PLOŠNÉ INTEGRÁLY

V praxi se vyskytuje potřeba integrovat funkce nejen podle křivých čar, ale i podle křivých ploch (např. přes povrch koule).

Před definicí plošných integrálů je nutné se zmínit o plochách, které se budou používat.

Plochy jsou značně náročnější na definice a charakterizace než křivky, na což v tomto textu není místo.

Podrobnosti lze nalézt v učebnici diferenciální geometrie.

Na plochy chodím s placaticí, ta uvolňuje představivost.

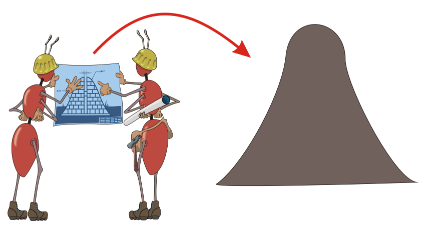
PLOCHY

Plochy v prostoru, které byly zatím hlavně používány, byly grafy funkcí dvou proměnných.

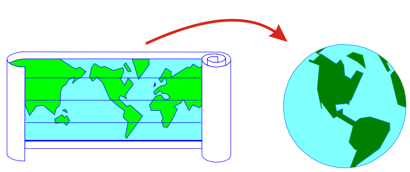
To je, stejně jako u křivek, speciální případ zadání plochy parametricky, nebo speciální případ zadání plochy funkcí tří proměnných (tj., jako množina bodů splňujících rovnost $g(x, y, z) = 0$ pro nějakou spojitou funkci g, obvykle mající spojité parciální derivace).

Důraz bude v dalším textu dán na parametrické zadání. Pro jednoduchost představy se bude v definici zadání plochy předpokládat omezený interval.

Parametrizace je vlastně udělání dvojrozměrného plánu.

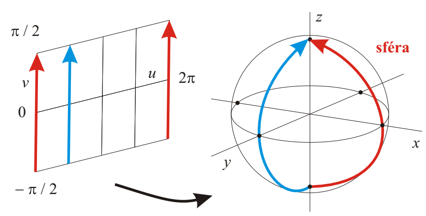


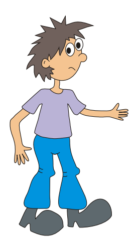
Takhle se dělají mapy.



Válcové souřadnice dělají válcové mapy. A ty jsou vlastně rovinné.

Musí se vlastně daná plocha "osahat".





Jde zase o zobrazení. Těch už jsem viděl . . .

Plocha je množina $\{(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v));(u,v)\in I\}$, kde $\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.

Předchozí plocha se nazývá *uzavřená*, jestliže I je uzavřený a všechny body z hranice I se zobrazí do jediného bodu.

Teď není čas na slova. Máchejte ručičkama, človíčkové, ať je ta plocha opravdu vidět.

Kulová plocha je uzavřená, povrch kvádru je uzavřenou plochou, graf funkce dvou proměnných není uzavřenou plochou.

Nechť P_1, P_2 jsou plochy zadané na intervalech I_1, I_2 resp., které mají společnou jednu svou stranu. Spojení ploch P_1, P_2 je pak jejich sjednocení definované na $I_1 \cup I_2$. Značí se $P_1 + P_2$.

Indukcí lze tento pojem zavést pro spojení konečně mnoha ploch.

Např. povrch kvádru vznikne postupným spojením všech obdélníků této plochy.

Jednou jsem kvádro opravdu takto spojoval. Pohoda.

Povrch hrníčku s uchem vznikne spojením dvou vhodně deformovaných válcových ploch (bez podstav).

To chce kafe!!!

Nebude to dno chybět?

Povrch sněhuláka vznikne spojením tří kulových ploch (případně vhodně zdeformovaných kvůli knoflíkům, nosu,...).

Plocha zadaná parametry $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ na intervalu I se nazývá hladká, jestliže platí:

1. funkce φ, ψ, τ mají spojité první parciální derivace na I;
2. pro každé $(u,v) \in I$ má matice
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \end{pmatrix}$$
hodnost 2;
3. každý bod plochy je obrazem jediného bodu $(u,v) \in I$ s jedinou možnou výjimkou: obrazy bodů z hranice I mohou splývat.

Hladká plocha má body, kde je možné hladit, pánové.

Pro další část je důležitý pojem kraj plochy P.

Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v $\mathbb{R}^3$ (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.

Pro představu si vezměte kruh, jakkoli položený v prostoru, třeba i zvlněný. Je jasné, co znamená kraj tohoto obrazce.

