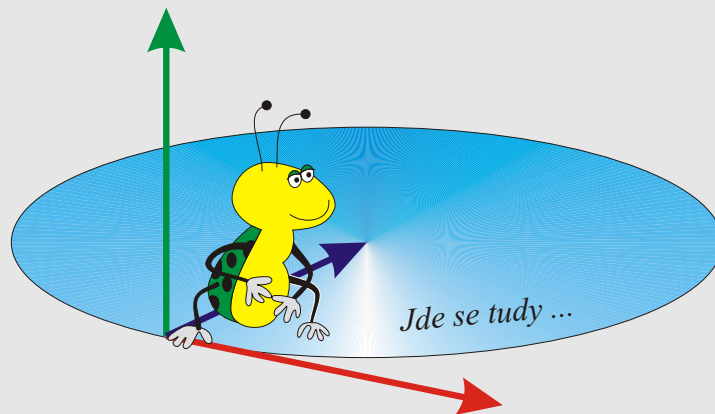
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li orientovaná křivka C částí kraje orientované plochy P , říká se, že obě orientace jsou **souhlasné**, jestliže při chůzi po křivce v kladném směru a po kladné straně plochy, máte plochu po levé straně.



Nebude-li řečeno jinak, bude se vždy předpokládat, že plochy a jejich kraje jsou orientovány souhlasně.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Musí se dávat pozor při **orientaci po částech hladkých ploch**, protože ve styčných hranách obecně neexistují normály.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Musí se dávat pozor při **orientaci po částech hladkých ploch**, protože ve styčných hranách obecně neexistují normály.



Necht' jsou jednotlivé spojované plochy orientovány a necht' jejich kraje jsou uzavřené křivky, které jsou orientovány souhlasně s příslušnými plochami. Pak je celá plocha orientována, jestliže části krajů, které se stýkají (právě dvě) jsou navzájem orientovány opačně.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Musí se dávat pozor při **orientaci po částech hladkých ploch**, protože ve styčných hranách obecně neexistují normály.



Nechť jsou jednotlivé spojované plochy orientovány a necht' jejich kraje jsou uzavřené křivky, které jsou orientovány souhlasně s příslušnými plochami. Pak je celá plocha orientována, jestliže části krajů, které se stýkají (právě dvě) jsou navzájem orientovány opačně.



Ničemu nerozumím, asi
jsem zde "zespoda"...

LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Použití intervalu v definici plochy sice zjednodušuje některé další definice, ale jiné zase komplikuje. Proto je dobré mít na mysli, že lze použít i jiné množiny místo intervalu za definiční obor parametrů.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Použití intervalu v definici plochy sice zjednodušuje některé další definice, ale jiné zase komplikuje. Proto je dobré mít na mysli, že lze použít i jiné množiny místo intervalu za definiční obor parametrů.



Místo intervalu I lze vzít v definici plochy jakýkoliv prostý **homeomorfní** obraz intervalu, např. vnitřek kruhu (popř. s částí hraniční kružnice), různě zdeformovaný interval nebo kruh, apod.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Použití intervalu v definici plochy sice zjednodušuje některé další definice, ale jiné zase komplikuje. Proto je dobré mít na mysli, že lze použít i jiné množiny místo intervalu za definiční obor parametrů.



Místo intervalu I lze vzít v definici plochy jakýkoliv prostý **homeomorfní** obraz intervalu, např. vnitřek kruhu (popř. s částí hraniční kružnice), různě zdeformovaný interval nebo kruh, apod.



Homeomorfismus mezi podmnožinami A, B roviny je spojitě prosté zobrazení $f : A \rightarrow B$ takové, že f^{-1} je také spojitě. Pro hladké plochy je nutné dodat ještě slovo *hladký* homeomorfismus, čímž se míní, že f i f^{-1} mají spojitě parciální derivace.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Použití intervalu v definici plochy sice zjednodušuje některé další definice, ale jiné zase komplikuje. Proto je dobré mít na mysli, že lze použít i jiné množiny místo intervalu za definiční obor parametrů.



Místo intervalu I lze vzít v definici plochy jakýkoliv prostý **homeomorfní** obraz intervalu, např. vnitřek kruhu (popř. s částí hraniční kružnice), různě zdeformovaný interval nebo kruh, apod.



Homeomorfismus mezi podmnožinami A, B roviny je spojitě prosté zobrazení $f : A \rightarrow B$ takové, že f^{-1} je také spojitě. Pro hladké plochy je nutné dodat ještě slovo *hladký* homeomorfismus, čímž se míní, že f i f^{-1} mají spojitě parciální derivace.



Toto je nesmírně důležitý pojem.

LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9





My skřítci jsme všichni navzájem homeomorfní.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



My skřítki jsme všichni navzájem homeomorfní.



Každé dva uzavřené (nebo otevřené) intervaly v rovině se na sebe dají zobrazit hladkým homeomorfním zobrazením.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



My skřítki jsme všichni navzájem homeomorfní.



Každé dva uzavřené (nebo otevřené) intervaly v rovině se na sebe dají zobrazit hladkým homeomorfním zobrazením.



Uzavřený (nebo otevřený) kruh je hladce homeomorfní s uzavřeným (nebo otevřeným, resp.) intervalem.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Neuděláte chybu, když si budete představovat, že každá kompaktní polootvřená konvexní množina v rovině je homeomorfní s uzavřeným intervalem v rovině.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Neuděláte chybu, když si budete představovat, že každá kompaktní polootvřená konvexní množina v rovině je homeomorfní s uzavřeným intervalem v rovině.



To chci slyšet ještě jednou.
Rýmuje se to alespoň?

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Spojení ploch lze definovat i jiným způsobem. Např. bylo možné požadovat, aby se definiční intervaly protínaly jen na části své strany.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojení ploch lze definovat i jiným způsobem. Např. bylo možné požadovat, aby se definiční intervaly protínaly jen na části své strany.



Při původní definici je totiž nutné pro připojení třetí a dalších ploch definiční obor parametrů upravit tak, aby se příslušné intervaly protínaly v celých stranách.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojení ploch lze definovat i jiným způsobem. Např. bylo možné požadovat, aby se definiční intervaly protínaly jen na části své strany.



Při původní definici je totiž nutné pro připojení třetí a dalších ploch definiční obor parametrů upravit tak, aby se příslušné intervaly protínaly v celých stranách.



Je možné vzít za definiční obory hezké polootevřené množiny mající za hranici křivky a při spojení požadovat překrývání částí těchto křivek



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Každý bod kraje plochy S je obrazem bodu hranice definičního oboru I v \mathbb{R}^2 .



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Každý bod kraje plochy S je obrazem bodu hranice definičního oboru I v \mathbb{R}^2 .



U představy zvlněného kruhu v prostoru je kraj přímo obraz hranice kruhu (nebo čtverce) v rovině.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Každý bod kraje plochy S je obrazem bodu hranice definičního oboru I v \mathbb{R}^2 .



U představy zvlněného kruhu v prostoru je kraj přímo obraz hranice kruhu (nebo čtverce) v rovině.



Ale mohou existovat body hranice I , které se zobrazí dovnitř plochy P . Např. se v I ztotožní (hladce) dvě protilehlé strany a dostane se válcová plocha – ztotožněné strany, kromě svých krajních bodů, přejdou dovnitř válcové plochy.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ještě výraznější je příklad, kdy se všechny strany obdélníku ztotožní (hladce) do jednoho bodu. Výsledkem je kulová plocha, jejíž kraj je prázdná množina. Je to obdoba Jordanových křivek. Je to obdoba Jordanových křivek a zaslouží si taky název: uzavřená plocha.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ještě výraznější je příklad, kdy se všechny strany obdélníku ztotožní (hladce) do jednoho bodu. Výsledkem je kulová plocha, jejíž kraj je prázdná množina. Je to obdoba Jordanových křivek. Je to obdoba Jordanových křivek a zaslouží si taky název: uzavřená plocha.



V poměrně častých případech si lze kraj plochy představit následovně: jsou to body, pro které žádné jejich okolí na ploše (tj. průnik jejich okolí v prostoru s plochou) nemá tvar „zvlněného“ kruhu s oním bodem uprostřed.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si rozdíl při orientování po částech hladké křivky a po částech hladké plochy.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si rozdíl při orientování po částech hladké křivky a po částech hladké plochy.



U křivky bylo jedno, jak jednotlivé hladké části zorientujeme (pokud nešlo o jednoduše uzavřenou křivku), u ploch už to jedno není.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť P je po částech hladká plocha, u které je dána orientace jejím tvarem (mapř. je jednoduše uzavřená nebo je grafem funkce dvou proměnných).



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť P je po částech hladká plocha, u které je dána orientace jejím tvarem (mapř. je jednoduše uzavřená nebo je grafem funkce dvou proměnných).



Je-li jedna její hladká část orientována souhlasně s orientací P a uděláte-li orientaci ostatních hladkých částí podle předchozího odstavce o orientaci po částech hladkých ploch, pak dostanete orientaci souhlasnou s původní orientací P .



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť P je po částech hladká plocha, u které je dána orientace jejím tvarem (mapř. je jednoduše uzavřená nebo je grafem funkce dvou proměnných).



Je-li jedna její hladká část orientována souhlasně s orientací P a uděláte-li orientaci ostatních hladkých částí podle předchozího odstavce o orientaci po částech hladkých ploch, pak dostanete orientaci souhlasnou s původní orientací P .



Na "viditelné" ploše je vše vidět. Definice potřebujeme pro to, aby se zvládly případy "neviditelné".

Konec poznámek 1.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

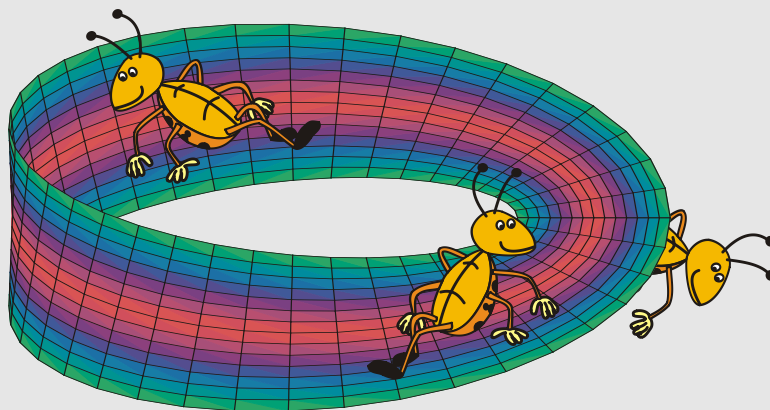
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Ukažte, že Möbiův list nelze orientovat.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte, že povrch krychle je po částech hladká plocha.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ukažte, že kulová plocha je hladká uzavřená plocha.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ukažte, že kulová plocha je hladká uzavřená plocha.



Můžete předpokládat (ve smyslu poznámky), že definičním oborem parametrů je kruh kolem nuly. Až vyřešíte otázku 4., zvládnete to i s definičním oborem intervalem (ve smyslu definice).

Konec příkladů 1.

LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Ukažte, že graf spojitě reálné funkce f definované na intervalu I v rovině je plocha v definovaném smyslu.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Ukažte, že graf spojitě reálné funkce f definované na intervalu I v rovině je plocha v definovaném smyslu.



Najděte příslušnou parametrizaci.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte, že pro hladkou plochu P je množina těch jejích bodů, ve kterých je jeden vybraný Jacobiho determinant matice z definice hladké plochy nenulový, otevřená.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte, že pro hladkou plochu P je množina těch jejích bodů, ve kterých je jeden vybraný Jacobiho determinant matice z definice hladké plochy nenulový, otevřená.



Spojitě hrátky. Zkuste nejprve ukázat, že funkce na definičním oboru parametrů (intervalu I) přiřazující bodu příslušný Jakobián je spojitá.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Dokažte popis po částech hladké plochy pomocí parametrů na intervalu.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Najděte hladký homeomorfismus převádějící kruh na čtverec (oba buď otevřené nebo oba uzavřené).



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Najděte hladký homeomorfismus převádějící kruh na čtverec (oba buď otevřené nebo oba uzavřené).



Kvadratura kruhu?



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha

spojení ploch

hladká plocha

kraj plochy

po částech hladká

plocha

jedn.uzavřená

plocha

orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Najděte hladký homeomorfismus převádějící kruh na čtverec (oba buď otevřené nebo oba uzavřené).



Kvadratura kruhu?



Není divu, že to je fuška.

Konec otázek 1.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



Myšlenka výpočtu integrálu funkce $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ na ploše P je podobná jako u křivkového integrálu 1.druhu.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



Myšlenka výpočtu integrálu funkce $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ na ploše P je podobná jako u křivkového integrálu 1.druhu.



Pomocí určovacích parametrických funkcí se plocha „narovná“ a spočítá se integrál přes podmnožinu roviny.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



Myšlenka výpočtu integrálu funkce $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ na ploše P je podobná jako u křivkového integrálu 1.druhu.



Pomocí určovacích parametrických funkcí se plocha „narovná“ a spočítá se integrál přes podmnožinu roviny.



Plošný integrál se bude definovat přes parametrizaci.



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Placatý integrál je snadný,
když umíte kouzlit s para-
metry.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Placatý integrál je snadný,
když umíte kouzlit s para-
metry.



Vykouzli mi kulatou ta-
bulku čokolády.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ono narovnání je trochu složitější než u křivek. Tam bylo nutné příslušnou funkci vynásobit faktorem který odpovídal změně délky při narovnání křivky (od ds se přešlo k dx).



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ono narovnění je trochu složitější než u křivek. Tam bylo nutné příslušnou funkci vynásobit faktorem který odpovídal změně délky při narovnění křivky (od ds se přešlo k dx).



