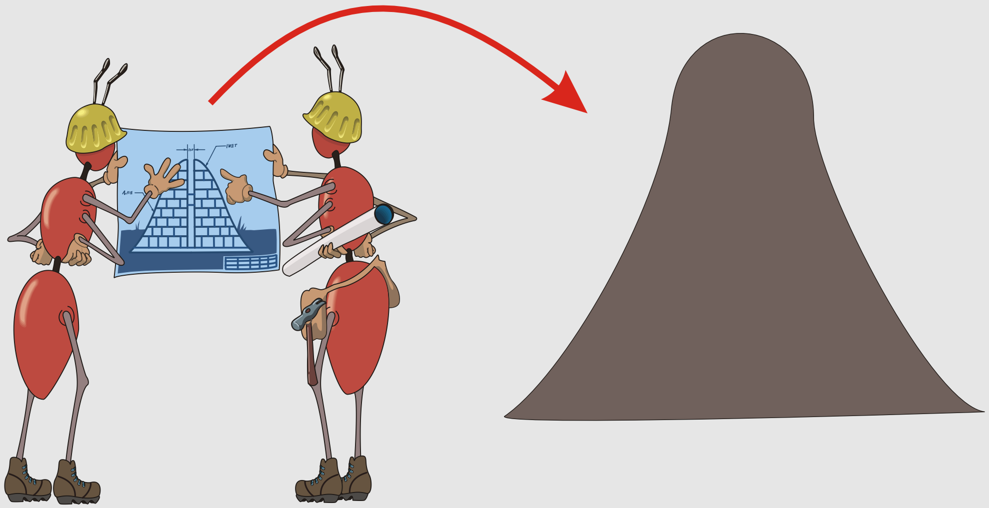
PLOŠNÉ INTEGRÁLY

V praxi se vyskytuje potřeba integrovat funkce nejen podle křivých čar, ale i podle křivých ploch (např. přes povrch koule).

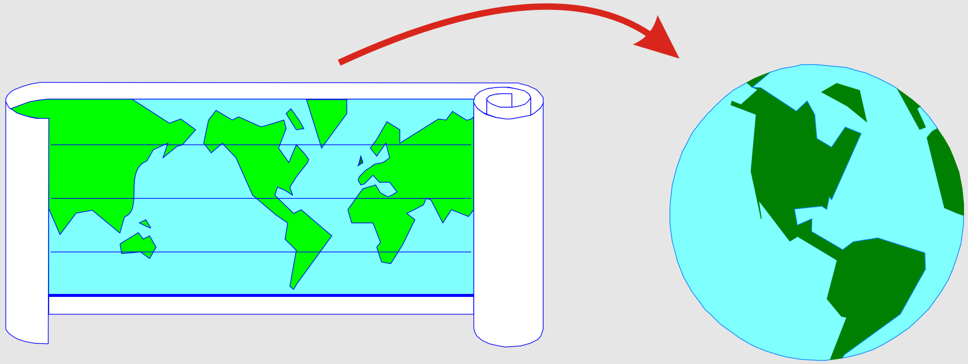
PLOCHY

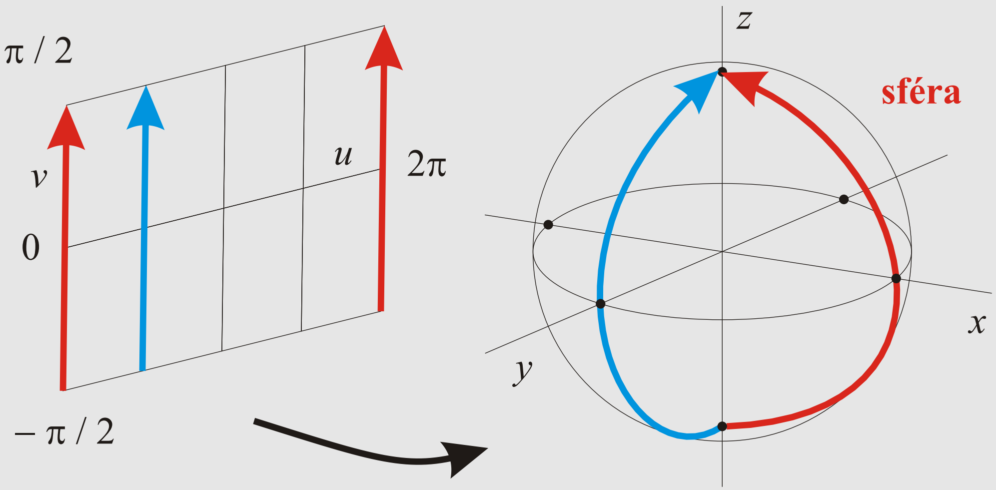
Plochy v prostoru, které byly zatím hlavně používány, byly grafy funkcí dvou proměnných.

To je, stejně jako u křivek, speciální případ zadání plochy parametricky, nebo speciální případ zadání plochy funkcí tří proměnných (tj., jako množina bodů splňujících rovnost $g(x, y, z) = 0$ pro nějakou spojitou funkci g, obvykle mající spojité parciální derivace).



LEKCE23-IPL
plochy
uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.
Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9





Plocha je množina $\{(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v));(u,v)\in I\}$, kde $\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.

Předchozí plocha se nazývá *uzavřená*, jestliže I je uzavřený a všechny body z hranice I se zobrazí do jediného bodu.

Kulová plocha je uzavřená, povrch kvádru je uzavřenou plochou, graf funkce dvou proměnných není uzavřenou plochou.

Nechť P_1, P_2 jsou plochy zadané na intervalech I_1, I_2 resp., které mají společnou jednu svou stranu. Spojení ploch P_1, P_2 je pak jejich sjednocení definované na $I_1 \cup I_2$. Značí se $P_1 + P_2$.

Indukcí lze tento pojem zavést pro spojení konečně mnoha ploch.

Např. povrch kvádru vznikne postupným spojením všech obdélníků této plochy.