Oplatky jím od kraje. A ten tam je skoro až do konce.

Přesná definice je dost komplikovaná a nebude zde uváděna. V případech zde používaných bude intuitivně jasné, co kraj plochy znamená.

Plocha s prázdným krajem je totéž, co uzavřená plocha.

Kraj. Například kraj K. Tu mám ráda.

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.

Příkladem je povrch krychle nebo válce, nebo „leporelo", „sněhulák" nebo lemniskata vynásobená úsečkou.

Povrch krychle nebo válce, i „sněhulák", jsou příklady po částech hladké uzavřené plochy.

Každá po částech hladká plocha je parametricky zadaná reálnými spojitými funkcemi $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$, které jsou definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině, přičemž $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ mají spojité parciální derivace všude v I kromě konečně mnoha úseček.

Průběžně zapojujte představivost.

Podobně jako u křivek je vhodné dát název hezkým uzavřeným po částech hladkým plochám typu kulová plocha nebo povrch kvádru.

Po částech hladká plocha P, parametricky zadaná zobrazením Φ na uzavřeném intervalu I, se nazývá jednoduše uzavřená jestliže Φ je prosté na vnitřku I, konstantní na hranici I s hodnotou různou od hodnot na vnitřku I.

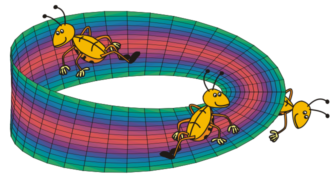
Jednoduše uzavřená plocha P rozděluje prostor na dvě souvislé části, jednu omezenou, zvanou vnitřek (značení ιP) a druhou neomezenou.

Jak je to s orientací plochy?

Orientace u křivky znamenalo zadat směr tečen ke křivce. U plochy nelze mluvit o směru tečen, ale o směru normál.

Orientace plochy znamená, že lze mluvit o dvou stranách plochy, jedna se označí za kladnou a druhá za zápornou.

Ne všechny plochy lze orientovat – typickou neorientovatelnou plochou je Möbiův list.



Zkoušel jsem to na svém pásku a nevydržel.

Takže má dva kraje, které jsou totožné.

Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.

U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.

U grafů funkcí dvou proměnných se za kladnou stranu bere horní strana.

Pokud se to poplete, vyjde výsledek "až na znaménko". Blahopřeji.

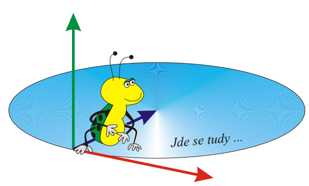
Mouchy dovedou chodit po ploše zespodu. Mi se to nikdy nepovedlo.

Orientace hladké plochy znamená, že v každém jejím bodě je určen směr normály a to spojitým způsobem: jestliže půjdete po jednoduše uzavřené křivce na dané ploše, musíte dojít do výchozího bodu ve stejné poloze.

Skončíte hlavou nahoru.´

Pokud jste začali hlavou nahoru . . .

Je-li orientovaná křivka C částí kraje orientované plochy P, říká se, že obě orientace jsou souhlasné, jestliže při chůzi po křivce v kladném směru a po kladné straně plochy, máte plochu po levé straně.



Nebude-li řečeno jinak, bude se vždy předpokládat, že plochy a jejich kraje jsou orientovány souhlasně.

Musí se dávat pozor při orientaci po částech hladkých ploch, protože ve styčných hranách obecně neexistují normály.

Nechť jsou jednotlivé spojované plochy orientovány a nechť jejich kraje jsou uzavřené křivky, které jsou orientovány souhlasně s příslušnými plochami. Pak je celá plocha orientována, jestliže části krajů, které se stýkají (právě dvě) jsou navzájem orientovány opačně.

Ničemu nerozumím, asi jsem zde "zespoda". . .

Poznámky 1:

Použití intervalu v definici plochy sice zjednodušuje některé další definice, ale jiné zase komplikuje. Proto je dobré mít na mysli, že lze použít i jiné množiny místo intervalu za definiční obor parametrů.

Místo intervalu I lze vzít v definici plochy jakýkoliv prostý homeomorfní obraz intervalu, např. vnitřek kruhu (popř. s části hraniční kružnice), různě zdeformovaný interval nebo kruh, apod.