Stejně tak u plochy je třeba použít faktor, který udává změnu velikosti křivé plochy při narovnění.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ono narovnání je trochu složitější než u křivek. Tam bylo nutné příslušnou funkci vynásobit faktorem který odpovídal změně délky při narovnání křivky (od ds se přešlo k dx).



Stejně tak u plochy je třeba použít faktor, který udává změnu velikosti křivé plochy při narovnání.



V bodě (x, y, z) plochy se velmi malá ploška dS okolo tohoto bodu dá považovat za rovinnou a zjistí se poměr její velikosti ku poměru jejího průmětu, např. do roviny xy (není-li tento průmět úsečka nebo bod).



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ono narovnání je trochu složitější než u křivek. Tam bylo nutné příslušnou funkci vynásobit faktorem který odpovídal změně délky při narovnání křivky (od ds se přešlo k dx).



Stejně tak u plochy je třeba použít faktor, který udává změnu velikosti křivé plochy při narovnání.



V bodě (x, y, z) plochy se velmi malá ploška dS okolo tohoto bodu dá považovat za rovinnou a zjistí se poměr její velikosti ku poměru jejího průmětu, např. do roviny xy (není-li tento průmět úsečka nebo bod).



V rovině xy má průmět velikost $dx \cdot dy$. Skutečná ploška má velikost větší, a to $dS = dx \cdot dy / |\cos \gamma|$, kde γ je úhel, který svírá normála k ploše v (x, y, z) s rovnoběžkou v (x, y, z) s osou z v kladném směru.



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ono narovnání je trochu složitější než u křivek. Tam bylo nutné příslušnou funkci vynásobit faktorem který odpovídal změně délky při narovnání křivky (od ds se přešlo k dx).



Stejně tak u plochy je třeba použít faktor, který udává změnu velikosti křivé plochy při narovnání.



V bodě (x, y, z) plochy se velmi malá ploška dS okolo tohoto bodu dá považovat za rovinnou a zjistí se poměr její velikosti ku poměru jejího průmětu, např. do roviny xy (není-li tento průmět úsečka nebo bod).



V rovině xy má průmět velikost $dx \cdot dy$. Skutečná ploška má velikost větší, a to $dS = dx \cdot dy / |\cos \gamma|$, kde γ je úhel, který svírá normála k ploše v (x, y, z) s rovnoběžkou v (x, y, z) s osou z v kladném směru.



Je nutné předpokládat, že $|\cos \gamma| \neq 0$, tj., že ploška není rovnoběžná s osou z .



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

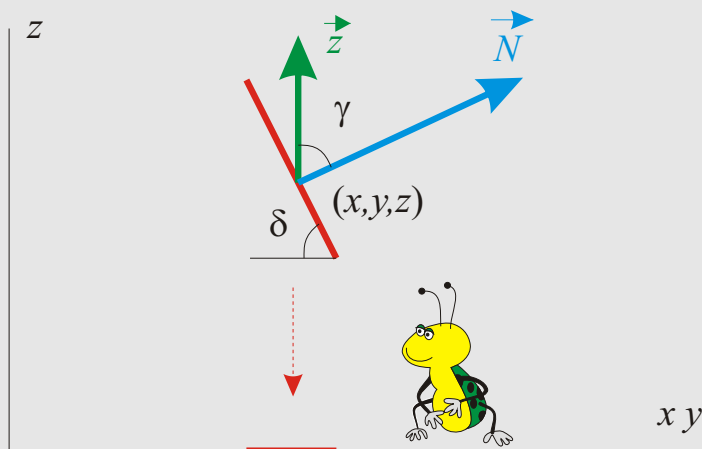
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tedy že normála "ne-
padne" do roviny xy . Aby se
prostě nemuselo spadnout.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

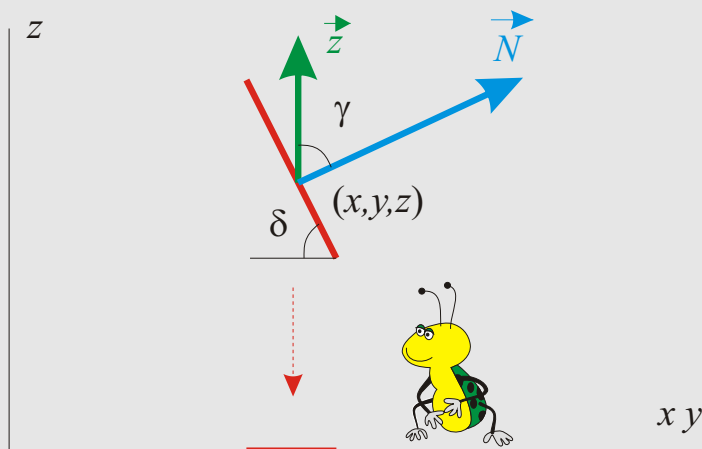
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tedy že normála "ne-
padne" do roviny xy . Aby se
prostě nemuselo spadnout.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Směřuje to ke spočtení Ja-
kobiánu.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha

orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle druhé podmínky definice hladkých ploch musí být v každém bodě plochy aspoň jeden uvedený kosinus nenulový.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle druhé podmínky definice hladkých ploch musí být v každém bodě plochy aspoň jeden uvedený kosinus nenulový.



Hodnost 2 matice z definice **hladké plochy** znamená, že normála (čili vektorový součin prvního a druhého řádku oné matice) je nenulový vektor. Ten nemůže padnout do rovin xy , yz i zx najednou.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle druhé podmínky definice hladkých ploch musí být v každém bodě plochy aspoň jeden uvedený kosinus nenulový.



Hodnost 2 matice z definice **hladké plochy** znamená, že normála (čili vektorový součin prvního a druhého řádku oné matice) je nenulový vektor. Ten nemůže padnout do rovin xy , yz i zx najednou.



Plocha se rozdělí na nejvýše tři části, a v každé je jeden daný kosinus nenulový. Integrál přes plochu P je pak součtem integrálů přes tyto části.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
plocha
po částech hladká plocha
jeden.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle druhé podmínky definice hladkých ploch musí být v každém bodě plochy aspoň jeden uvedený kosinus nenulový.



Hodnost 2 matice z definice **hladké plochy** znamená, že normála (čili vektorový součin prvního a druhého řádku oné matice) je nenulový vektor. Ten nemůže padnout do rovin xy , yz i zx najednou.



Plocha se rozdělí na nejvýše tři části, a v každé je jeden daný kosinus nenulový. Integrál přes plochu P je pak součtem integrálů přes tyto části.



Podle volby takové části se berou průměty i do rovin xz nebo yz a dostávají se velikosti plošek $dx \cdot dz / |\cos \beta|$, resp. $dy \cdot dz / |\cos \alpha|$, kde úhly β, α jsou opět úhly mezi normálou a příslušnými osami (y , resp. x). Kosiny těchto úhlů se nazývají *směrové kosiny* normály.



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nyní lze definovat plošný integrál 1.druhu. V křivkovém integrálu používaný symbol ds bude nahrazen symbolem dS . Bude zadefinován integrál přes projekci M plochy na rovinu xy .



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nyní lze definovat plošný integrál 1.druhu. V křivkovém integrálu používaný symbol ds bude nahrazen symbolem dS . Bude zadefinován integrál přes projekci M plochy na rovinu xy .



DEFINICE. Necht' f je funkce zadaná na hladké ploše P , na které je v každém bodě $\cos \gamma \neq 0$. Pak se definuje **plošný integrál 1.druhu** funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S) dS = \int_M f(S) \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}.$$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nyní lze definovat plošný integrál 1.druhu. V křivkovém integrálu používaný symbol ds bude nahrazen symbolem dS . Bude zadefinován integrál přes projekci M plochy na rovinu xy .



DEFINICE. Necht' f je funkce zadaná na hladké ploše P , na které je v každém bodě $\cos \gamma \neq 0$. Pak se definuje **plošný integrál 1.druhu** funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S) dS = \int_M f(S) \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}.$$



Na pravé straně je dvojrozměrný integrál, v něm se za proměnné S, x, y, γ musí dosadit příslušné hodnoty (viz dále).



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nyní lze definovat plošný integrál 1.druhu. V křivkovém integrálu používaný symbol ds bude nahrazen symbolem dS . Bude zadefinován integrál přes projekci M plochy na rovinu xy .



DEFINICE. Necht' f je funkce zadaná na hladké ploše P , na které je v každém bodě $\cos \gamma \neq 0$. Pak se definuje **plošný integrál 1.druhu** funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S) dS = \int_M f(S) \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}.$$



Na pravé straně je dvojrozměrný integrál, v něm se za proměnné S, x, y, γ musí dosadit příslušné hodnoty (viz dále).



Samozřejmě lze požadavek nenulovosti směrového kosinu oslabit podmínkou, že může nabývat 0 jen na malé množině (nulové).



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přímo z definice lze ukázat následující vlastnosti:

POZOROVÁNÍ. Následující 2 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany, poslední nerovnost platí, pokud existuje levá strana.

1. $\int_P (\alpha f(S) + \beta g(S)) \, dS = \alpha \int_P f(S) \, dS + \beta \int_P g(S) \, dS;$
2. $\int_{P_1+P_2} f(S) \, dS = \int_{P_1} f(S) \, dS + \int_{P_2} f(S) \, dS;$
3. $|\int_P f(S) \, dS| \leq O(P) \max_{S \in P} |f(S)|,$ kde $O(P)$ je obsah plochy P .



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Úhel γ se samozřejmě mění spolu s bodem (x, y, z) a pro výpočet plošného integrálu je obvykle třeba $\cos \gamma$ vyjádřit pomocí nějakých souřadnic.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Úhel γ se samozřejmě mění spolu s bodem (x, y, z) a pro výpočet plošného integrálu je obvykle třeba $\cos \gamma$ vyjádřit pomocí nějakých souřadnic.



Následující jednoduché pozorování uvádí takové vyjádření pro plochy zadané jako graf funkce.



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' plocha P je grafem funkce $h(x, y)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}.$$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' plocha P je grafem funkce $h(x, y)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}.$$

↓
Důkaz. Rovnost lze odvodit z obecnější rovnosti pro plochu P zadanou rovností $g(x, y, z) = 0$.



LEKCE23-IPL
plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' plocha P je grafem funkce $h(x, y)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}.$$



Důkaz. Rovnost lze odvodit z obecnější rovnosti pro plochu P zadanou rovností $g(x, y, z) = 0$.



Z teorie funkcí více proměnných je známo, že $\text{grad}g$ udává směr normály, takže z popisu skalárního součinu pomocí kosinu úhlu sevřeného oběma vektory se dostane

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \frac{|\text{grad}g|}{|\text{grad}g \cdot (0, 0, 1)|}.$$

Nyní stačí za g dát funkci $z - h(x, y)$.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Plochy však bývají ponejvíce zadány parametricky. Tam je příslušný popis složitější a nebude v tomto textu dokazován:



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Plochy však bývají ponejvíce zadány parametricky. Tam je příslušný popis složitější a nebude v tomto textu dokazován:



VĚTA. Necht' je plocha P dána parametricky rovnostmi $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \tau(u, v)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{J(\varphi, \psi)},$$

kde

$$E = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v}.$$

a $J(\varphi, \psi)$ je Jakobián funkcí φ, ψ .



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní lze uvést převod plošného integrálu 1.druhu na obyčejný integrál přes rovinnou množinu.

VĚTA. Necht' f je funkce definovaná na hladké ploše P .

1. Necht' je plocha P grafem funkce h definované na množině A . Pak

$$\int_P f(S) \, dS = \int_A f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy .$$

2. Necht' je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A . Pak

$$\int_P f(S) \, dS = \int_A f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv .$$



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jiné vysvětlení pro přidaný člen $\sqrt{EG - F^2}$ je, že je to obsah čtyřúhelníku určeném dvěma řádkovými vektory z matice v definici **hladké plochy**. A ty jsou zase "jakýmsi poměrem" mezi malým pohybem parametru u (resp. v) a příslušným pohybem na ploše.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

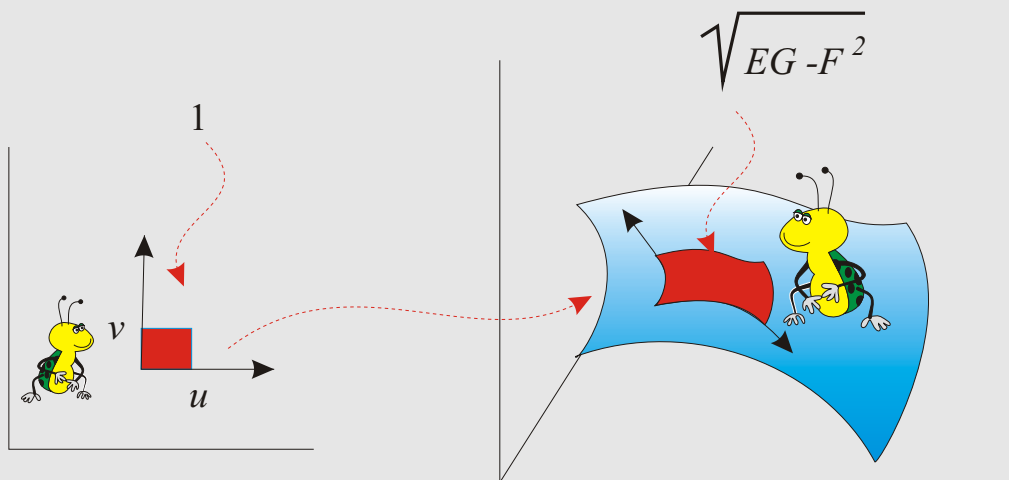
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jiné vysvětlení pro přidaný člen $\sqrt{EG - F^2}$ je, že je to obsah čtyřúhelníku určeném dvěma řádkovými vektory z matice v definici **hladké plochy**. A ty jsou zase "jakýmsi poměrem" mezi malým pohybem parametru u (resp. v) a příslušným pohybem na ploše.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
 - těžiště desky
 - objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

Plošný integrál byl definován na hladké ploše. Na po částech hladkých plochách se integrál vypočte pro jednotlivé hladké části a pak sečte.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

Plošný integrál byl definován na hladké ploše. Na po částech hladkých plochách se integrál vypočte pro jednotlivé hladké části a pak sečte.