Plocha zadaná parametry $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ na intervalu I se nazývá hladká, jestliže platí:

1. funkce φ, ψ, τ mají spojité první parciální derivace na I;
2. pro každé $(u,v) \in I$ má matice
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{pmatrix}$$
hodnost 2;
3. každý bod plochy je obrazem jediného bodu $(u,v) \in I$ s jedinou možnou výjimkou: obrazy bodů z hranice I mohou splývat.

Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v $\mathbb{R}^3$ (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.

Pro představu si vezměte kruh, jakkoli položený v prostoru, třeba i zvlněný. Je jasné, co znamená kraj tohoto obrazce.

Přesná definice je dost komplikovaná a nebude zde uváděna. V případech zde používaných bude intuitivně jasné, co kraj plochy znamená.

Plocha s prázdným krajem je totéž, co uzavřená plocha.

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.

Příkladem je povrch krychle nebo válce, nebo „leporelo", „sněhulák" nebo lemniskata vynásobená úsečkou.

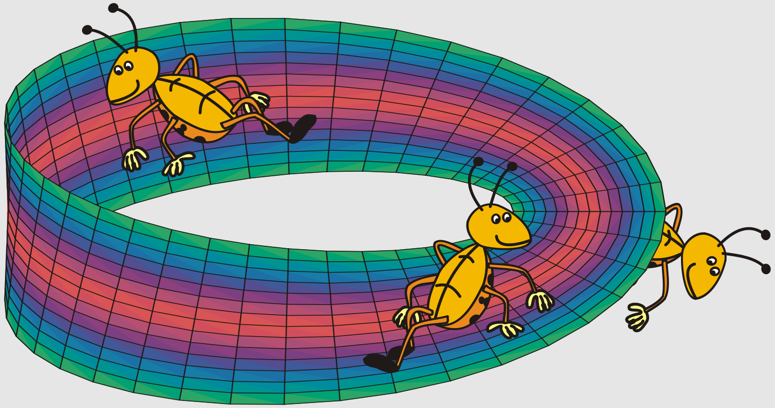
Povrch krychle nebo válce, i „sněhulák", jsou příklady po částech hladké uzavřené plochy.

Každá po částech hladká plocha je parametricky zadaná reálnými spojitými funkcemi $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$, které jsou definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině, přičemž $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ mají spojité parciální derivace všude v I kromě konečně mnoha úseček.

Po částech hladká plocha P, parametricky zadaná zobrazením Φ na uzavřeném intervalu I, se nazývá jednoduše uzavřená jestliže Φ je prosté na vnitřku I, konstantní na hranici I s hodnotou různou od hodnot na vnitřku I.

Jednoduše uzavřená plocha P rozděluje prostor na dvě souvislé části, jednu omezenou, zvanou vnitřek (značení ιP) a druhou neomezenou.

Orientace plochy znamená, že lze mluvit o dvou stranách plochy, jedna se označí za kladnou a druhá za zápornou.



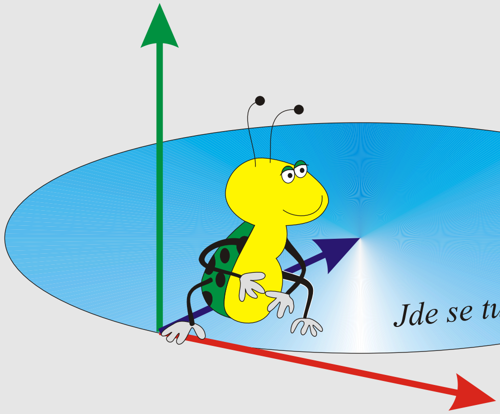
Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.

U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.

U grafů funkcí dvou proměnných se za kladnou stranu bere horní strana.

Orientace hladké plochy znamená, že v každém jejím bodě je určen směr normály a to spojitým způsobem: jestliže půjdete po jednoduše uzavřené křivce na dané ploše, musíte dojít do výchozího bodu ve stejné poloze.

Je-li orientovaná křivka C částí kraje orientované plochy P, říká se, že obě orientace jsou souhlasné, jestliže při chůzi po křivce v kladném směru a po kladné straně plochy, máte plochu po levé straně.



Nebude-li řečeno jinak, bude se vždy předpokládat, že plochy a jejich kraje jsou orientovány souhlasně.

Musí se dávat pozor při orientaci po částech hladkých ploch, protože ve styčných hranách obecně neexistují normály.

Nechť jsou jednotlivé spojované plochy orientovány a nechť jejich kraje jsou uzavřené křivky, které jsou orientovány souhlasně s příslušnými plochami. Pak je celá plocha orientována, jestliže části krajů, které se stýkají (právě dvě) jsou navzájem orientovány opačně.

Poznámky 1   Příklady 1   Otázky 1

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU

Myšlenka výpočtu integrálu funkce $f : P \to \mathbb{R}$ na ploše P je podobná jako u křivkového integrálu 1.druhu.

Pomocí určovacích parametrických funkcí se plocha „narovná" a spočítá se integrál přes podmnožinu roviny.

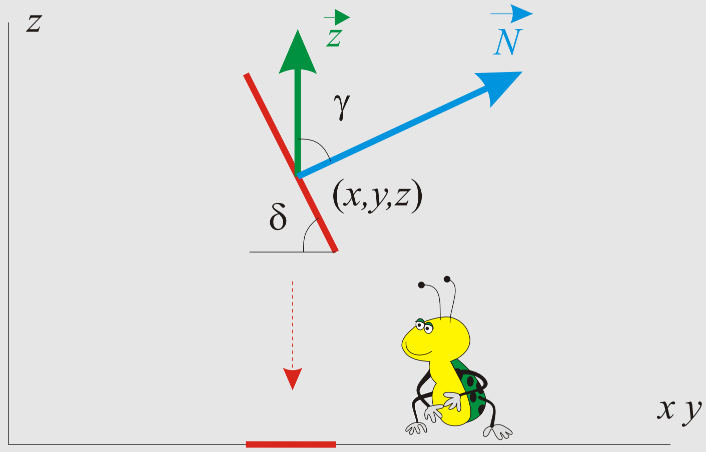
Ono narovnání je trochu složitější než u křivek. Tam bylo nutné příslušnou funkci vynásobit faktorem který odpovídal změně délky při narovnání křivky (od $\mathrm{d}s$ se přešlo k $\mathrm{d}x$).