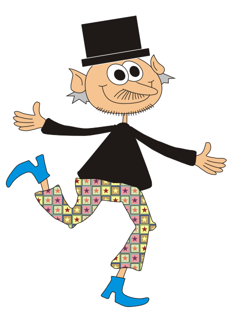
Homeomorfismusmezi podmnožinami A, B roviny je spojité prosté zobrazení $f : A \to B$ takové, že f^{-1} je také spojité. Pro hladké plochy je nutné dodat ještě slovo *hladký* homeomorfismus, čímž se míní, že f i f^{-1} mají spojité parciální derivace.

Toto je nesmírně důležitý pojem.

My skřítci jsme všichni navzájem homeomorfní.

Každé dva uzavřené (nebo otevřené) intervaly v rovině se na sebe dají zobrazit hladkým homeomorfním zobrazením.

Uzavřený (nebo otevřený) kruh je hladce homeomorfní s uzavřeným (nebo otevřeným, resp.) intervalem.



Neuděláte chybu, když si budete představovat, že každá kompaktní polootevřená konvexní množina v rovině je homeomorfní s uzavřeným intervalem v rovině.

To chci slyšet ještě jednou. Rýmuje se to alespoň?

Spojení ploch lze definovat i jiným způsobem. Např. bylo možné požadovat, aby se definiční intervaly protínaly jen na části své strany.

Při původní definici je totiž nutné pro připojení třetí a dalších ploch definiční obor parametrů upravit tak, aby se příslušné intervaly protínaly v celých stranách.

Je možné vzít za definiční obory hezké polootevřené množiny mající za hranici křivky a při spojení požadovat překrývání částí těchto křivek

Každý bod kraje plochy S je obrazem bodu hranice definičního oboru I v $\mathbb{R}^2$.

U představy zvlněného kruhu v prostoru je kraj přímo obraz hranice kruhu (nebo čtverce) v rovině.

Ale mohou existovat body hranice I, které se zobrazí dovnitř plochy P. Např. se v I ztotožní (hladce) dvě protilehlé strany a dostane se válcová plocha – ztotožněné strany, kromě svých krajních bodů, přejdou dovnitř válcové plochy.

Ještě výraznější je příklad, kdy se všechny strany obdélníku ztotožní (hladce) do jednoho bodu. Výsledkem je kulová plocha, jejíž kraj je prázdná množina. Je to obdoba Jordanových křivek. Je to obdoba Jordanových křivek a zaslouží si taky název: uzavřená plocha.

V poměrně častých případech si lze kraj plochy představit následovně: jsou to body, pro které žádné jejich okolí na ploše (tj. průnik jejich okolí v prostoru s plochou) nemá tvar „zvlněného" kruhu s oním bodem uprostřed.

Uvědomte si rozdíl při orientování po částech hladké křivky a po částech hladké plochy.

U křivky bylo jedno, jak jednotlivé hladké části zorientujeme (pokud nešlo o jednoduše uzavřenou křivku), u ploch už to jedno není.

Nechť P je po částech hladká plocha, u které je dána orientace jejím tvarem (mapř. je jednoduše uzavřená nebo je grafem funkce dvou proměnných).

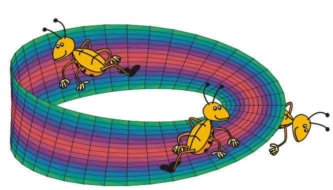
Je-li jedna její hladká část orientována souhlasně s orientací P a uděláte-li orientaci ostatních hladkých částí podle předchozího odstavce o orientaci po částech hladkých ploch, pak dostanete orientaci souhlasnou s původní orientací P.

Na "viditelné"ploše je vše vidět. Definice potřebujeme pro to, aby se zvládly případy "neviditelné".

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Ukažte, že Möbiův list nelze orientovat.



2. Ukažte, že povrch krychle je po částech hladká plocha.

3. Ukažte, že kulová plocha je hladká uzavřená plocha.

Můžete přepokládat (ve smyslu poznámky), že definičním oborem parametrů je kruh kolem nuly. Až vyřešíte otázku 4., zvládnete to i s definičním oborem intervalem (ve smyslu definice).

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

1. Ukažte, že graf spojité reálné funkce f definované na intervalu I v rovině je plocha v definovaném smyslu.

Najděte příslušnou parametrizaci.

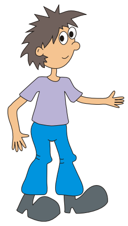
2. Ukažte, že pro hladkou plochu P je množina těch jejích bodů, ve kterých je jeden vybraný Jacobiho determinant matice z definice hladké plochy nenulový, otevřená.