Lze použít definici integrálu pro hladké plochy i pro částečně hladké plochy s tím, že na zanedbatelných množinách (vzhledem k dvojrozměrnému integrálu) není integrovaná funkce definována.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V **Pozorování** vypadla oproti křivkovým integrálům 1.druhu třetí vlastnost. Odpovídající vlastnost pro plošné integrály samozřejmě platí (plošný integrál 1.druhu nezávisí na orientaci plochy), ale nemá příliš smysl tuto vlastnost vypisovat.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
 - směrové kosiny
 - popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
 - vlastnosti 2.dr.
 - popis 2.dr.
 - vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Plošné integrály lze též definovat pomocí Riemannových součtů. Bud' se rovnou použije parametrizace plochy a rozděljuje se definiční interval na menší intervaly, nebo se použije rozdělení dané plochy na menší plošky – v tomto případě je nutné znát obsahy těchto plošek.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Plošné integrály lze též definovat pomocí Riemannových součtů. Bud' se rovnou použije parametrizace plochy a rozděljuje se definiční interval na menší intervaly, nebo se použije rozdělení dané plochy na menší plošky – v tomto případě je nutné znát obsahy těchto plošek.



Podrobnosti tu nebudou uváděny.

Konec poznámek 2.

LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

1. Vypočtete obsah plochy dané rovností $x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{xy}$. Nejdříve najděte parametrické vyjádření plochy. [π^2]



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Vypočtete $\int_P z^2 \, dS$, kde P je část kužele daná parametrizací $x = r \cos \varphi \sin \alpha$, $y = r \sin \varphi \sin \alpha$, $z = r \cos \alpha$, $r \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $\alpha \in (0, \pi/2)$ je konstanta. [$\pi a^4 \sin \alpha \cos^2 \alpha / 2$]



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Vypočtete $\sqrt{EG - F^2}$ pro kulovou plochu se středem v počátku zadanou sférickými souřadnicemi. $[r^2 \cos \varphi]$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Vypočtete $\sqrt{EG - F^2}$ pro kulovou plochu se středem v počátku zadanou sférickými souřadnicemi. $[r^2 \cos \varphi]$



4. Vypočtete plochu koule pomocí výsledku předchozího příkladu.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Zintegrujte funkci xyz přes povrch krychle o délce hrany 1, se stranami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, procházející body $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$. [3/4]

Konec příkladů 2.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Dokažte podrobně tvrzení o vyjádření směrových kosinů pro graf funkce $h(x, y)$.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha

spojení ploch

hladká plocha

kraj plochy

po částech hladká

plocha

jedn.uzavřená

plocha

orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte, že tvrzení o vyjádření směrových kosinů pro graf funkce $h(x, y)$ je důsledkem obecné věty o vyjádření směrových kosinů pro plochu zadanou parametricky.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ukažte, že u hladké plochy existuje v každém bodě tečná rovina. Při jaké poloze tečné roviny nelze při výpočtu plošného integrálu použít průmět na rovinu yz v okolí daného bodu?



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ukažte přímo z definice, že plošný integrál 1.druhu nezávisí na orientaci plochy.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Dokažte Pozorování.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Dokažte, že definice obsahu plochy souhlasí s již dříve definovanými obsahy rovinných obrazců a plochy rotačního tělesa.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jsem tu.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jsem tu.



*7. Najděte vyjádření pro směrové kosiny u grafu reálné funkce dvou proměnných.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha

orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jsem tu.



*7. Najděte vyjádření pro směrové kosiny u grafu reálné funkce dvou proměnných.



A mizím. Byla to jen vteřinka.

Konec otázek 2.

LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočtete povrch koule B o poloměru a .



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte povrch koule B o poloměru a .



Řešení. Máme vypočítat integrál

$$\int_{\partial B} 1 \, dS.$$



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte povrch koule B o poloměru a .



Řešení. Máme vypočítat integrál

$$\int_{\partial B} 1 \, dS.$$



Je výhodné přejít ke sférickým souřadnicím.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte povrch koule B o poloměru a .



Řešení. Máme vypočítat integrál

$$\int_{\partial B} 1 \, dS.$$



Je výhodné přejít ke sférickým souřadnicím.



Sféru ∂B tedy parametrizujeme

$$\varphi(u, v) = a \cos u \cos v, \quad \psi(u, v) = a \sin u \cos v, \quad \tau(u, v) = a \sin v,$$

kde

$$u \in (-\pi, \pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
 - těžiště desky
 - objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Spočítáme parciální derivace

$$\partial_u(\varphi, \psi, \tau), \quad \partial_v(\varphi, \psi, \tau)$$

a spočítáme vektorový součin těchto dvou vektorů.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Spočítáme parciální derivace

$$\partial_u(\varphi, \psi, \tau), \quad \partial_v(\varphi, \psi, \tau)$$

a spočítáme vektorový součin těchto dvou vektorů.



Výsledek označme $b = (b_1, b_2, b_3)$. Pak platí

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a^4 \cos^2 v.$$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
 spojení ploch
 hladká plocha
 kraj plochy
 po částech hladká
 plocha
 jedn.uzavřená
 plocha
 orientace plochy
 plošný integrál 1.druhu
 vlastnosti 1.dr.
 směrové kosiny
 popis 1.dr.
 plošný integrál 2.dr.
 vlastnosti 2.dr.
 popis 2.dr.
 vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
 těžiště desky
 objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Spočítáme parciální derivace

$$\partial_u(\varphi, \psi, \tau), \quad \partial_v(\varphi, \psi, \tau)$$

a spočítáme vektorový součin těchto dvou vektorů.



Výsledek označme $b = (b_1, b_2, b_3)$. Pak platí

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a^4 \cos^2 v.$$



Dostáváme

$$\int_{\partial B} 1 \, dS = a^2 \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv |\cos v| = 4\pi a^2.$$



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Spočítáme parciální derivace

$$\partial_u(\varphi, \psi, \tau), \quad \partial_v(\varphi, \psi, \tau)$$

a spočítáme vektorový součin těchto dvou vektorů.



Výsledek označme $b = (b_1, b_2, b_3)$. Pak platí

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a^4 \cos^2 v.$$



Dostáváme

$$\int_{\partial B} 1 \, dS = a^2 \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv |\cos v| = 4\pi a^2.$$



Dokonáno jest.

LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 2.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



Křivkové integrály 2.druhu vyjadřují např. tok kapaliny danou křivkou.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



Křivkové integrály 2.druhu vyjadřují např. tok kapaliny danou křivkou.



Plošné integrály 2.druhu budou vyjadřovat tok kapaliny danou plochou.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



Křivkové integrály 2.druhu vyjadřují např. tok kapaliny danou křivkou.



Plošné integrály 2.druhu budou vyjadřovat tok kapaliny danou plochou.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Na této motivaci je také vidět, proč je třeba mít plochu orientovanou (kapalina proudí plochou z jedné strany na druhou).



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Necht' P je hladká orientovaná plocha a $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3) . Pak se definuje **plošný integrál 2.druhu** funkce f přes P rovností

$$\int_P \mathbf{f} \cdot d\mathbf{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy) .$$



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Necht' P je hladká orientovaná plocha a $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3) . Pak se definuje **plošný integrál 2.druhu** funkce f přes P rovností

$$\int_P \mathbf{f} \cdot d\mathbf{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy) .$$



Integrál na pravé straně je součtem tří integrálů a každý lze brát přes projekci plochy P do příslušné roviny (yz nebo xz nebo xy resp.).



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Necht' P je hladká orientovaná plocha a $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3) . Pak se definuje **plošný integrál 2.druhu** funkce f přes P rovností

$$\int_P \mathbf{f} \cdot d\mathbf{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy) .$$



Integrál na pravé straně je součtem tří integrálů a každý lze brát přes projekci plochy P do příslušné roviny (yz nebo xz nebo xy resp.).



V definici je pro jednoduchost uvedena integrace přes celou rovinu (rozumí se, že integrovaná funkce se dodefinuje nulou ve zbývajících bodech).



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

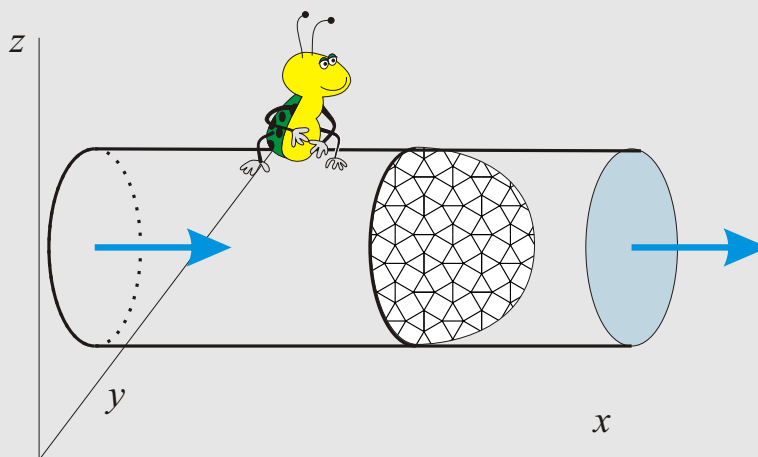
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tedy například pokud "kapalina proudí" pouze ve směru osy x (tedy pouze f_1 je nenulová), pak například u cedníku ve tvaru polosféry bude integrál záviset pouze na jejím průmětu do roviny yz :



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popisu 1.dr.
- plošný integrál 2.druhu vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Opět se snadno ukáže:

POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany.

$$1. \int_P (\alpha f(S) + \beta g(S)) d\mathbf{S} = \alpha \int_C f(S) d\mathbf{S} + \beta \int_C g(S) d\mathbf{S};$$

$$2. \int_{P_1+P_2} f(S) d\mathbf{S} = \int_{P_1} f(S) d\mathbf{S} + \int_{P_2} f(S) d\mathbf{S};$$

$$3. \int_{-P} f(S) d\mathbf{S} = \int_P f(S) d\mathbf{S};$$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle uvedené definice plošného integrálu 2.druhu však nelze integrál většinou přímo počítat, protože např. $\int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x, y, z)) dy dz$ obsahuje i proměnnou x , která závisí na y a z .



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle uvedené definice plošného integrálu 2.druhu však nelze integrál většinou přímo počítat, protože např. $\int_{\mathbb{R}^2}(f_1(x, y, z)) dy dz$ obsahuje i proměnnou x , která závisí na y a z .



Tato závislost se musí do integrálu dosadit.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle uvedené definice plošného integrálu 2.druhu však nelze integrál většinou přímo počítat, protože např. $\int_{\mathbb{R}^2}(f_1(x, y, z)) dy dz$ obsahuje i proměnnou x , která závisí na y a z .



Tato závislost se musí do integrálu dosadit.



Použije se věta o substituci na jednotlivé části integrálu podle toho, jak je plocha P zadaná.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle uvedené definice plošného integrálu 2.druhu však nelze integrál většinou přímo počítat, protože např. $\int_{\mathbb{R}^2}(f_1(x, y, z)) dy dz$ obsahuje i proměnnou x , která závisí na y a z .



Tato závislost se musí do integrálu dosadit.



Použije se věta o substituci na jednotlivé části integrálu podle toho, jak je plocha P zadaná.



Je vhodné si uvědomit, že kladná strana grafu funkce je horní strana.



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

- Gauss-Ostrogradskij
- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P .

1. Necht' je plocha P grafem funkce g definované na množině A . Pak

$$\int_P f \, d\mathbf{S} = \int_A \left(-f_1(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x} \, dx \, dy - f_2(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y} \, dx \, dy + f_3(x, y, g(x, y)) \, dx \, dy \right).$$

2. Necht' je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A . Pak

$$\begin{aligned} \int_P f \, d\mathbf{S} &= \pm \int_A f_1(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)) J(\psi, \tau) \, du \, dv \\ &\pm \int_A f_2(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)) J(\varphi, \tau) \, du \, dv \\ &\pm \int_A f_3(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)) J(\varphi, \psi) \, du \, dv, \end{aligned}$$

kde znaménka před integrály se určí podle souhlasu orientace plochy s obvyklou orientací souřadnicových množin.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr. popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P .

1. Necht' je plocha P grafem funkce g definované na množině A . Pak

$$\int_P f \, d\mathbf{S} = \int_A (-f_1(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x} \, dx \, dy - f_2(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y} \, dx \, dy + f_3(x, y, g(x, y)) \, dx \, dy).$$

2. Necht' je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A . Pak

$$\begin{aligned} \int_P f \, d\mathbf{S} &= \pm \int_A f_1(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)) J(\psi, \tau) \, du \, dv \\ &\pm \int_A f_2(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)) J(\varphi, \tau) \, du \, dv \\ &\pm \int_A f_3(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)) J(\varphi, \psi) \, du \, dv, \end{aligned}$$

kde znaménka před integrály se určí podle souhlasu orientace plochy s obvyklou orientací souřadnicových množin.



Poslední věta o určení znaménka znamená, např. pro poslední integrál na pravé straně, že znaménko bude stejné jako znaménko Jakobiánu $J(\varphi, \psi)$, pokud při pohledu seshora na rovinu xy vidíme kladnou stranu plochy v nějakém vybraném bodě, ve kterém se nějaké jeho okolí na ploše zobrazuje prostě na rovinu xy .