Stejně tak u plochy je třeba použít faktor, který udává změnu velikosti křivé plochy při narovnání.

V bodě (x, y, z) plochy se velmi malá ploška $\mathrm{d}S$ okolo tohoto bodu dá považovat za rovinnou a zjistí se poměr její velikosti ku poměru jejího průmětu, např. do roviny xy (není-li tento průmět úsečka nebo bod).

V rovině xy má průmět velikost $\mathrm{d}x.\,\mathrm{d}y$. Skutečná ploška má velikost větší, a to $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x.\,\mathrm{d}y/|\cos\gamma|$, kde γ je úhel, který svírá normála k ploše v (x, y, z) s rovnoběžkou v (x, y, z) s osou z v kladném směru.

Je nutné předpokládat, že $|\cos\gamma| \neq 0$, tj., že ploška není rovnoběžná s osou z.



Podle druhé podmínky definice hladkých ploch musí být v každém bodě plochy aspoň jeden uvedený kosinus nenulový.

Plocha se rozdělí na nejvýše tři části, a v každé je jeden daný kosinus nenulový. Integrál přes plochu P je pak součtem integrálů přes tyto části.

Podle volby takové části se berou průměty i do rovin xz nebo yz a dostávají se velikosti plošek $\mathrm{d}x.\,\mathrm{d}z/|\cos\beta|$, resp. $\mathrm{d}y.\,\mathrm{d}z/|\cos\alpha|$, kde úhly β, α jsou opět úhly mezi normálou a příslušnými osami (y, resp. x). Kosiny těchto úhlů se nazývají *směrové kosiny* normály.

DEFINICE. Nechť f je funkce zadaná na hladké ploše P, na které je v každém bodě $\cos\gamma \neq 0$. Pak se definuje plošný integrál 1.druhu funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S)\ \mathrm{d}S = \int_M f(S)\frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{|\cos\gamma|}\,.$$

Na pravé straně je dvojrozměrný integrál, v něm se za proměnné S, x, y, γ musí dosadit příslušné hodnoty (viz dále).

Samozřejmě lze požadavek nenulovosti směrového kosinu oslabit podmínkou, že může nabývat 0 jen na malé množině (nulové).

Přímo z definice lze ukázat následující vlastnosti:

POZOROVÁNÍ. Následující 2 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany, poslední nerovnost platí, pokud existuje levá strana.

1. $\int_P (\alpha f(S) + \beta g(S))\ \mathrm{d}S = \alpha \int_P f(S)\ \mathrm{d}S + \beta \int_P g(S)\ \mathrm{d}S$;
2. $\int_{P_1+P_2} f(S)\ \mathrm{d}S = \int_{P_1} f(S)\ \mathrm{d}S + \int_{P_2} f(S)\ \mathrm{d}S$;
3. $|\int_P f(S)\ \mathrm{d}S| \le O(P) \max_{S\in P} |f(S)|$, kde $O(P)$ je obsah plochy P.

Úhel γ se samozřejmě mění spolu s bodem (x, y, z) a pro výpočet plošného integrálu je obvykle třeba $\cos\gamma$ vyjádřit pomocí nějakých souřadnic.

VĚTA. Nechť plocha P je grafem funkce $h(x, y)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,.$$

VĚTA. Nechť je plocha P dána parametricky rovnostmi $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \tau(u, v)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{J(\varphi, \psi)}\,,$$

kde

$$
\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)^2 \\
G &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)^2 \\
F &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\tau}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\tau v}\,.
\end{aligned}
$$

a $J(\varphi,\psi)$ je Jakobián funkcí φ,ψ.

Nyní lze uvést převod plošného integrálu 1.druhu na obyčejný integrál přes rovinnou množinu.

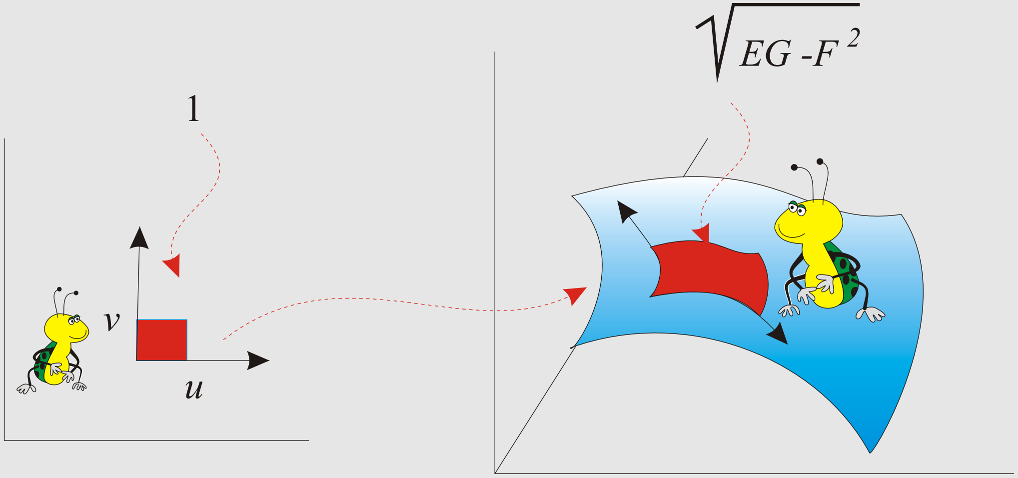
VĚTA. Nechť f je funkce definovaná na hladké ploše P.