Spojité hrátky. Zkuste nejprve ukázat, že funkce na definičním oboru parametrů (intervalu I) přiřazující bodu příslušný Jakobián je spojitá.

3. Dokažte popis po částech hladké plochy pomocí parametrů na intervalu.

4. Najděte hladký homeomorfismus převádějící kruh na čtverec (oba buď otevřené nebo oba uzavřené).

Kvadratura kruhu?



Není divu, že to je fuška.

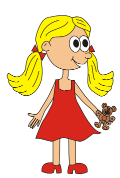
Konec otázek 1.

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU

Myšlenka výpočtu integrálu funkce $f : P \to \mathbb{R}$ na ploše P je podobná jako u křivkového integrálu 1.druhu. Pomocí určovacích parametrických funkcí se plocha „narovná" a spočítá se integrál přes podmnožinu roviny.

Plošný integrál se bude definovat přes parametrizaci.

Placatý integrál je snadný, když umíte kouzlit s parametry.



Vykouzli mi kulatou tabulku čokolády.

Ono narovnání je trochu složitější než u křivek. Tam bylo nutné příslušnou funkci vynásobit faktorem který odpovídal změně délky při narovnání křivky (od $\mathrm{d}s$ se přešlo k $\mathrm{d}x$).

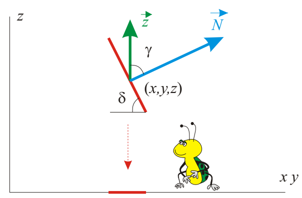
Stejně tak u plochy je třeba použít faktor, který udává změnu velikosti křivé plochy při narovnání.

V bodě (x, y, z) plochy se velmi malá ploška $\mathrm{d}S$ okolo tohoto bodu dá považovat za rovinnou a zjistí se poměr její velikosti ku poměru jejího průmětu, např. do roviny xy (není-li tento průmět úsečka nebo bod).

V rovině xy má průmět velikost $\mathrm{d}x.\,\mathrm{d}y$. Skutečná ploška má velikost větší, a to $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x.\,\mathrm{d}y/|\cos\gamma|$, kde γ je úhel, který svírá normála k ploše v (x, y, z) s rovnoběžkou v (x, y, z) s osou z v kladném směru.

Je nutné předpokládat, že $|\cos\gamma| \neq 0$, tj., že ploška není rovnoběžná s osou z.

Tedy že normála "nepadne"do roviny xy. Aby se prostě nemuselo spadnout.



Směřuje to ke spočtení Jakobiánu.

Podle druhé podmínky definice hladkých ploch musí být v každém bodě plochy aspoň jeden uvedený kosinus nenulový.

Hodnost 2 matice z definice hladké plochy znamená, že normála (čili vektorový součin prvního a druhého řádku oné matice) je nenulový vektor. Ten nemůže padnout do rovin xy, yz i zx najednou.

Plocha se rozdělí na nejvýše tři části, a v každé je jeden daný kosinus nenulový. Integrál přes plochu P je pak součtem integrálů přes tyto části.

Podle volby takové části se berou průměty i do rovin xz nebo yz a dostávají se velikosti plošek $\mathrm{d}x.\,\mathrm{d}z/|\cos\beta|$, resp. $\mathrm{d}y.\,\mathrm{d}z/|\cos\alpha|$, kde úhly β, α jsou opět úhly mezi normálou a příslušnými osami (y, resp. x). Kosiny těchto úhlů se nazývají *směrové kosiny* normály.

Nyní lze definovat plošný integrál 1.druhu. V křivkovém integrálu používaný symbol $\mathrm{d}s$ bude nahrazen symbolem $\mathrm{d}S$. Bude zadefinován integrál přes projekci M plochy na rovinu xy.

DEFINICE. Nechť f je funkce zadaná na hladké ploše P, na které je v každém bodě $\cos\gamma \neq 0$. Pak se definuje plošný integrál 1.druhu funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S)\ \mathrm{d}S = \int_M f(S) \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{|\cos\gamma|}\,.$$

Na pravé straně je dvojrozměrný integrál, v něm se za proměnné S, x, y, γ musí dosadit příslušné hodnoty (viz dále).

Samozřejmě lze požadavek nenulovosti směrového kosinu oslabit podmínkou, že může nabývat 0 jen na malé množině (nulové).

Přímo z definice lze ukázat následující vlastnosti:

POZOROVÁNÍ. Následující 2 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany, poslední nerovnost platí, pokud existuje levá strana.