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

- Gauss-Ostrogradskij
- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podobně jako u křivkových integrálů, i zde existuje vztah mezi plošnými integrály 1.druhu a 2.druhu. Následující vzorec je zřejmý z popisu obou integrálů:



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podobně jako u křivkových integrálů, i zde existuje vztah mezi plošnými integrály 1.druhu a 2.druhu. Následující vzorec je zřejmý z popisu obou integrálů:



POZOROVÁNÍ. Necht' $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P . Potom

$$\int_P f \, d\mathbf{S} = \int_P (f_1(x, y, z) \cos \alpha + f_2(x, y, z) \cos \beta + f_3(x, y, z) \cos \gamma) \, dS,$$

kde uvedené kosiny jsou směrové kosiny v bodech $z P$.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podobně jako u křivkových integrálů, i zde existuje vztah mezi plošnými integrály 1.druhu a 2.druhu. Následující vzorec je zřejmý z popisu obou integrálů:



POZOROVÁNÍ. Necht' $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P . Potom

$$\int_P f \, d\mathbf{S} = \int_P (f_1(x, y, z) \cos \alpha + f_2(x, y, z) \cos \beta + f_3(x, y, z) \cos \gamma) \, dS,$$

kde uvedené kosiny jsou směrové kosiny v bodech $z P$.



V integrálu $\int_P f \, d\mathbf{S}$ lze tedy $f \, d\mathbf{S}$ chápat jako skalární součin vektoru \mathbf{f} s vektorem $d\mathbf{S} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \, dS$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podobně jako u křivkových integrálů, i zde existuje vztah mezi plošnými integrály 1.druhu a 2.druhu. Následující vzorec je zřejmý z popisu obou integrálů:



POZOROVÁNÍ. Necht' $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P . Potom

$$\int_P f \, d\mathbf{S} = \int_P (f_1(x, y, z) \cos \alpha + f_2(x, y, z) \cos \beta + f_3(x, y, z) \cos \gamma) \, dS,$$

kde uvedené kosiny jsou směrové kosiny v bodech $z P$.



V integrálu $\int_P f \, d\mathbf{S}$ lze tedy $f \, d\mathbf{S}$ chápat jako skalární součin vektoru \mathbf{f} s vektorem $d\mathbf{S} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \, dS$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tedy $d\mathbf{S}$ je normálový vektor k ploše v daném bodě o velikosti dS .

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Plošné integrály 2.druhu se často definují „po složkách“, tj. integrál $\int f_1 \, dy \, dz$ zvlášť a další dva integrály také zvlášť. Výsledky se pak sečtou.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Plošné integrály 2.druhu se často definují „po složkách“, tj. integrál $\int f_1 dy dz$ zvlášť a další dva integrály také zvlášť. Výsledky se pak sečtou.



Opět je tu ztracen vektorový charakter a motivace, podobně jako u křivkových integrálů 2.druhu definovaných po složkách.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

I plošné integrály 2.druhu lze definovat pomocí Riemannových součtů.

Konec poznámek 3.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

1. Spočtěte $\int_P (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy$, kde P je plocha $\{(x, y, z); z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \in [0, 1]\}$. [0]



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočtěte $\int_P dy dz/x + dz dx/y + dx dy/z$, kde P je povrch elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Spočtete plošný integrál 2.druhu funkce (xy, yz, xz) přes povrch krychle o délce hrany 1, se stranami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, procházející body $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$.
[3/2]



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha

spojení ploch

hladká plocha

kraj plochy

po částech hladká

plocha

jedn.uzavřená

plocha

orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Spočtěte $\int_P x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$, kde $P = \{(x, y, z); x + y + z = a, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ pro $a > 0$. Použijte vyjádření pomocí plošného integrálu 1.druhu.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Spočtete $\int_P 0 \, dy \, dz + yz \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$, kde $P = \{(x, y, z); y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0, 0 \leq x \leq a\}$ je část válce ($a > 0$). Použijte definici plošného integrálu 2.druhu pomocí skalárního součinu s normálou. $[2a^4]$

Konec příkladů 3.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

1. Ukažte vlastnosti uvedené hned po definici integrálu, zvláště změnu znaménka při změně orientace plochy. Proč tato situace nenastane u plošného integrálu 1.druhu?



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Dokažte vztah mezi plošnými integrály obou druhů.

Konec otázek 3.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha

spojení ploch

hladká plocha

kraj plochy

po částech hladká

plocha

jedn.uzavřená

plocha

orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Vypočtete integrál

$$I = \int_M x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy,$$

kde M je sféra o poloměru a orientovaná ve směru vnější normály.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Vypočtete integrál

$$I = \int_M x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy,$$

kde M je sféra o poloměru a orientovaná ve směru vnější normály.



Řešení. Substitucí převedeme integrál do sférických souřadnic.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Vypočtete integrál

$$I = \int_M x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy,$$

kde M je sféra o poloměru a orientovaná ve směru vnější normály.



Řešení. Substitucí převedeme integrál do sférických souřadnic.



Množina je kulatá a polární souřadnice nám provedou "narovnání" do roviny.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Vypočtete integrál

$$I = \int_M x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy,$$

kde M je sféra o poloměru a orientovaná ve směru vnější normály.



Řešení. Substitucí převedeme integrál do sférických souřadnic.



Množina je kulatá a polární souřadnice nám provedou "narovnání" do roviny.



Položme tedy

$$\varphi(u, v) = a \cos u \cos v, \quad \psi(u, v) = a \sin u \cos v, \quad \tau(u, v) = a \sin v,$$

kde

$$u \in (-\pi, \pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Potom

$$\begin{aligned}
I &= \int_M x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \\
&= a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u \cos^3 v + \sin^2 u \cos^3 v + \sin^2 v \cos v) \, dv \right) du = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv \right) du = 4\pi a^3,
\end{aligned}$$

což jsme měli spočítat.



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Potom

$$\begin{aligned}
I &= \int_M x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \\
&= a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u \cos^3 v + \sin^2 u \cos^3 v + \sin^2 v \cos v) \, dv \right) du = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv \right) du = 4\pi a^3,
\end{aligned}$$

což jsme měli spočítat.



Problémy se zde nemohou objevit.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.

- směrové kosiny
- popis 1.dr.

- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.

- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

- Gauss-Ostrogradskij
- Stokes

- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Potom

$$\begin{aligned}
I &= \int_M x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \\
&= a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u \cos^3 v + \sin^2 u \cos^3 v + \sin^2 v \cos v) \, dv \right) du = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv \right) du = 4\pi a^3,
\end{aligned}$$

což jsme měli spočítat.



Problémy se zde nemohou objevit.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.

- směrové kosiny
- popis 1.dr.

- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.

- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

- Gauss-Ostrogradskij
- Stokes

- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Protože jsem tu taky já.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 3.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA



Greenova věta převádí křivkový integrál po jednoduše uzavřené křivce na integrál přes vnitřek této křivky.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA



Greenova věta převádí křivkový integrál po jednoduše uzavřené křivce na integrál přes vnitřek této křivky.



Posunutím o dimenzi výše by se měla dostat věta o převodu plošného integrálu po jednoduše uzavřené ploše na integrál přes vnitřek této plochy.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA



Greenova věta převádí křivkový integrál po jednoduše uzavřené křivce na integrál přes vnitřek této křivky.



Posunutím o dimenzi výše by se měla dostat věta o převodu plošného integrálu po jednoduše uzavřené ploše na integrál přes vnitřek této plochy.



Je to jenom narovnání do roviny. To bude snadné.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Greenův vzorec měl dvě podoby: pro křivkový integrál ze skalárního součinu s tečným vektorem nebo s normálovým vektorem.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Greenův vzorec měl dvě podoby: pro křivkový integrál ze skalárního součinu s tečným vektorem nebo s normálovým vektorem.



Pro plošné integrály se musí použít druhá varianta.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
plocha

orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Greenův vzorec měl dvě podoby: pro křivkový integrál ze skalárního součinu s tečným vektorem nebo s normálovým vektorem.



Pro plošné integrály se musí použít druhá varianta.



VĚTA. Necht' G je otevřená podmnožina prostoru a P je jednoduše uzavřená orientovaná plocha ležící i s vnitřkem v G . Necht' $f = (f_1, f_2, f_3)$ je funkce $G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mající spojitě parciální derivace na G . Pak platí

$$\oint_P (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy) = \\ = \int_{\iota P} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx dy dz .$$



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij Stokes

- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Greenův vzorec měl dvě podoby: pro křivkový integrál ze skalárního součinu s tečným vektorem nebo s normálovým vektorem.



Pro plošné integrály se musí použít druhá varianta.



VĚTA. Necht' G je otevřená podmnožina prostoru a P je jednoduše uzavřená orientovaná plocha ležící i s vnitřkem v G . Necht' $f = (f_1, f_2, f_3)$ je funkce $G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mající spojitě parciální derivace na G . Pak platí

$$\oint_P (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy) = \\ = \int_{\iota P} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx dy dz .$$



Důkaz je naznačen v *Poznámkách* a *Otázkách*.

LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

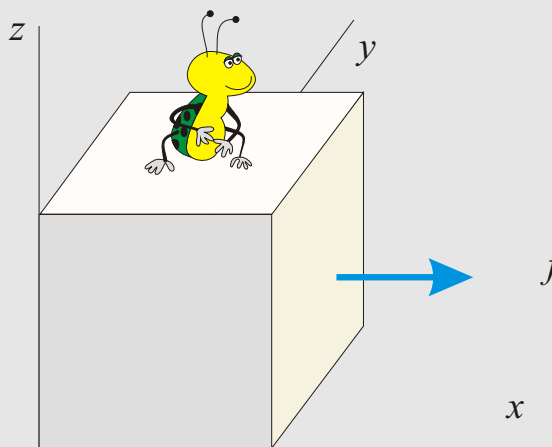
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak budou vypadat strany rovnosti z věty pro tento jednoduchý příklad?



$$f(x, y, z) = (x, 0, 0)$$

LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podobně jako Greenova věta, dá se i Gaussova–Ostrogradského věta vyslovit pro konečná sjednocení ploch.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako Greenova věta, dá se i Gaussova–Ostrogradského věta vyslovit pro konečná sjednocení ploch.



Je to stále jenom varianta základní věty analýzy? A pokud tomu dobře rozumím, jde o zákon zachování všeho. A nejobecnější variantu asi nikdy nenajdeme.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako Greenova věta, dá se i Gaussova–Ostrogradského věta vyslovit pro konečná sjednocení ploch.



Je to stále jenom varianta základní věty analýzy? A pokud tomu dobře rozumím, jde o zákon zachování všeho. A nejobecnější variantu asi nikdy nenajdeme.



Brzy najdeme nejobecnější formulaci.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

V *Otázkách* je naznačen důkaz Gaussova–Ostrogradského vzorce pro kvádr. Myšlenka důkazu pro obecné přípustné těleso je obdobná jako v případě Greenovy věty:



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

V *Otázkách* je naznačen důkaz Gaussova–Ostrogradského vzorce pro kvádr. Myšlenka důkazu pro obecné přípustné těleso je obdobná jako v případě Greenovy věty:



Těleso se pokryje nepřekrývajícími se kvádry a integrál přes těleso je součet integrálů přes jednotlivé kvádry, které se vyjádří podle již dokázaného vzorce jako plošné integrály 2.druhu přes povrch kvádrů.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

V *Otázkách* je naznačen důkaz Gaussova–Ostrogradského vzorce pro kvádr. Myšlenka důkazu pro obecné přípustné těleso je obdobná jako v případě Greenovy věty:



Těleso se pokryje nepřekrývajícími se kvádry a integrál přes těleso je součet integrálů přes jednotlivé kvádry, které se vyjádří podle již dokázaného vzorce jako plošné integrály 2.druhu přes povrch kvádrů.



Vzhledem k opačným orientacím se plošné integrály přes jednotlivé stěny vyruší. Dá se očekávat, že zbude plošný integrál přes hranici tělesa.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

V *Otázkách* je naznačen důkaz Gaussova–Ostrogradského vzorce pro kvádr. Myšlenka důkazu pro obecné přípustné těleso je obdobná jako v případě Greenovy věty:



Těleso se pokryje nepřekrývajícími se kvádry a integrál přes těleso je součet integrálů přes jednotlivé kvádry, které se vyjádří podle již dokázaného vzorce jako plošné integrály 2.druhu přes povrch kvádrů.



Vzhledem k opačným orientacím se plošné integrály přes jednotlivé stěny vyruší. Dá se očekávat, že zbude plošný integrál přes hranici tělesa.



Pokud se hranice tělesa skládá z obdélníků rovnoběžných se souřadnicovými rovinami, je zřejmě poslední věta předchozího odstavce platná. To bude případ, že se použilo konečně mnoho pokrývacích kvádrů.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

V *Otázkách* je naznačen důkaz Gaussova–Ostrogradského vzorce pro kvádr. Myšlenka důkazu pro obecné přípustné těleso je obdobná jako v případě Greenovy věty:



Těleso se pokryje nepřekrývajícími se kvádry a integrál přes těleso je součet integrálů přes jednotlivé kvádry, které se vyjádří podle již dokázaného vzorce jako plošné integrály 2.druhu přes povrch kvádrů.



Vzhledem k opačným orientacím se plošné integrály přes jednotlivé stěny vyruší. Dá se očekávat, že zbude plošný integrál přes hranici tělesa.



Pokud se hranice tělesa skládá z obdélníků rovnoběžných se souřadnicovými rovinami, je zřejmě poslední věta předchozího odstavce platná. To bude případ, že se použilo konečně mnoho pokrývacích kvádrů.



Nyní stačí uvážit, že až na libovolné ε lze jak trojrozměrný integrál tak i potřebný plošný integrál nahradit integrály přes takové konečné sjednocení, resp. přes jeho hranici.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Gaussova–Ostrogradského vzorec má široké použití v přírodních vědách. Např. pomocí tohoto vzorce lze odvodit Archimedův zákon.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Gaussova–Ostrogradského vzorec má široké použití v přírodních vědách. Např. pomocí tohoto vzorce lze odvodit Archimedův zákon.