1. Nechť je plocha P grafem funkce h definované na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\,\mathrm{d}S = \int_A f(x,y,h(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

2. Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ,ψ,τ na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\,\mathrm{d}S = \int_A f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$



Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

Cvičení 2

LEKCE23-IPL
plochy
uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.
Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

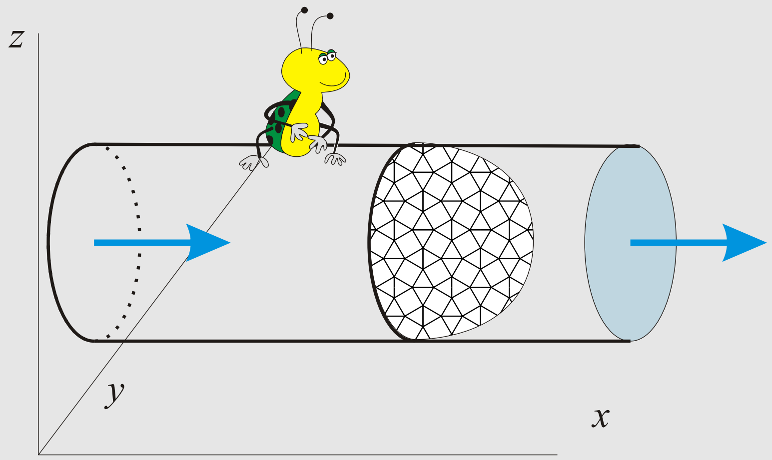
PLOŠNÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU

DEFINICE. Nechť P je hladká orientovaná plocha a $f : P \to \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3). Pak se definuje plošný integrál 2.druhu funkce f přes P rovností

$$\int_P \mathbf{f} . \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x,y,z)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + f_2(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z + f_3(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y)\,.$$

Integrál na pravé straně je součtem tří integrálů a každý lze brát přes projekci plochy P do příslušné roviny (yz nebo xz nebo xy resp.).

V definici je pro jednoduchost uvedena integrace přes celou rovinu (rozumí se, že integrovaná funkce se dodefinuje nulou ve zbývajících bodech).



Opět se snadno ukáže:

POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany.

1. $\int_P (\alpha f(S) + \beta g(S))\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \alpha \int_C f(S)\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \beta \int_C g(S)\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}$;
2. $\int_{P_1+P_2} f(S)\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{P_1} f(S)\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{P_2} f(S)\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}$;
3. $\int_{-P} f(S)\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_P f(S)\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}$;

Podle uvedené definice plošného integrálu 2.druhu však nelze integrál většinou přímo počítat, protože např. $\int_{\mathbb{R}^2}(f_1(x,y,z)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ obsahuje i proměnnou x, která závisí na y a z.

Tato závislost se musí do integrálu dosadit.

Použije se věta o substituci na jednotlivé části integrálu podle toho, jak je plocha P zadaná.

VĚTA. Nechť $f : P \to \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P.

1. Nechť je plocha P grafem funkce g definované na množině A. Pak

$$\int_P f\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_A (-f_1(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y - f_2(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + f_3(x,y,g(x,y))\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y)\,.$$

2. Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A. Pak

$$\begin{aligned}\int_P f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \pm\int_A f_1(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))J(\psi,\tau)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\\ &\pm\int_A f_2(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))J(\varphi,\tau)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\\ &\pm\int_A f_3(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))J(\varphi,\psi)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,,\end{aligned}$$

kde znaménka před integrály se určí podle souhlasu orientace plochy s obvyklou orientací souřadnicových množin.

Poslední věta o určení znaménka znamená, např. pro poslední integrál na pravé straně, že znaménko bude stejné jako znaménko Jakobiánu $J(\varphi,\psi)$, pokud při pohledu seshora na rovinu xy vidíme kladnou stranu plochy v nějakém vybraném bodě, ve kterém se nějaké jeho okolí na ploše zobrazuje prostě na rovinu xy.

POZOROVÁNÍ. Nechť $f : P \to \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P. Potom

$$\int_P f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_P (f_1(x,y,z)\cos\alpha + f_2(x,y,z)\cos\beta + f_3(x,y,z)\cos\gamma)\ \mathrm{d}S\,,$$

kde uvedené kosiny jsou směrové kosiny v bodech z P.

V integrálu $\int_P f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ lze tedy $f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ chápat jako skalární součin vektoru $\boldsymbol{f}$ s vektorem $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\ \mathrm{d}S$

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3

GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA

Greenova věta převádí křivkový integrál po jednoduše uzavřené křivce na integrál přes vnitřek této křivky.

Posunutím o dimenzi výše by se měla dostat věta o převodu plošného integrálu po jednoduše uzavřené ploše na integrál přes vnitřek této plochy.

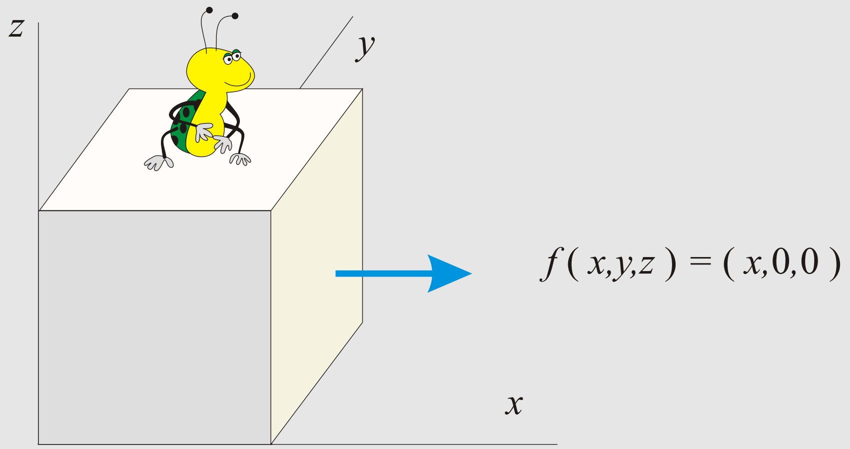
Greenův vzorec měl dvě podoby: pro křivkový integrál ze skalárního součinu s tečným vektorem nebo s normálovým vektorem.