1. $\int_P (\alpha f(S) + \beta g(S))\ \mathrm{d}S = \alpha \int_P f(S)\ \mathrm{d}S + \beta \int_P g(S)\ \mathrm{d}S$;
2. $\int_{P_1+P_2} f(S)\ \mathrm{d}S = \int_{P_1} f(S)\ \mathrm{d}S + \int_{P_2} f(S)\ \mathrm{d}S$;
3. $|\int_P f(S)\ \mathrm{d}S| \le O(P) \max_{S\in P} |f(S)|$, kde $O(P)$ je obsah plochy P.

Úhel γ se samozřejmě mění spolu s bodem (x, y, z) a pro výpočet plošného integrálu je obvykle třeba $\cos\gamma$ vyjádřit pomocí nějakých souřadnic.

Následující jednoduché pozorování uvádí takové vyjádření pro plochy zadané jako graf funkce.

VĚTA. Nechť plocha P je grafem funkce $h(x, y)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Důkaz. Rovnost lze odvodit z obecnější rovnosti pro plochu P zadanou rovností $g(x, y, z) = 0$.

Z teorie funkcí více proměnných je známo, že $\mathrm{grad} g$ udává směr normály, takže z popisu skalárního součinu pomocí kosinu úhlu sevřeného oběma vektory se dostane

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \frac{|\,\mathrm{grad} g|}{|\,\mathrm{grad} g.(0,0,1)|}\,.$$

Nyní stačí za g dát funkci $z - h(x, y)$. ◇

Plochy však bývají ponejvíce zadány parametricky. Tam je příslušný popis složitější a nebude v tomto textu dokazován:

VĚTA. Nechť je plocha P dána parametricky rovnostmi $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \tau(u, v)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{J(\varphi, \psi)}\,,$$

kde

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)^2 \\ G &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\tau}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\tau v}\,. \end{aligned}$$

a $J(\varphi, \psi)$ je Jakobián funkcí φ, ψ.

Nyní lze uvést převod plošného integrálu 1.druhu na obyčejný integrál přes rovinnou množinu.

VĚTA. Nechť f je funkce definovaná na hladké ploše P.

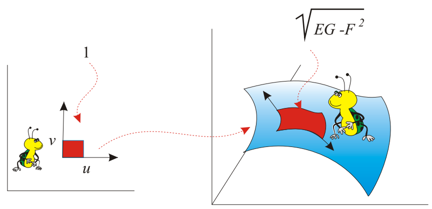
1. Nechť je plocha P grafem funkce h definované na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\,\mathrm{d}S = \int_A f(x, y, h(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

2. Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\,\mathrm{d}S = \int_A f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v))\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Jiné vysvětlení pro přidaný člen $\sqrt{EG - F^2}$ je, že je to obsah čtyřúhelníku určeném dvěma řádkovými vektory z matice v definici hladké plochy. A ty jsou zase "jakýmsi poměrem"mezi malým pohybem parametru u (resp. v) a příslušným pohybem na ploše.



Poznámky 2:

Plošný integrál byl definován na hladké ploše. Na po částech hladkých plochách se integrál vypočte pro jednotlivé hladké části a pak sečte.

Lze použít definici integrálu pro hladké plochy i pro částečně hladké plochy s tím, že na zanedbatelných množinách (vzhledem k dvojrozměrnému integrálu) není integrovaná funkce definována.

V Pozorování vypadla oproti křivkovým integrálům 1.druhu třetí vlastnost. Odpovídající vlastnost pro plošné integrály samozřejmě platí (plošný integrál 1.druhu nezávisí na orientaci plochy), ale nemá příliš smysl tuto vlastnost vypisovat.

Plošné integrály lze též definovat pomocí Riemannových součtů. Buď se rovnou použije parametrizace plochy a rozděluje se definiční interval na menší intervaly, nebo se použije rozdělení dané plochy na menší plošky – v tomto případě je nutné znát obsahy těchto plošek.

Podrobnosti tu nebudou uváděny.

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Vypočtěte obsah plochy dané rovností $x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{xy}$. Nejdříve najděte parametrické vyjádření plochy. $[\pi^2]$

2. Vypočtěte $\int_P z^2 \, \mathrm{d}S$, kde P je část kužele daná parametrizací $x = r\cos\varphi\sin\alpha, y = r\sin\varphi\sin\alpha, z = r\cos\alpha, r \in [0,a], \varphi \in [0,2\pi]$ a $\alpha \in (0,\pi/2)$ je konstanta. $[\pi a^4 \sin\alpha\cos^2\alpha/2]$

3. Vypočtěte $\sqrt{EG - F^2}$ pro kulovou plochu se středem v počátku zadanou sférickými souřadnicemi. $[r^2 \cos\varphi]$

4. Vypočtěte plochu koule pomocí výsledku předchozího příkladu.

5. Zintegrujte funkci xyz přes povrch krychle o délce hrany 1, se stranami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, procházející body $(0,0,0), (1,1,1)$. [3/4]

Konec příkladů 2.