Používá se i v teorii gravitace.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Gaussova–Ostrogradského vzorec má široké použití v přírodních vědách. Např. pomocí tohoto vzorce lze odvodit Archimedův zákon.



Používá se i v teorii gravitace.



Kdo je ten Gravitac?

LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pomocí Gaussova–Ostrogradského vzorce se dá ukázat, že harmonická funkce $f(x, y, z)$ na tělese s hranicí tvaru jednoduše uzavřené plochy, je jednoznačně určena svými hodnotami na hranici. (f se nazývá harmonická, pokud $(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2 = 0$.)



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí Gaussova–Ostrogradského vzorce se dá ukázat, že harmonická funkce $f(x, y, z)$ na tělese s hranicí tvaru jednoduše uzavřené plochy, je jednoznačně určena svými hodnotami na hranici. (f se nazývá harmonická, pokud $(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2 = 0$.)



To je úžasná věc. Konečně harmonie v matematice.

Konec poznámek 4.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
plocha
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

1. Vypočtěte plošný integrál 2.druhu z funkce (x, y, z) na sféře $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty vypočtete plošný integrál 2.druhu z funkce (xy, yz, xz) na povrchu krychle o délce hrany 1, se stranami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, procházející body $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$. [3/2]

Konec příkladů 4.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

Dokažte Gaussův–Ostrogradského vzorec pro kvádr K se stěnami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, tj. pro $K = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

Dokažte Gaussův–Ostrogradského vzorec pro kvádr K se stěnami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, tj. pro $K = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.



Postupujte podobně jako u důkazu Greenovy věty pro obdélník.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

Dokažte Gaussův–Ostrogradského vzorec pro kvádr K se stěnami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, tj. pro $K = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.



Postupujte podobně jako u důkazu Greenovy věty pro obdélník.



Nejdříve upravte $\int_K \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx dy dz$ podle definice trojrozměrného integrálu.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

Dokažte Gaussův–Ostrogradského vzorec pro kvádr K se stěnami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, tj. pro $K = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.



Postupujte podobně jako u důkazu Greenovy věty pro obdélník.



Nejdříve upravte $\int_K \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx dy dz$ podle definice trojrozměrného integrálu.



Potom rozepište $\oint_{\partial K} (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy)$ podle jednotlivých stěn kváдру a porovnejte s výsledkem z předchozího odstavce.



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

Dokažte Gaussův–Ostrogradského vzorec pro kvádr K se stěnami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, tj. pro $K = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.



Postupujte podobně jako u důkazu Greenovy věty pro obdélník.



Nejdříve upravte $\int_K \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx dy dz$ podle definice trojrozměrného integrálu.



Potom rozepište $\oint_{\partial K} (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy)$ podle jednotlivých stěn kváдру a porovnejte s výsledkem z předchozího odstavce.



Děkuji :-)



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

- Gauss-Ostrogradskij
- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

Dokažte Gaussův–Ostrogradského vzorec pro kvádr K se stěnami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, tj. pro $K = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.



Postupujte podobně jako u důkazu Greenovy věty pro obdélník.



Nejdříve upravte $\int_K \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx dy dz$ podle definice trojrozměrného integrálu.



Potom rozepište $\oint_{\partial K} (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy)$ podle jednotlivých stěn kváдру a porovnejte s výsledkem z předchozího odstavce.



Děkuji :-)



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.druhu vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

- Gauss-Ostrogradskij
- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kdo je hravý analytik, ten to
hravě zvládne.

Konec otázek 4.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STOKESOVA VĚTA



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STOKESOVA VĚTA



Greenovu větu lze přenést o dimenzi výše ještě jedním způsobem, a to na prostorovou křivku, která je hranicí nějaké plochy.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STOKESOVA VĚTA



Greenovu větu lze přenést o dimenzi výše ještě jedním způsobem, a to na prostorovou křivku, která je hranicí nějaké plochy.



Na rozdíl od Gaussovy–Ostrogradského věty se bude v tomto případě vycházet z Greenova vzorce pro skalární součin funkce a tečného vektoru:



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STOKESOVA VĚTA



Greenovu větu lze přenést o dimenzi výše ještě jedním způsobem, a to na prostorovou křivku, která je hranicí nějaké plochy.



Na rozdíl od Gaussovy–Ostrogradského věty se bude v tomto případě vycházet z Greenova vzorce pro skalární součin funkce a tečného vektoru:



VĚTA. Necht' C je jednoduše uzavřená křivka v prostoru, která je krajem po částech hladké plochy ιC . Necht' C i ιC leží v otevřené množině G , na které je definována funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G . Pak platí

$$\oint_C (f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz) = \int_{\iota C} \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \right).$$

LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako Greenova věta, dá se i Stokesova věta vyslovit pro plochy mající za kraj konečná sjednocení jednoduše uzavřených křivek v prostoru.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako Greenova věta, dá se i Stokesova věta vyslovit pro plochy mající za kraj konečná sjednocení jednoduše uzavřených křivek v prostoru.



Bla, bla, bla? Proč by ne.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

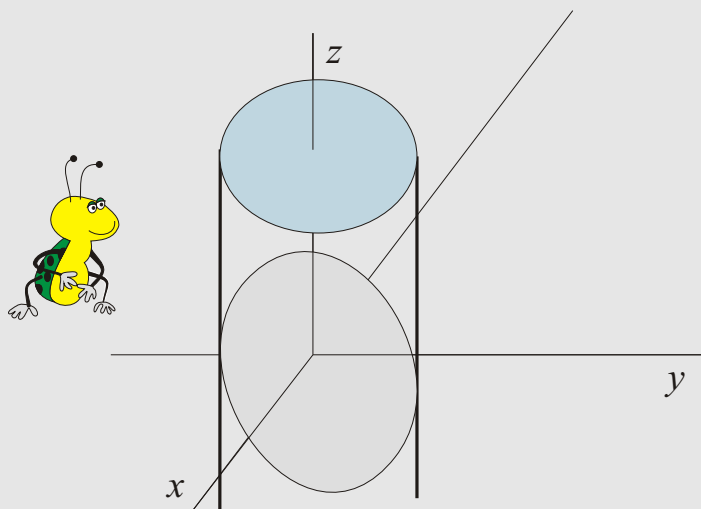
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

1. Vypočtěte pomocí Stokesovy věty $\oint_C (y \, dx + z \, dy + x \, dz)$ přes kružnici $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x + y + z = 0\}$.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Vypočtete pomocí Stokesovy věty $\oint_C (y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz)$ přes obvod trojúhelníka s vrcholy $(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$ a to jak přes „vnitřek“ tohoto trojúhelníka, tak přes tři trojúhelníky spojující vždy dva vrcholy s počátkem.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Vypočtete pomocí Stokesovy věty plošný integrál z funkce $(y, -x, 0)$ přes horní polosféru $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0\}$.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Vypočtěte pomocí Stokesovy věty plošný integrál z funkce $(y, -x, 0)$ přes horní polosféru $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0\}$.



Získaný křivkový integrál spočtěte pomocí Greenovy věty.

Konec příkladů 5.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 5 :



Dokažte Stokesovu větu následujícím postupem.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha

spojení ploch

hladká plocha

kraj plochy

po částech hladká

plocha

jedn.uzavřená

plocha

orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 5 :



Dokažte Stokesovu větu následujícím postupem.



Pro jednoduchost předpokládejte $f_2 = f_3 = 0$.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha

spojení ploch

hladká plocha

kraj plochy

po částech hladká

plocha

jedn.uzavřená

plocha

orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 5 :



Dokažte Stokesovu větu následujícím postupem.



Pro jednoduchost předpokládejte $f_2 = f_3 = 0$.



Nechť má ιC parametrizaci $\Phi = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v))$ na intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$ a obvod I se zobrazí na křivku C pomocí 4 zobrazení $\Phi(t, 0)$, $\Phi(1, t)$, $\Phi(t, 1)$, $\Phi(0, t)$ na $[0, 1]$.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedm.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr. popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 5 :



Dokažte Stokesovu větu následujícím postupem.



Pro jednoduchost předpokládejte $f_2 = f_3 = 0$.



Nechť má ιC parametrizaci $\Phi = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v))$ na intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$ a obvod I se zobrazí na křivku C pomocí 4 zobrazení $\Phi(t, 0)$, $\Phi(1, t)$, $\Phi(t, 1)$, $\Phi(0, t)$ na $[0, 1]$.



Vyjádřete integrál $\oint_C (f_1(x, y, z) dx)$ podle definice pomocí zobrazení z obvodu I a dostanete $\oint_{\partial I} (f_1 \varphi_u du + f_1 \varphi_v dv)$.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr. popis 2.dr. vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na tento integrál použijte Greenovu větu a dostanete

$$\int_I (f_{1z}(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v))J(\tau, \varphi) du dv + \\ - \int_I (f_{1y}(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v))J(\varphi, \psi) du dv .$$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na tento integrál použijte Greenovu větu a dostanete

$$\int_I (f_{1z}(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v))) J(\tau, \varphi) du dv + \\ - \int_I (f_{1y}(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v))) J(\varphi, \psi) du dv .$$



Srovnejte tento výsledek s popisem plošného integrálu 2.druhu pomocí parametrizace (pozor na znaménka). Měli byste dostat $\int_{iC} f_{1z}(x, y, z) dz dx - f_{1y}(x, y, z) dx dy$.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na tento integrál použijte Greenovu větu a dostanete

$$\int_I (f_{1z}(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v))) J(\tau, \varphi) du dv + \\ - \int_I (f_{1y}(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v))) J(\varphi, \psi) du dv .$$



Srovnejte tento výsledek s popisem plošného integrálu 2.druhu pomocí parametrizace (pozor na znaménka). Měli byste dostat $\int_{iC} f_{1z}(x, y, z) dz dx - f_{1y}(x, y, z) dx dy$.



Totéž se provede pro funkce $(0, f_2, 0)$ a $(0, 0, f_3)$ a výsledky se sečtou.



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

- Gauss-Ostrogradskij
- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Rozmyslete si Stokesovu větu. BTW, nechcete si vymyslet svoji větu?



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Rozmyslete si Stokesovu větu. BTW, nechcete si vymyslet svoji větu?



Moje věta? Počkám do jara, jestli na Stokesově větě něco nevyraší.

Konec otázek 5.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ



Obdobně jako u křivkových integrálů, se nyní dají počítat velikosti ploch a jejich těžiště.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ



Obdobně jako u křivkových integrálů, se nyní dají počítat velikosti ploch a jejich těžiště.



Pro tuto velikost bude používán termín *míra*.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ



Obdobně jako u křivkových integrálů, se nyní dají počítat velikosti ploch a jejich těžiště.



Pro tuto velikost bude používán termín *míra*.



Míra ani těžiště ploch nebyly definovány, následující popis je zde brán jako definice.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE.

1. Míra po částech hladké plochy P je rovna $\int_P dS$.
2. Hmotnost zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P je rovna $\int_P h dS$, kde h je funkce na P udávající hustotu.
3. Těžiště zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P mající hustotu h má souřadnice

$$T_x = \frac{\int_P xh dS}{m}, T_y = \frac{\int_P yh dS}{m}, T_z = \frac{\int_P zh dS}{m},$$

kde m je hmotnost desky.



LEKCE23-IPL

- plochy
 - uzavřená plocha
 - spojení ploch
 - hladká plocha
 - kraj plochy
 - po částech hladká plocha
 - jedn.uzavřená plocha
 - orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
 - vlastnosti 1.dr.
 - směrové kosiny
 - popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
 - vlastnosti 2.dr.
 - popis 2.dr.
 - vztah 1.2.dr.
- Gauss-Ostrogradskij
- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE.

1. Míra po částech hladké plochy P je rovna $\int_P dS$.
2. Hmotnost zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P je rovna $\int_P h dS$, kde h je funkce na P udávající hustotu.
3. Těžiště zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P mající hustotu h má souřadnice

$$T_x = \frac{\int_P xh dS}{m}, T_y = \frac{\int_P yh dS}{m}, T_z = \frac{\int_P zh dS}{m},$$

kde m je hmotnost desky.



V integrálech se musí za x, y, z, dS dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je plocha P popsána.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE.

1. Míra po částech hladké plochy P je rovna $\int_P dS$.
2. Hmotnost zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P je rovna $\int_P h dS$, kde h je funkce na P udávající hustotu.
3. Těžiště zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P mající hustotu h má souřadnice

$$T_x = \frac{\int_P xh dS}{m}, T_y = \frac{\int_P yh dS}{m}, T_z = \frac{\int_P zh dS}{m},$$

kde m je hmotnost desky.



V integrálech se musí za x, y, z, dS dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je plocha P popsána.



Čitatelé ve vzorcích pro těžiště jsou momenty (statické) plochy vzhledem k rovinám yz nebo xz nebo xy resp.



LEKCE23-IPL

plochy
uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.
Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Opět stejně jako u použití Greenovy věty pro míry rovinných obrazců, lze použít Gaussovu–Ostrogradského větu pro výpočet objemu tělesa. Postup je zcela stejný.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Opět stejně jako u použití Greenovy věty pro míry rovinných obrazců, lze použít Gaussovu–Ostrogradského větu pro výpočet objemu tělesa. Postup je zcela stejný.