VĚTA. Nechť G je otevřená podmnožina prostoru a P je jednoduše uzavřená orientovaná plocha ležící i s vnitřkem v G. Nechť $f = (f_1, f_2, f_3)$ je funkce $G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak platí

$$\oint_P \big(f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + f_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big) =$$

$$= \int_{\iota P} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Důkaz je naznačen v *Poznámkách* a *Otázkách*.



Podobně jako Greenova věta, dá se i Gaussova–Ostrogradského věta vyslovit pro konečná sjednocení ploch.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

LEKCE23-IPL
plochy
uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.
Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

STOKESOVA VĚTA

Na rozdíl od Gaussovy–Ostrogradského věty se bude v tomto případě vycházet z Greenova vzorce pro skalární součin funkce a tečného vektoru:

VĚTA. Nechť C je jednoduše uzavřená křivka v prostoru, která je krajem po částech hladké plochy ιC. Nechť C i ιC leží v otevřené množině G, na které je definována funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak platí

$$\oint_C (f_1(x,y,z)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y,z)\,\mathrm{dy} + f_3(x,y,z)\,\mathrm{dz}) =$$

$$\int_{\iota C} \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dz} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \right).$$

Podobně jako Greenova věta, dá se i Stokesova věta vyslovit pro plochy mající za kraj konečná sjednocení jednoduše uzavřených křivek v prostoru.

Příklady 5 Otázky 5

LEKCE23-IPL
plochy
uzavřená plocha
spojení ploch
hladká plocha
kraj plochy
po částech hladká plocha
jedn.uzavřená plocha
orientace plochy
plošný integrál 1.druhu
vlastnosti 1.dr.
směrové kosiny
popis 1.dr.
plošný integrál 2.dr.
vlastnosti 2.dr.
popis 2.dr.
vztah 1.2.dr.
Gauss-Ostrogradskij
Stokes
těžiště desky
objem pomocí ploš.int.
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ

Obdobně jako u křivkových integrálů, se nyní dají počítat velikosti ploch a jejich těžiště.

Pro tuto velikost bude používán termín *míra*.

DEFINICE.

1. Míra po částech hladké plochy P je rovna $\int_P \mathrm{d}S$.
2. Hmotnost zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P je rovna $\int_P h\ \mathrm{d}S$, kde h je funkce na P udávající hustotu.
3. Těžiště zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P mající hustotu h má souřadnice
$$T_x = \frac{\int_P xh\ \mathrm{d}S}{m}, T_y = \frac{\int_P yh\ \mathrm{d}S}{m}, T_z = \frac{\int_P zh\ \mathrm{d}S}{m},$$
kde m je hmotnost desky.

V integrálech se musí za $x, y, z,\ \mathrm{d}S$ dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je plocha P popsána.

Čitatelé ve vzorcích pro těžiště jsou momenty (statické) plochy vzhledem k rovinám yz nebo xz nebo xy resp.

Opět stejně jako u použití Greenovy věty pro míry rovinných obrazců, lze použít Gaussovu–Ostrogradského větu pro výpočet objemu tělesa. Postup je zcela stejný.

Je-li G otevřená podmnožina prostoru mající za hranici uzavřenou po částech hladkou plochu ∂G, pak objem $V(G)$ tělesa G (nebo jeho uzávěru $\overline{G}$) je roven

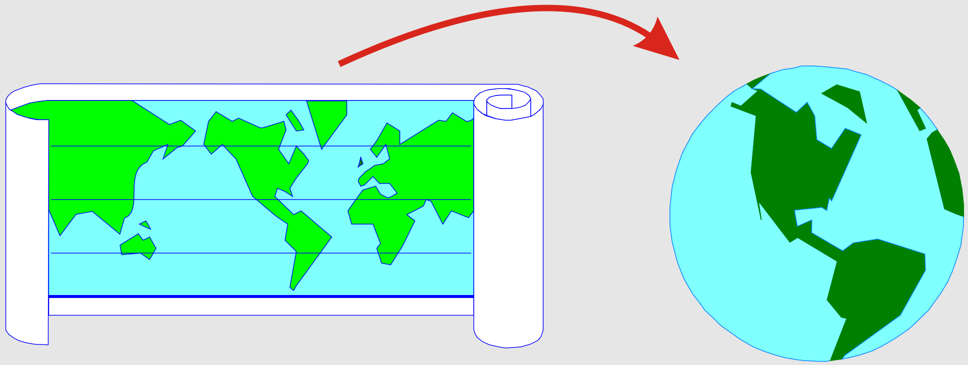
$$V(G)=\int_{\partial G} x\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}=\int_{\partial G} y\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dz}=\int_{\partial G} z\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}=\frac{1}{3}\int_{\partial G}(x\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}+y\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dz}+x\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy})\,.$$

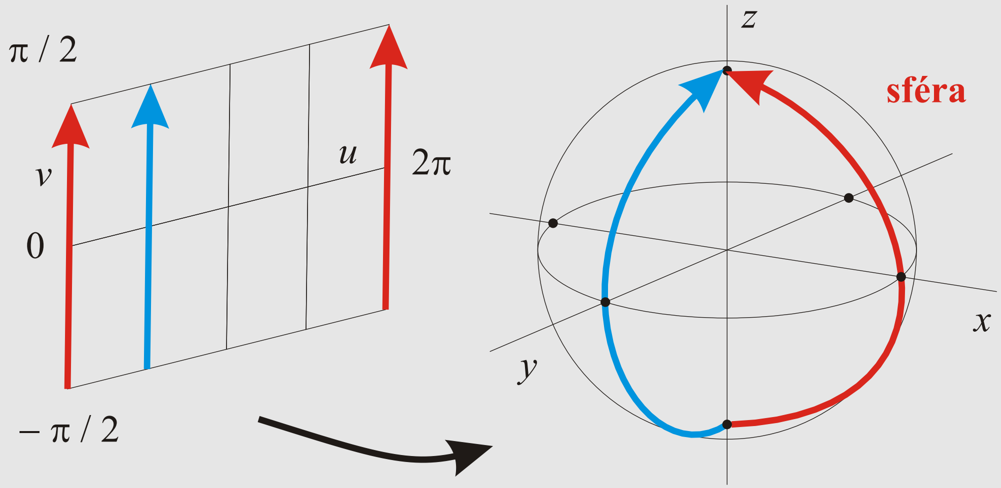
Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6

STANDARDY z kapitoly

PLOŠNÉ INTEGRÁLY

PLOCHY





Plocha je množina $\{(\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)); (u,v) \in I\}$, kde $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.

Předchozí plocha se nazývá uzavřená, jestliže I je uzavřený a všechny body z hranice I se zobrazí do jediného bodu.

Nechť P_1, P_2 jsou plochy zadané na intervalech I_1, I_2 resp., které mají společnou jednu svou stranu. Spojení ploch P_1, P_2 je pak jejich sjednocení definované na $I_1 \cup I_2$. Značí se $P_1 + P_2$.

Indukcí lze tento pojem zavést pro spojení konečně mnoha ploch.

Plocha zadaná parametry $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ na intervalu I se nazývá hladká, jestliže platí:

1. funkce φ, ψ, τ mají spojité první parciální derivace na I;
2. pro každé $(u,v) \in I$ má matice
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \end{pmatrix}$$
hodnost 2;
3. každý bod plochy je obrazem jediného bodu $(u,v) \in I$ s jedinou možnou výjimkou: obrazy bodů z hranice I mohou splývat.

Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v $\mathbb{R}^3$ (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.

Pro představu si vezměte kruh, jakkoli položený v prostoru, třeba i zvlněný. Je jasné, co znamená kraj tohoto obrazce.

Plocha s prázdným krajem je totéž, co uzavřená plocha.

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.

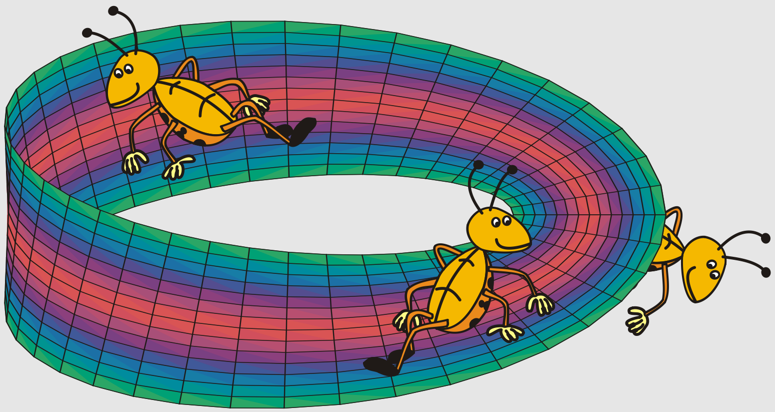
Povrch krychle nebo válce jsou příklady po částech hladké uzavřené plochy.

Každá po částech hladká plocha je parametricky zadaná reálnými spojitými funkcemi $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$, které jsou definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině, přičemž $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ mají spojité parciální derivace všude v I kromě konečně mnoha úseček.

Po částech hladká plocha P, parametricky zadaná zobrazením Φ na uzavřeném intervalu I, se nazývá jednoduše uzavřená jestliže Φ je prosté na vnitřku I, konstantní na hranici I s hodnotou různou od hodnot na vnitřku I.

Jednoduše uzavřená plocha P rozděluje prostor na dvě souvislé části, jednu omezenou, zvanou vnitřek (značení ιP) a druhou neomezenou.

Orientace plochy znamená, že lze mluvit o dvou stranách plochy, jedna se označí za kladnou a druhá za zápornou.



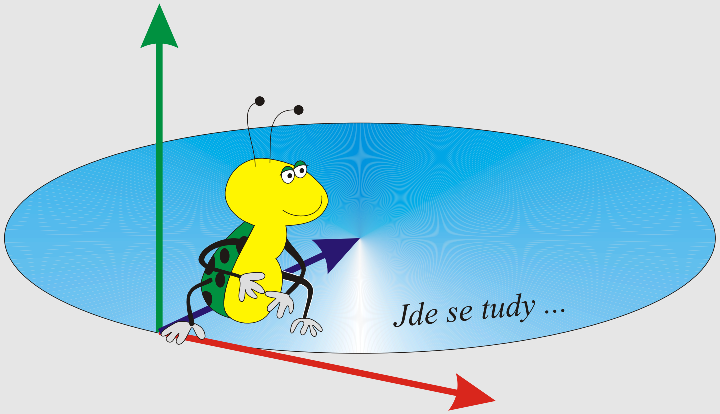
Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.

U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.

U grafů funkcí dvou proměnných se za kladnou stranu bere horní strana.

Orientace hladké plochy znamená, že v každém jejím bodě je určen směr normály a to spojitým způsobem: jestliže půjdete po jednoduše uzavřené křivce na dané ploše, musíte dojít do výchozího bodu ve stejné poloze.

Je-li orientovaná křivka C částí kraje orientované plochy P, říká se, že obě orientace jsou souhlasné, jestliže při chůzi po křivce v kladném směru a po kladné straně plochy, máte plochu po levé straně.



Nebude-li řečeno jinak, bude se vždy předpokládat, že plochy a jejich kraje jsou orientovány souhlasně.

Musí se dávat pozor při orientaci po částech hladkých ploch, protože ve styčných hranách obecně neexistují normály.