Je-li G otevřená podmnožina prostoru mající za hranici uzavřenou po částech hladkou plochu ∂G , pak objem $V(G)$ tělesa G (nebo jeho uzávěru \overline{G}) je roven

$$V(G) = \int_{\partial G} x \, dy \, dz = \int_{\partial G} y \, dx \, dz = \int_{\partial G} z \, dx \, dy = \frac{1}{3} \int_{\partial G} (x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + x \, dx \, dy).$$

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha

spojení ploch

hladká plocha

kraj plochy

po částech hladká

plocha

jedn.uzavřená

plocha

orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 6 :

Stokesovu větu lze použít na výpočet obsahu plochy křivkovým integrálem přes kraj plochy (podobně jako Greenovu větu na výpočet obsahu rovinného obrazce pomocí křivkového integrálu) – viz *Otázky*. Tento přístup se příliš nepoužívá.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Obecně si můžeme zkusit algebraickou formičku:



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Obecně si můžeme zkusit algebraickou formičku:



* $(n.k)$ -rozměrná Greenova věta.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Obecně si můžeme zkusit algebraickou formičku:



* $(n.k)$ -rozměrná Greenova věta.



Obě zobecnění Greenovy věty na Stokesovu a Gaussovu–Ostrogradského se zdají být zcela různá a nepodobná. Avšak není tomu tak. Existuje obecná věta, jejíž speciální případy jsou všechny tři uvedené věty.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedm.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Obecně si můžeme zkusit algebraickou formičku:



* $(n.k)$ -rozměrná Greenova věta.



Obě zobecnění Greenovy věty na Stokesovu a Gaussovu–Ostrogradského se zdají být zcela různá a nepodobná. Avšak není tomu tak. Existuje obecná věta, jejíž speciální případy jsou všechny tři uvedené věty.



Jsou vidět alespoň dvě společné věci těchto vzorců: integrál přes geometrický útvar se převádí na integrál přes jeho hranici, přičemž na hranici se bere daná funkce a na celém

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedm.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

útvary se berou jisté kombinace derivací funkce.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecná věta vypadá následovně:

$$\int_P d\omega = \int_{\partial P} \omega,$$

kde P je k -dimenzionální „hezká“ plocha v \mathbb{R}^n s „hezkým“ krajem ∂P a ω je tzv. $(k-1)$ -forma na P .



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecná věta vypadá následovně:

$$\int_P d\omega = \int_{\partial P} \omega,$$

kde P je k -dimenzionální „hezká“ plocha v \mathbb{R}^n s „hezkým“ krajem ∂P a ω je tzv. $(k-1)$ -forma na P .



Podle definice má k -forma ω tvar $\sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecná věta vypadá následovně:

$$\int_P d\omega = \int_{\partial P} \omega,$$

kde P je k -dimenzionální „hezká“ plocha v \mathbb{R}^n s „hezkým“ krajem ∂P a ω je tzv. $(k-1)$ -forma na P .



Podle definice má k -forma ω tvar $\sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$.



A samozřejmě 0-forma je $f(x_1, \dots, x_n)$.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecná věta vypadá následovně:

$$\int_P d\omega = \int_{\partial P} \omega,$$

kde P je k -dimenzionální „hezká“ plocha v \mathbb{R}^n s „hezkým“ krajem ∂P a ω je tzv. $(k-1)$ -forma na P .



Podle definice má k -forma ω tvar $\sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$.



A samozřejmě 0-forma je $f(x_1, \dots, x_n)$.



Potom

$$d\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_l} dx_l dx_{i_1} \dots dx_{i_k} \right).$$



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecná věta vypadá následovně:

$$\int_P d\omega = \int_{\partial P} \omega,$$

kde P je k -dimenzionální „hezká“ plocha v \mathbb{R}^n s „hezkým“ krajem ∂P a ω je tzv. $(k-1)$ -forma na P .



Podle definice má k -forma ω tvar $\sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$.



A samozřejmě 0-forma je $f(x_1, \dots, x_n)$.



Potom

$$d\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_l} dx_l dx_{i_1} \dots dx_{i_k} \right).$$



Je-li plocha P dána parametricky pomocí $x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_k)$, kde $(u_1, \dots, u_k) \in D \subset \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$\int_P \omega = \int_D \left(f_{i_1, \dots, i_k}(\varphi_1(u_1, \dots, u_k), \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_k)) J(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}) \right) du_1 \dots du_k.$$

kde J jsou příslušné Jakobiány.

LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dosazením různých hodnot
pro $1 \leq k \leq n$ se dostanou
známá tvrzení:



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dosazením různých hodnot
pro $1 \leq k \leq n$ se dostanou
známá tvrzení:



Pro $k = n = 1$ se dostane rovnost $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dosazením různých hodnot
pro $1 \leq k \leq n$ se dostanou
známá tvrzení:



Pro $k = n = 1$ se dostane rovnost $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.



Pro $k = n = 2$ se dostane Greenova věta.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dosazením různých hodnot
pro $1 \leq k \leq n$ se dostanou
známá tvrzení:



Pro $k = n = 1$ se dostane rovnost $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.



Pro $k = n = 2$ se dostane Greenova věta.



Pro $k = n = 3$ se dostane Gaussova–Ostrogradského věta.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dosazením různých hodnot
pro $1 \leq k \leq n$ se dostanou
známá tvrzení:



Pro $k = n = 1$ se dostane rovnost $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.



Pro $k = n = 2$ se dostane Greenova věta.



Pro $k = n = 3$ se dostane Gaussova–Ostrogradského věta.



Pro $k = 2, n = 3$ se dostane Stokesova věta.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Ozkoušejte, co se dostane v případech $k = 1, n = 2, k = 1, n = 3$.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin. uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ozkoušejte, co se dostane v případech $k = 1, n = 2, k = 1, n = 3$.



Pochopil jsem jediň, že $dx_1 dx_2 = - dx_2 dx_1$ a tedy $dx_1 dx_1 = 0$. Smysl mi to nedává.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ozkoušejte, co se dostane v případech $k = 1, n = 2, k = 1, n = 3$.



Pochopil jsem jediňě, že $dx_1 dx_2 = - dx_2 dx_1$ a tedy $dx_1 dx_1 = 0$. Smysl mi to nedává.



Cítíš tam to "vektorovo" a "algebraično"? To dělali algebraický skřítci a to se pak nediv ...

LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec poznámek 6.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 6 :

1. Najděte těžiště horní polosféry.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte těžiště desky ve tvaru daném funkcí $z = x^2 + y^2$ pro $z \in [0, 1]$, která má hustotu v bodě (x, y, z) rovnou z .



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Vypočtete objem koule pomocí křivkových integrálů.

Konec příkladů 6.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 6 :

1. Ověřte vzorce pro objem $V(G)$ tělesa G pomocí křivkových integrálů.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte vzorce pro výpočet obsahu plochy pomocí křivkového integrálu přes kraj plochy.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte vzorce pro výpočet obsahu plochy pomocí křivkového integrálu přes kraj plochy.



Ve Stokesově větě se musí nejdříve plošný integrál 2.druhu převést na plošný integrál 1.druhu (např. pomocí směrových kosinů).



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte vzorce pro výpočet obsahu plochy pomocí křivkového integrálu přes kraj plochy.



Ve Stokesově větě se musí nejdříve plošný integrál 2.druhu převést na plošný integrál 1.druhu (např. pomocí směrových kosinů).



Pak se musí zvolit funkce f tak, aby odpovídající funkce v získaném plošném integrálu 1.druhu byla rovna 1.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte vzorce pro výpočet obsahu plochy pomocí křivkového integrálu přes kraj plochy.



Ve Stokesově větě se musí nejdříve plošný integrál 2.druhu převést na plošný integrál 1.druhu (např. pomocí směrových kosinů).



Pak se musí zvolit funkce f tak, aby odpovídající funkce v získaném plošném integrálu 1.druhu byla rovna 1.



Je to vždy možné?

Konec otázek 6.

LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STANDARDY z kapitoly

PLOŠNÉ INTEGRÁLY



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOCHY



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOCHY



Parametrizace plochy je vlastně udělání dvojrozměrného plánu.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

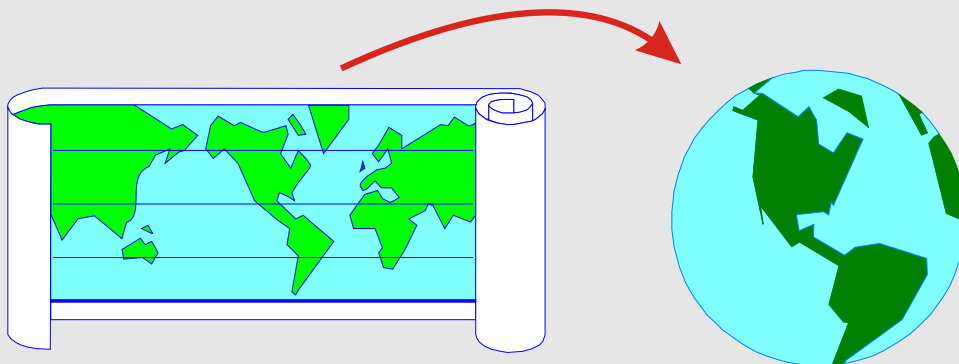
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOCHY



Parametrizace plochy je vlastně uděláním dvojrozměrného plánu.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Musí se vlastně daná plocha
"osahat".



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

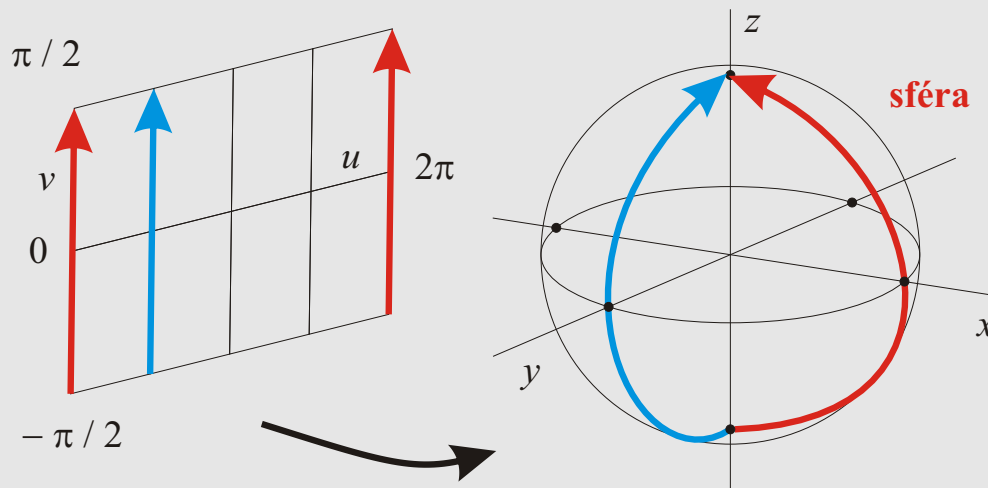
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Musí se vlastně daná plocha "osahat".



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Plocha je množina $\{(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)); (u, v) \in I\}$, kde $\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Plocha je množina $\{(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)); (u, v) \in I\}$, kde $\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.



Předchozí plocha se nazývá **uzavřená**, jestliže I je uzavřený a všechny body z hranice I se zobrazí do jediného bodu.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť P_1, P_2 jsou plochy zadané na intervalech I_1, I_2 resp., které mají společnou jednu svou stranu. **Spojení** ploch P_1, P_2 je pak jejich sjednocení definované na $I_1 \cup I_2$. Značí se $P_1 + P_2$.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť P_1, P_2 jsou plochy zadané na intervalech I_1, I_2 resp., které mají společnou jednu svou stranu. **Spojení** ploch P_1, P_2 je pak jejich sjednocení definované na $I_1 \cup I_2$. Značí se $P_1 + P_2$.



Indukcí lze tento pojem zavést pro spojení konečně mnoha ploch.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Plocha zadaná parametry $\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)$ na intervalu I se nazývá **hladká**, jestliže platí:

1. funkce φ, ψ, τ mají spojité první parciální derivace na I ;
2. pro každé $(u, v) \in I$ má matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{pmatrix}$$

hodnost 2;

3. každý bod plochy je obrazem jediného bodu $(u, v) \in I$ s jedinou možnou výjimkou: obrazy bodů z hranice I mohou splývat.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro další část je důležitý pojem **kraj** plochy P .



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro další část je důležitý pojem **kraj** plochy P .



Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v \mathbb{R}^3 (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
plocha
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro další část je důležitý pojem **kraj** plochy P .



Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v \mathbb{R}^3 (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.



Pro představu si vezměte kruh, jakkoli položený v prostoru, třeba i zvlněný. Je jasné, co znamená kraj tohoto obrazce.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro další část je důležitý pojem **kraj** plochy P .



Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v \mathbb{R}^3 (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.



Pro představu si vezměte kruh, jakkoli položený v prostoru, třeba i zvlněný. Je jasné, co znamená kraj tohoto obrazce.



Plocha s prázdným krajem je totéž, co uzavřená plocha.

LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.



Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.



Povrch krychle nebo válce jsou příklady po částech hladké uzavřené plochy.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.



Povrch krychle nebo válce jsou příklady po částech hladké uzavřené plochy.



Každá po částech hladká plocha je parametricky zadaná reálnými spojitými funkcemi $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\tau(u, v)$, které jsou definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině, přičemž $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\tau(u, v)$ mají spojitě parciální derivace všude v I kromě konečně mnoha úseček.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká plocha P , parametricky zadaná zobrazením Φ na uzavřeném intervalu I , se nazývá **jednoduše uzavřená** jestliže Φ je prosté na vnitřku I , konstantní na hranici I s hodnotou různou od hodnot na vnitřku I .



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Po částech hladká plocha P , parametricky zadaná zobrazením Φ na uzavřeném intervalu I , se nazývá **jednoduše uzavřená** jestliže Φ je prosté na vnitřku I , konstantní na hranici I s hodnotou různou od hodnot na vnitřku I .