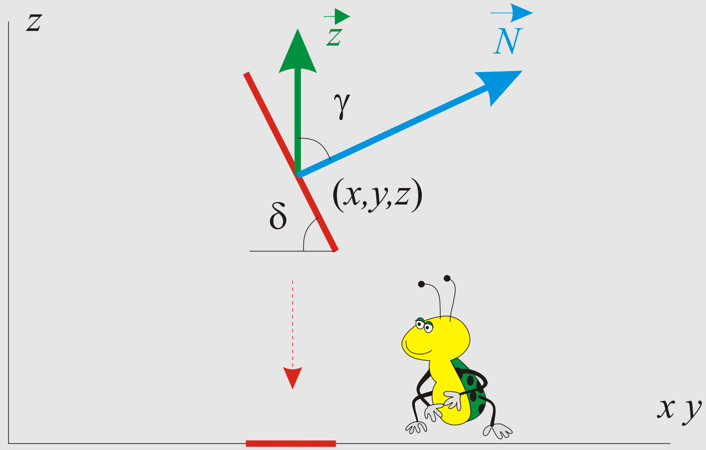
Nechť jsou jednotlivé spojované plochy orientovány a nechť jejich kraje jsou uzavřené křivky, které jsou orientovány souhlasně s příslušnými plochami. Pak je celá plocha orientována, jestliže části krajů, které se stýkají (právě dvě) jsou navzájem orientovány opačně.

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU

V bodě (x, y, z) plochy se velmi malá ploška $\mathrm{d}S$ okolo tohoto bodu dá považovat za rovinnou a zjistí se poměr její velikosti ku poměru jejího průmětu, např. do roviny xy (není-li tento průmět úsečka nebo bod).

V rovině xy má průmět velikost $\mathrm{d}x.\,\mathrm{d}y$. Skutečná ploška má velikost větší, a to $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x.\,\mathrm{d}y/|\cos\gamma|$, kde γ je úhel, který svírá normála k ploše v (x, y, z) s rovnoběžkou v (x, y, z) s osou z v kladném směru.

Je nutné předpokládat, že $|\cos\gamma| \neq 0$, tj., že ploška není rovnoběžná s osou z.



Podle druhé podmínky definice hladkých ploch musí být v každém bodě plochy aspoň jeden uvedený kosinus nenulový.

Plocha se rozdělí na nejvýše tři části, a v každé je jeden daný kosinus nenulový. Integrál přes plochu P je pak součtem integrálů přes tyto části.

Podle volby takové části se berou průměty i do rovin xz nebo yz a dostávají se velikosti plošek $\mathrm{d}x.\,\mathrm{d}z/|\cos\beta|$, resp. $\mathrm{d}y.\,\mathrm{d}z/|\cos\alpha|$, kde úhly β, α jsou opět úhly mezi normálou a příslušnými osami (y, resp. x). Kosiny těchto úhlů se nazývají *směrové kosiny* normály.

DEFINICE. Nechť f je funkce zadaná na hladké ploše P, na které je v každém bodě $\cos\gamma \neq 0$. Pak se definuje plošný integrál 1.druhu funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S)\ \mathrm{d}S = \int_M f(S)\frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{|\cos\gamma|}\,.$$

Na pravé straně je dvojrozměrný integrál, v něm se za proměnné S, x, y, γ musí dosadit příslušné hodnoty (viz dále).

Požadavek nenulovosti směrového kosinu lze oslabit podmínkou, že může nabývat 0 jen na malé množině (nulové).

VĚTA. Nechť plocha P je grafem funkce $h(x, y)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A. Pak normálový vektor $\mathbf{n}$ k ploše je vektorovým součinem vektorů parciálních derivací

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\tau}{\partial u}\right) \times \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\tau}{\partial v}\right)$$

Vektorový součin vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ je definován

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Nyní lze napsat převod plošného integrálu 1.druhu na obyčejný integrál přes rovinnou množinu.

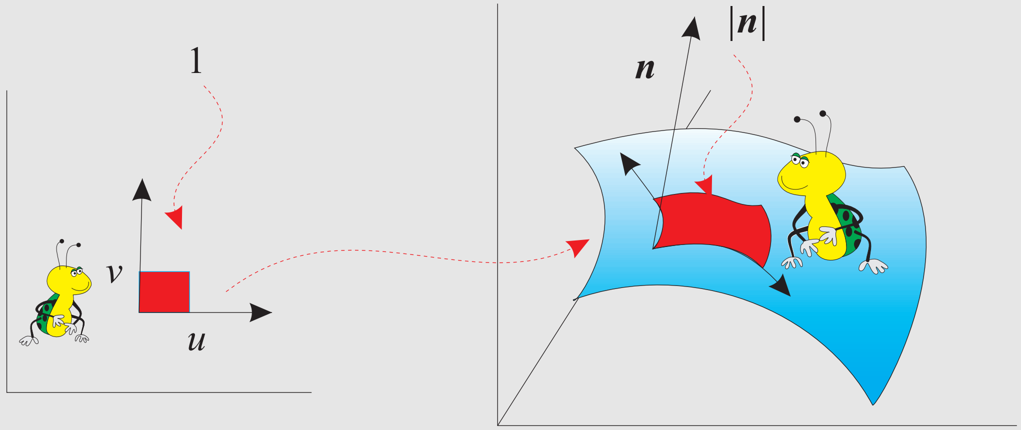
VĚTA. Nechť f je funkce definovaná na hladké ploše P.

1. Nechť je plocha P grafem funkce h definované na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\,\mathrm{d}S = \int_A f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

2. Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\,\mathrm{d}S = \int_A f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v))\,|\mathbf{n}|\;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\,.$$



Příklad. Vypočtěte povrch koule B o poloměru a pomocí sférických souřadnic.

Řešení. Máme vypočítat integrál

$$\int_{\partial B} 1 \, \mathrm{d}S.$$

Sféru ∂B tedy parametrizujeme

$$\varphi(u,v) = a\cos u \cos v, \quad \psi(u,v) = a \sin u \cos v, \quad \tau(u,v) = a \sin v,$$

kde

$$u \in (-\pi, \pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Spočítáme parciální derivace

$$\partial_u(\varphi, \psi, \tau), \qquad \partial_v(\varphi, \psi, \tau)$$

a spočítáme vektorový součin těchto dvou vektorů.

Výsledek označme $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Pak platí

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = a^4 \cos^2 v.$$

Dostáváme

$$\int_{\partial B} 1 \, \mathrm{d}S = a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos v| \, \mathrm{d}v \ \ \mathrm{d}u = 4\pi a^2.$$

Příklad. Zintegrujte funkci $x + y + z$ přes povrch krychle.