Jednoduše uzavřená plocha P rozděluje prostor na dvě souvislé části, jednu omezenou, zvanou vnitřek (značení ιP) a druhou neomezenou.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Orientace plochy znamená, že lze mluvit o dvou stranách plochy, jedna se označí za kladnou a druhá za zápornou.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

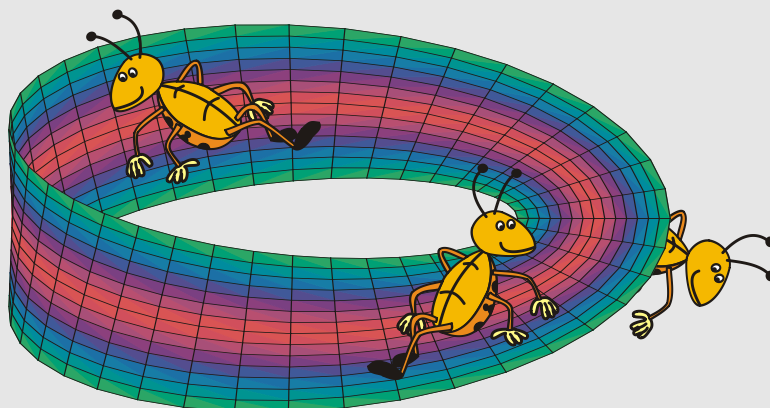
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ne všechny plochy lze orientovat – typickou neorientovatelnou plochou je Möbiův list.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.



U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jeden.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.



U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.



U grafů funkcí dvou proměnných se za kladnou stranu bere horní strana.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin. uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.



U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.



U grafů funkcí dvou proměnných se za kladnou stranu bere horní strana.



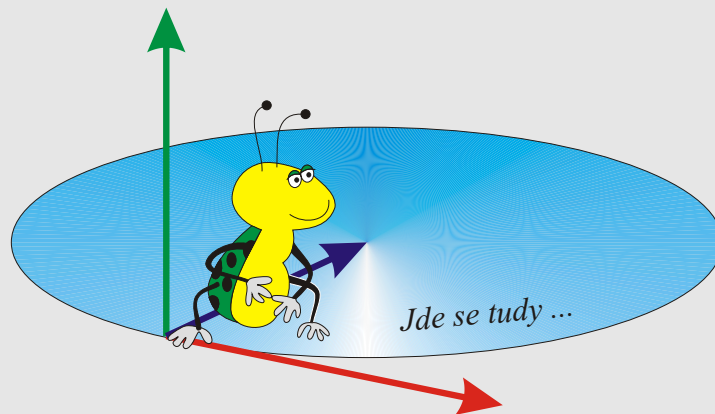
Orientace hladké plochy znamená, že v každém jejím bodě je určen směr normály a to spojitým způsobem: jestliže půjdete po jednoduše uzavřené křivce na dané ploše, musíte dojít do výchozího bodu ve stejné poloze.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.
Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li orientovaná křivka C částí kraje orientované plochy P , říká se, že obě orientace jsou **souhlasné**, jestliže při chůzi po křivce v kladném směru a po kladné straně plochy, máte plochu po levé straně.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

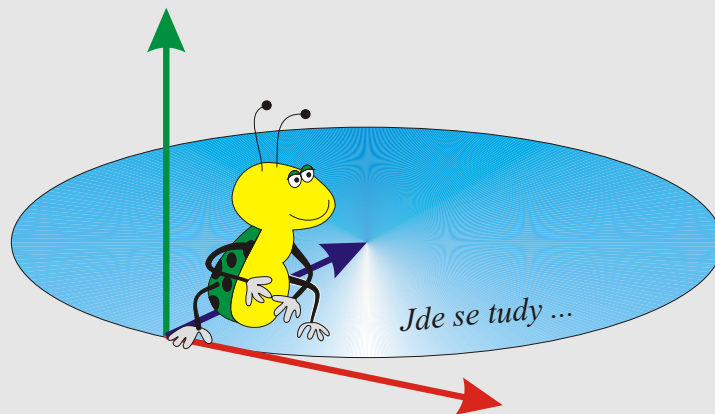
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li orientovaná křivka C částí kraje orientované plochy P , říká se, že obě orientace jsou **souhlasné**, jestliže při chůzi po křivce v kladném směru a po kladné straně plochy, máte plochu po levé straně.



Nebude-li řečeno jinak, bude se vždy předpokládat, že plochy a jejich kraje jsou orientovány souhlasně.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Musí se dávat pozor při **orientaci po částech hladkých ploch**, protože ve styčných hranách obecně neexistují normály.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Musí se dávat pozor při **orientaci po částech hladkých ploch**, protože ve styčných hranách obecně neexistují normály.



Necht' jsou jednotlivé spojované plochy orientovány a necht' jejich kraje jsou uzavřené křivky, které jsou orientovány souhlasně s příslušnými plochami. Pak je celá plocha orientována, jestliže části krajů, které se stýkají (právě dvě) jsou navzájem orientovány opačně.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



V bodě (x, y, z) plochy se velmi malá ploška dS okolo tohoto bodu dá považovat za rovinou a zjistí se poměr její velikosti ku poměru jejího průmětu, např. do roviny xy (není-li tento průmět úsečka nebo bod).



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



V bodě (x, y, z) plochy se velmi malá ploška dS okolo tohoto bodu dá považovat za rovinou a zjistí se poměr její velikosti ku poměru jejího průmětu, např. do roviny xy (není-li tento průmět úsečka nebo bod).



V rovině xy má průmět velikost $dx \cdot dy$. Skutečná ploška má velikost větší, a to $dS = dx \cdot dy / |\cos \gamma|$, kde γ je úhel, který svírá normála k ploše v (x, y, z) s rovnoběžkou v (x, y, z) s osou z v kladném směru.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU



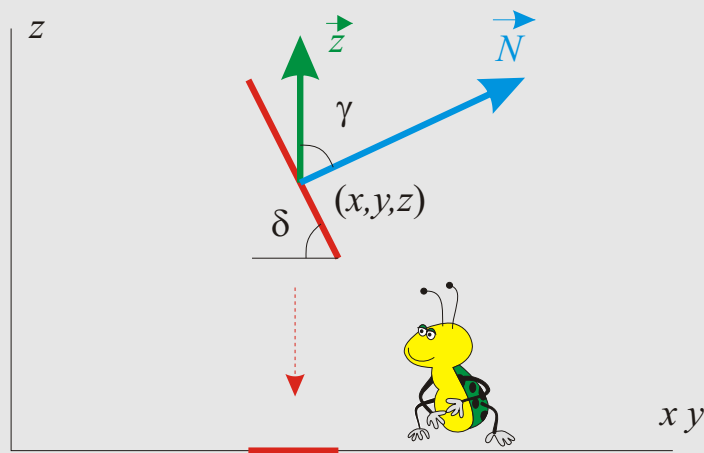
V bodě (x, y, z) plochy se velmi malá ploška dS okolo tohoto bodu dá považovat za rovinnou a zjistí se poměr její velikosti ku poměru jejího průmětu, např. do roviny xy (není-li tento průmět úsečka nebo bod).



V rovině xy má průmět velikost $dx \cdot dy$. Skutečná ploška má velikost větší, a to $dS = dx \cdot dy / |\cos \gamma|$, kde γ je úhel, který svírá normála k ploše v (x, y, z) s rovnoběžkou v (x, y, z) s osou z v kladném směru.



Je nutné předpokládat, že $|\cos \gamma| \neq 0$, tj., že ploška není rovnoběžná s osou z .



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

- Gauss-Ostrogradskij
- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle druhé podmínky definice hladkých ploch musí být v každém bodě plochy aspoň jeden uvedený kosinus nenulový.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle druhé podmínky definice hladkých ploch musí být v každém bodě plochy aspoň jeden uvedený kosinus nenulový.



Plocha se rozdělí na nejvýše tři části, a v každé je jeden daný kosinus nenulový. Integrál přes plochu P je pak součtem integrálů přes tyto části.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle druhé podmínky definice hladkých ploch musí být v každém bodě plochy aspoň jeden uvedený kosinus nenulový.



Plocha se rozdělí na nejvýše tři části, a v každé je jeden daný kosinus nenulový. Integrál přes plochu P je pak součtem integrálů přes tyto části.



Podle volby takové části se berou průměty i do rovin xz nebo yz a dostávají se velikosti plošek $dx \cdot dz / |\cos \beta|$, resp. $dy \cdot dz / |\cos \alpha|$, kde úhly β, α jsou opět úhly mezi normálou a příslušnými osami (y , resp. x). Kosiny těchto úhlů se nazývají *směrové kosiny* normály.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Bude zadefinován integrál 1. druhu přes projekci M plochy na rovinu xy .



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin. uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1. druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Bude zadefinován integrál 1. druhu přes projekci M plochy na rovinu xy .



DEFINICE. Necht' f je funkce zadaná na hladké ploše P , na které je v každém bodě $\cos \gamma \neq 0$. Pak se definuje **plošný integrál 1.druhu** funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S) \, dS = \int_M f(S) \frac{dx \, dy}{|\cos \gamma|}.$$



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
plocha
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Bude zadefinován integrál 1. druhu přes projekci M plochy na rovinu xy .



DEFINICE. Necht' f je funkce zadaná na hladké ploše P , na které je v každém bodě $\cos \gamma \neq 0$. Pak se definuje **plošný integrál 1.druhu** funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S) \, dS = \int_M f(S) \frac{dx \, dy}{|\cos \gamma|}.$$



Na pravé straně je dvojrozměrný integrál, v něm se za proměnné S, x, y, γ musí dosadit příslušné hodnoty (viz dále).



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
plocha po částech
hladká plocha
jedin. uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Bude zadefinován integrál 1. druhu přes projekci M plochy na rovinu xy .



DEFINICE. Necht' f je funkce zadaná na hladké ploše P , na které je v každém bodě $\cos \gamma \neq 0$. Pak se definuje **plošný integrál 1.druhu** funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S) \, dS = \int_M f(S) \frac{dx \, dy}{|\cos \gamma|}.$$



Na pravé straně je dvojrozměrný integrál, v něm se za proměnné S, x, y, γ musí dosadit příslušné hodnoty (viz dále).



Požadavek nenulovosti směrového kosinu lze oslabit podmínkou, že může nabývat 0 jen na malé množině (nulové).



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Úhel γ se samozřejmě mění spolu s bodem (x, y, z) a pro výpočet plošného integrálu je obvykle třeba $\cos \gamma$ vyjádřit pomocí nějakých souřadnic.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Úhel γ se samozřejmě mění spolu s bodem (x, y, z) a pro výpočet plošného integrálu je obvykle třeba $\cos \gamma$ vyjádřit pomocí nějakých souřadnic.



VĚTA. Necht' plocha P je grafem funkce $h(x, y)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}.$$



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Plochy však bývají ponejvíce zadány parametricky. Tam je potřeba k přepočítání plošného elementu plochy dS na plošný element intervalu parametrů $du dv$ zapotřebí velikost normálního vektoru n k ploše v daném bodě.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Plochy však bývají ponejvíce zadány parametricky. Tam je potřeba k přepočítání plošného elementu plochy dS na plošný element intervalu parametrů $du dv$ zapotřebí velikost normálního vektoru \mathbf{n} k ploše v daném bodě.



Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A . Pak normálový vektor \mathbf{n} k ploše je vektorovým součinem vektorů parciálních derivací

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \tau}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \tau}{\partial v} \right)$$



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Plochy však bývají ponejvíce zadány parametricky. Tam je potřeba k přepočítání plošného elementu plochy dS na plošný element intervalu parametrů $du dv$ zapotřebí velikost normálního vektoru \mathbf{n} k ploše v daném bodě.



Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A . Pak normálový vektor \mathbf{n} k ploše je vektorovým součinem vektorů parciálních derivací

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \tau}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \tau}{\partial v} \right)$$



Vektorový součin vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ je definován

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní lze napsat převod plošného integrálu 1.druhu na obyčejný integrál přes rovinnou množinu.

VĚTA. Necht' f je funkce definovaná na hladké ploše P .

1. Necht' je plocha P grafem funkce h definované na množině A . Pak

$$\int_P f(S) \, dS = \int_A f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy.$$

2. Necht' je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A . Pak

$$\int_P f(S) \, dS = \int_A f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)) |\mathbf{n}| \, du \, dv.$$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

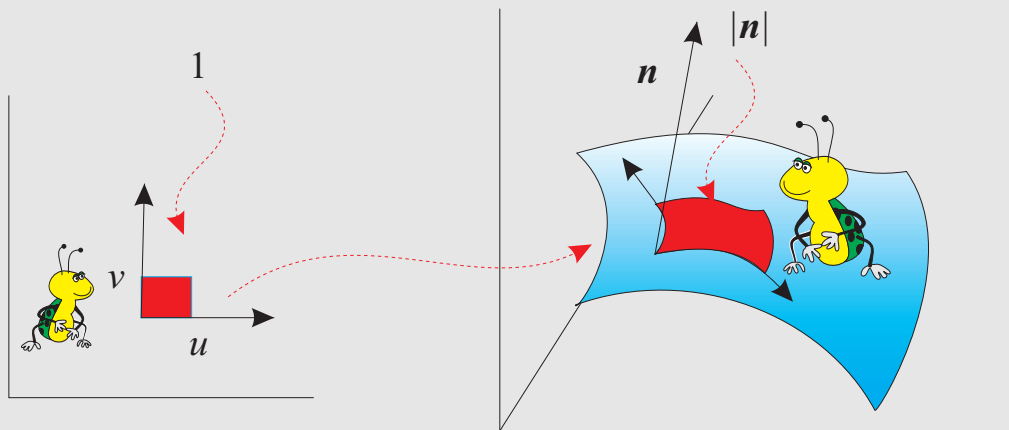
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočtete povrch koule B o poloměru a pomocí sférických souřadnic.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočtete povrch koule B o poloměru a pomocí sférických souřadnic.