Příklad. Vypočtěte $\int_P z^2 \, \mathrm{d}S$, kde P je část kužele daná parametrizací

$$x = r\cos\varphi \sin\alpha, y = r\sin\varphi\sin\alpha, z = r\cos\alpha \ ,$$

$r \in [0, a], \varphi \in [0, 2\pi]$ a $\alpha \in (0, \pi/2)$ je konstanta.

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU

DEFINICE. Nechť P je hladká orientovaná plocha a $f : P \to \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3). Pak se definuje plošný integrál 2.druhu funkce f přes P rovností

$$\int_P \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x,y,z)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + f_2(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z + f_3(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y)\,.$$

Integrál na pravé straně je součtem tří integrálů a každý lze brát přes projekci plochy P do příslušné roviny (yz nebo xz nebo xy resp.).

V definici je pro jednoduchost uvedena integrace přes celou rovinu (rozumí se, že integrovaná funkce se dodefinuje nulou ve zbývajících bodech).

Podle uvedené definice plošného integrálu 2.druhu však nelze integrál většinou přímo počítat, protože např. $\int_{\mathbb{R}^2}(f_1(x,y,z)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ obsahuje i proměnnou x, která závisí na y a z. Tato závislost se musí do integrálu dosadit.

Použije se věta o substituci na jednotlivé části integrálu podle toho, jak je plocha P zadaná.

VĚTA. Nechť $f : P \to \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P.

1. Nechť je plocha P grafem funkce g definované na množině A. Pak

$$\int_P f\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_A (-f_1(x,y,g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial x}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y - f_2(x,y,g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + f_3(x,y,g(x,y))\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y)\,.$$

$$\int_P f\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_A f(x,y,g(x,y))\,.\,\mathbf{n}\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\,,$$

kde $\mathbf{n} = (-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1)$ je normálový vektor k ploše.

2. Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A. Pak

$$\begin{aligned}\int_P f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \;=\; &\pm\int_A f_1(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))J(\psi,\tau)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &\pm\int_A f_2(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))J(\varphi,\tau)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &\pm\int_A f_3(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))J(\varphi,\psi)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,\end{aligned}$$

kde znaménka před integrály se určí podle souhlasu orientace plochy s obvyklou orientací souřadnicových množin.

$$\int_P f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_A f(x,y,g(x,y))\,.\,\mathbf{n}\;\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\,,$$

kde

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\psi}{\partial u},\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v},\frac{\partial\psi}{\partial v},\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)$$

je normálový vektor k ploše .

POZOROVÁNÍ. Nechť $f : P \to \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P. Potom

$$\int_P f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_P (f_1(x,y,z)\cos\alpha + f_2(x,y,z)\cos\beta + f_3(x,y,z)\cos\gamma)\;\mathrm{d}S\,,$$

$$\int_P f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_P f\,.\,\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\;\mathrm{d}S\,,$$

kde uvedené kosiny jsou směrové kosiny v bodech z P. Ve druhém vyjádření jde o složku f ve směru normály k ploše (spočítáno skalárním součinem f a jednotkového vektoru

$$\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\ .$$

Příklad. Vypočtěte integrál

$$I = \int_M x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je sféra o poloměru a orientovaná ve směru vnější normály.

Řešení. Substitucí převedeme integrál do sférických souřadnic. Položme tedy

$$\varphi(u,v) = a\cos u\cos v, \quad \psi(u,v) = a\sin u\cos v, \quad \tau(u,v) = a\sin v,$$

kde

$$u \in (-\pi,\pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Potom

$$\begin{aligned} I &= \int_M x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= a^3\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 u\cos^3 v + \sin^2 u\cos^3 v + \sin^2 v\cos v)\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos v\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = 4\pi a^3, \end{aligned}$$

což jsme měli spočítat.

GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA

VĚTA. Nechť G je otevřená podmnožina prostoru a P je jednoduše uzavřená orientovaná plocha ležící i s vnitřkem v G. Nechť $f = (f_1, f_2, f_3)$ je funkce $G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak platí

$$\oint_P \big(f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + f_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big) =$$

$$= \int_{\iota P} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

STOKESOVA VĚTA

VĚTA. Nechť C je jednoduše uzavřená křivka v prostoru, která je krajem po částech hladké plochy ιC. Nechť C i ιC leží v otevřené množině G, na které je definována funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak platí

$$\oint_C (f_1(x,y,z)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y,z)\,\mathrm{dy} + f_3(x,y,z)\,\mathrm{dz}) =$$

$$\int_{\iota C} \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dz} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \right).$$

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ

DEFINICE.

1. Míra po částech hladké plochy P je rovna $\int_P \mathrm{d}S$.
2. Hmotnost zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P je rovna $\int_P h \,\mathrm{d}S$, kde h je funkce na P udávající hustotu.
3. Těžiště zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P mající hustotu h má souřadnice
$$T_x = \frac{\int_P xh \,\mathrm{d}S}{m}\,, T_y = \frac{\int_P yh \,\mathrm{d}S}{m}\,, T_z = \frac{\int_P zh \,\mathrm{d}S}{m}\,,$$
kde m je hmotnost desky.

V integrálech se musí za $x, y, z,\ \mathrm{d}S$ dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je plocha P popsána.

Čitatelé ve vzorcích pro těžiště jsou momenty (statické) plochy vzhledem k rovinám yz nebo xz nebo xy resp.

Opět stejně jako u použití Greenovy věty pro míry rovinných obrazců, lze použít Gaussovu–Ostrogradského větu pro výpočet objemu tělesa. Postup je zcela stejný.

Je-li G otevřená podmnožina prostoru mající za hranici uzavřenou po částech hladkou plochu ∂G, pak objem $V(G)$ tělesa G (nebo jeho uzávěru $\overline{G}$) je roven

$$V(G) = \int_{\partial G} x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\partial G} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_{\partial G} z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_{\partial G} (x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)\,.$$

Příklad. Najděte těžiště horní polosféry.