Řešení. Máme vypočítat integrál

$$\int_{\partial B} 1 \, dS.$$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočítejte povrch koule B o poloměru a pomocí sférických souřadnic.



Řešení. Máme vypočítat integrál

$$\int_{\partial B} 1 \, dS.$$



Sféru ∂B tedy parametrizujeme

$$\varphi(u, v) = a \cos u \cos v, \quad \psi(u, v) = a \sin u \cos v, \quad \tau(u, v) = a \sin v,$$

kde

$$u \in (-\pi, \pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočítejte povrch koule B o poloměru a pomocí sférických souřadnic.



Řešení. Máme vypočítat integrál

$$\int_{\partial B} 1 \, dS.$$



Sféru ∂B tedy parametrizujeme

$$\varphi(u, v) = a \cos u \cos v, \quad \psi(u, v) = a \sin u \cos v, \quad \tau(u, v) = a \sin v,$$

kde

$$u \in (-\pi, \pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



Spočítáme parciální derivace

$$\partial_u(\varphi, \psi, \tau), \quad \partial_v(\varphi, \psi, \tau)$$

a spočítáme vektorový součin těchto dvou vektorů.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočítejte povrch koule B o poloměru a pomocí sférických souřadnic.



Řešení. Máme vypočítat integrál

$$\int_{\partial B} 1 \, dS.$$



Sféru ∂B tedy parametrizujeme

$$\varphi(u, v) = a \cos u \cos v, \quad \psi(u, v) = a \sin u \cos v, \quad \tau(u, v) = a \sin v,$$

kde

$$u \in (-\pi, \pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



Spočítáme parciální derivace

$$\partial_u(\varphi, \psi, \tau), \quad \partial_v(\varphi, \psi, \tau)$$

a spočítáme vektorový součin těchto dvou vektorů.



Výsledek označme $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Pak platí

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = a^4 \cos^2 v.$$

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dostáváme

$$\int_{\partial B} 1 \, dS = a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos v| \, dv \, du = 4\pi a^2.$$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zintegrujte funkci $x + y + z$ přes povrch krychle.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zintegrujte funkci $x + y + z$ přes povrch krychle.



Příklad. Vypočtěte $\int_P z^2 dS$, kde P je část kužele daná parametrizací

$$x = r \cos \varphi \sin \alpha, y = r \sin \varphi \sin \alpha, z = r \cos \alpha,$$

$r \in [0, a], \varphi \in [0, 2\pi]$ a $\alpha \in (0, \pi/2)$ je konstanta.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha

spojení ploch

hladká plocha

kraj plochy

po částech hladká

plocha

jedn.uzavřená

plocha

orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny

popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.

vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



Křivkové integrály 2.druhu vyjadřují např. tok kapaliny danou křivkou.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU



Křivkové integrály 2.druhu vyjadřují např. tok kapaliny danou křivkou.



Plošné integrály 2.druhu budou vyjadřovat tok kapaliny danou plochou.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



DEFINICE. Necht' P je hladká orientovaná plocha a $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3) . Pak se definuje **plošný integrál 2.druhu** funkce f přes P rovností

$$\int_P \mathbf{f} \cdot d\mathbf{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy) .$$



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Necht' P je hladká orientovaná plocha a $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3) . Pak se definuje **plošný integrál 2.druhu** funkce f přes P rovností

$$\int_P \mathbf{f} \cdot d\mathbf{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy) .$$



Integrál na pravé straně je součtem tří integrálů a každý lze brát přes projekci plochy P do příslušné roviny (yz nebo xz nebo xy resp.).



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Necht' P je hladká orientovaná plocha a $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3) . Pak se definuje **plošný integrál 2.druhu** funkce f přes P rovností

$$\int_P \mathbf{f} \cdot d\mathbf{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy) .$$



Integrál na pravé straně je součtem tří integrálů a každý lze brát přes projekci plochy P do příslušné roviny (yz nebo xz nebo xy resp.).



V definici je pro jednoduchost uvedena integrace přes celou rovinu (rozumí se, že integrovaná funkce se dodefinuje nulou ve zbývajících bodech).



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Necht' P je hladká orientovaná plocha a $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3) . Pak se definuje **plošný integrál 2.druhu** funkce f přes P rovností

$$\int_P \mathbf{f} \cdot d\mathbf{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy) .$$



Integrál na pravé straně je součtem tří integrálů a každý lze brát přes projekci plochy P do příslušné roviny (yz nebo xz nebo xy resp.).



V definici je pro jednoduchost uvedena integrace přes celou rovinu (rozumí se, že integrovaná funkce se dodefinuje nulou ve zbývajících bodech).



Podle uvedené definice plošného integrálu 2.druhu však nelze integrál většinou přímo počítat, protože např. $\int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x, y, z) dy dz)$ obsahuje i proměnnou x , která závisí na y a z . Tato závislost se musí do integrálu dosadit.



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr. popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Necht' P je hladká orientovaná plocha a $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3) . Pak se definuje **plošný integrál 2.druhu** funkce f přes P rovností

$$\int_P \mathbf{f} \cdot d\mathbf{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy) .$$



Integrál na pravé straně je součtem tří integrálů a každý lze brát přes projekci plochy P do příslušné roviny (yz nebo xz nebo xy resp.).



V definici je pro jednoduchost uvedena integrace přes celou rovinu (rozumí se, že integrovaná funkce se dodefinuje nulou ve zbývajících bodech).



Podle uvedené definice plošného integrálu 2.druhu však nelze integrál většinou přímo počítat, protože např. $\int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x, y, z) dy dz)$ obsahuje i proměnnou x , která závisí na y a z . Tato závislost se musí do integrálu dosadit.



Použije se věta o substituci na jednotlivé části integrálu podle toho, jak je plocha P zadaná.



LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P .

1. Necht' je plocha P grafem funkce g definované na množině A . Pak

$$\int_P f \, d\mathbf{S} = \int_A (-f_1(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x} \, dx \, dy - f_2(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y} \, dx \, dy + f_3(x, y, g(x, y)) \, dx \, dy).$$

$$\int_P f \, d\mathbf{S} = \int_A f(x, y, g(x, y)) \cdot \mathbf{n} \, dx \, dy,$$

kde $\mathbf{n} = (-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1)$ je normálový vektor k ploše.

2. Necht' je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A . Pak

$$\begin{aligned} \int_P f \, d\mathbf{S} &= \pm \int_A f_1(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)) J(\psi, \tau) \, du \, dv \\ &\pm \int_A f_2(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)) J(\varphi, \tau) \, du \, dv \\ &\pm \int_A f_3(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)) J(\varphi, \psi) \, du \, dv, \end{aligned}$$

kde znaménka před integrály se určí podle souhlasu orientace plochy s obvyklou orientací souřadnicových množin.

$$\int_P f \, d\mathbf{S} = \int_A f(x, y, g(x, y)) \cdot \mathbf{n} \, dx \, dy,$$

kde

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \tau}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \tau}{\partial v} \right)$$

je normálový vektor k ploše .

LEKCE23-IPL plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Necht' $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P . Potom

$$\int_P f \, d\mathbf{S} = \int_P (f_1(x, y, z) \cos \alpha + f_2(x, y, z) \cos \beta + f_3(x, y, z) \cos \gamma) \, dS,$$

$$\int_P f \, d\mathbf{S} = \int_P f \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \, dS,$$

kde uvedené kosiny jsou směrové kosiny v bodech $z \in P$. Ve druhém vyjádření jde o složku f ve směru normály k ploše (spočítáno skalárním součinem f a jednotkového vektoru

$$\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočtěte integrál

$$I = \int_M x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy,$$

kde M je sféra o poloměru a orientovaná ve směru vnější normály.



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

- těžiště desky

- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočtete integrál

$$I = \int_M x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy,$$

kde M je sféra o poloměru a orientovaná ve směru vnější normály.



Řešení. Substitucí převedeme integrál do sférických souřadnic. Položme tedy

$$\varphi(u, v) = a \cos u \cos v, \quad \psi(u, v) = a \sin u \cos v, \quad \tau(u, v) = a \sin v,$$

kde

$$u \in (-\pi, \pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



LEKCE23-IPL
plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočtěte integrál

$$I = \int_M x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy,$$

kde M je sféra o poloměru a orientovaná ve směru vnější normály.



Řešení. Substitucí převedeme integrál do sférických souřadnic. Položme tedy

$$\varphi(u, v) = a \cos u \cos v, \quad \psi(u, v) = a \sin u \cos v, \quad \tau(u, v) = a \sin v,$$

kde

$$u \in (-\pi, \pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



Potom

$$\begin{aligned} I &= \int_M x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \\ &= a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u \cos^3 v + \sin^2 u \cos^3 v + \sin^2 v \cos v) \, dv \right) \, du = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv \right) \, du = 4\pi a^3, \end{aligned}$$

což jsme měli spočítat.

LEKCE23-IPL
plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.

popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA



Prostorová verze základní věty analýzy porovnává tok hranic a divergenci pole uvnitř množiny:

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedm.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA



Prostorová verze základní věty analýzy porovnává tok hranic a divergenci pole uvnitř množiny:



VĚTA. Necht' G je otevřená podmnožina prostoru a P je jednoduše uzavřená orientovaná plocha ležící i s vnitřkem v G . Necht' $f = (f_1, f_2, f_3)$ je funkce $G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mající spojitě parciální derivace na G . Pak platí

$$\oint_P (f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz + f_3(x, y, z) dx dy) = \int_{\text{int}P} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx dy dz .$$

LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu
- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr.
- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.
- STANDARDY**

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



STOKESOVA VĚTA



LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

- vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny
- popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

- vlastnosti 2.dr.
- popis 2.dr.
- vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STOKESOVA VĚTA



Greenovu větu lze přenést o dimenzi výše, a to na prostorovou křivku, která je hranicí nějaké plochy. Jak vektorová funkce proudí podél hranice plochy se pozná zintegrováním rotace funkce uvnitř plochy.

LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STOKESOVA VĚTA



Greenovu větu lze přenést o dimenzi výše, a to na prostorovou křivku, která je hranicí nějaké plochy. Jak vektorová funkce proudí podél hranice plochy se pozná zintegrováním rotace funkce uvnitř plochy.



VĚTA. Necht' C je jednoduše uzavřená křivka v prostoru, která je krajem po částech hladké plochy ιC . Necht' C i ιC leží v otevřené množině G , na které je definována funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G . Pak platí

$$\oint_C (f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz) =$$

$$\int_{\iota C} \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \right).$$

LEKCE23-IPL

plochy

- uzavřená plocha
- spojení ploch
- hladká plocha
- kraj plochy
- po částech hladká plocha
- jedn.uzavřená plocha
- orientace plochy
- plošný integrál 1.druhu vlastnosti 1.dr.
- směrové kosiny popis 1.dr.
- plošný integrál 2.dr. vlastnosti 2.dr. popis 2.dr. vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

- Stokes
- těžiště desky
- objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ



DEFINICE.

1. Míra po částech hladké plochy P je rovna $\int_P dS$.
2. Hmotnost zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P je rovna $\int_P h dS$, kde h je funkce na P udávající hustotu.
3. Těžiště zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P mající hustotu h má souřadnice

$$T_x = \frac{\int_P xh dS}{m}, T_y = \frac{\int_P yh dS}{m}, T_z = \frac{\int_P zh dS}{m},$$

kde m je hmotnost desky.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ



DEFINICE.

1. Míra po částech hladké plochy P je rovna $\int_P dS$.
2. Hmotnost zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P je rovna $\int_P h dS$, kde h je funkce na P udávající hustotu.
3. Těžiště zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P mající hustotu h má souřadnice

$$T_x = \frac{\int_P xh dS}{m}, T_y = \frac{\int_P yh dS}{m}, T_z = \frac{\int_P zh dS}{m},$$

kde m je hmotnost desky.



V integrálech se musí za x, y, z, dS dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je plocha P popsána.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ



DEFINICE.

1. Míra po částech hladké plochy P je rovna $\int_P dS$.
2. Hmotnost zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P je rovna $\int_P h dS$, kde h je funkce na P udávající hustotu.
3. Těžiště zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P mající hustotu h má souřadnice

$$T_x = \frac{\int_P xh dS}{m}, T_y = \frac{\int_P yh dS}{m}, T_z = \frac{\int_P zh dS}{m},$$

kde m je hmotnost desky.



V integrálech se musí za x, y, z, dS dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je plocha P popsána.



Čitatele ve vzorcích pro těžiště jsou momenty (statické) plochy vzhledem k rovinám yz nebo xz nebo xy resp.



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Opět stejně jako u použití Greenovy věty pro míry rovinných obrazců, lze použít Gaussovu–Ostrogradského větu pro výpočet objemu tělesa. Postup je zcela stejný.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu

vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky
objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Opět stejně jako u použití Greenovy věty pro míry rovinných obrazců, lze použít Gaussovu–Ostrogradského větu pro výpočet objemu tělesa. Postup je zcela stejný.



Je-li G otevřená podmnožina prostoru mající za hranici uzavřenou po částech hladkou plochu ∂G , pak objem $V(G)$ tělesa G (nebo jeho uzávěru \overline{G}) je roven

$$V(G) = \int_{\partial G} x \, dy \, dz = \int_{\partial G} y \, dx \, dz = \int_{\partial G} z \, dx \, dy = \frac{1}{3} \int_{\partial G} (x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + x \, dx \, dy).$$



LEKCE23-IPL plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jdn.uzavřená
plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Najděte těžiště horní polosféry.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedin.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Najděte těžiště horní polosféry.



LEKCE23-IPL

plochy

uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká
plocha
jedm.uzavřená
plocha
orientace plochy

plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.

směrové kosiny
popis 1.dr.

plošný integrál 2.dr.

vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.

Gauss-Ostrogradskij

Stokes

těžiště desky

objem pomocí ploš.int.

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9