Otázky 2:

1. Dokažte podrobně tvrzení o vyjádření směrových kosinů pro graf funkce $h(x,y)$.

2. Ukažte, že tvrzení o vyjádření směrových kosinů pro graf funkce $h(x,y)$ je důsledkem obecné věty o vyjádření směrových kosinů pro plo

3. Ukažte, že u hladké plochy existuje v každém bodě tečná rovina. Při jaké poloze tečné roviny nelze při výpočtu plošného integrálu použít průmět na rovinu yz v okolí daného bodu?

4. Ukažte přímo z definice, že plošný integrál 1.druhu nezávisí na orientaci plochy.

5. Dokažte Pozorování.

6. Dokažte, že definice obsahu plochy souhlasí s již dříve definovanými obsahy rovinných obrazců a plochy rotačního tělesa.

Jsem tu.

***7.** Najděte vyjádření pro směrové kosiny u grafu reálné funkce dvou proměnných.

A mizím. Byla to jen vteřinka.

Konec otázek 2.

Cvičení 2: Příklad. Spočtěte povrch koule B o poloměru a.

Řešení. Máme vypočítat integrál

$$\int_{\partial B} 1 \, \mathrm{d}S.$$

Je výhodné přejít ke sférickým souřadnicím.

Sféru ∂B tedy parametrizujeme

$$\varphi(u,v) = a\cos u \cos v, \quad \psi(u,v) = a \sin u \cos v, \quad \tau(u,v) = a \sin v,$$

kde

$$u \in (-\pi, \pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Spočítáme parciální derivace

$$\partial_u(\varphi,\psi,\tau), \qquad \partial_v(\varphi,\psi,\tau)$$

a spočítáme vektorový součin těchto dvou vektorů.

Výsledek označme $b = (b_1, b_2, b_3)$. Pak platí

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a^4 \cos^2 v.$$

Dostáváme

$$\int_{\partial B} 1 \, \mathrm{d}S = a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}u \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}v |\cos v| = 4\pi a^2.$$

Dokonáno jest.

Konec cvičení 2.

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU

Křivkové integrály 2.druhu vyjadřují např. tok kapaliny danou křivkou.

Plošné integrály 2.druhu budou vyjadřovat tok kapaliny danou plochou.

Na této motivaci je také vidět, proč je třeba mít plochu orientovanou (kapalina proudí plochou z jedné strany na druhou).

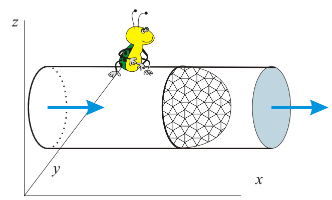
DEFINICE. Nechť P je hladká orientovaná plocha a $f : P \to \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3). Pak se definuje plošný integrál 2.druhu funkce f přes P rovností

$$\int_P \mathbf{f} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x,y,z)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + f_2(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z + f_3(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y)\,.$$

Integrál na pravé straně je součtem tří integrálů a každý lze brát přes projekci plochy P do příslušné roviny (yz nebo xz nebo xy resp.).

V definici je pro jednoduchost uvedena integrace přes celou rovinu (rozumí se, že integrovaná funkce se dodefinuje nulou ve zbývajících bodech).

Tedy například pokud "kapalina proudí"pouze ve směru osy x (tedy pouze f_1 je nenulová), pak například u cedníku ve tvaru polosféry bude integrál záviset pouze na jejím průmětu do roviny yz:



Opět se snadno ukáže:

POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany.

1. $\int_P (\alpha f(S) + \beta g(S))\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \alpha \int_C f(S)\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \beta \int_C g(S)\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$;
2. $\int_{P_1+P_2} f(S)\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{P_1} f(S)\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{P_2} f(S)\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$;
3. $\int_{-P} f(S)\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_P f(S)\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$;

Podle uvedené definice plošného integrálu 2.druhu však nelze integrál většinou přímo počítat, protože např. $\int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x,y,z)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ obsahuje i proměnnou x, která závisí na y a z.

Tato závislost se musí do integrálu dosadit.

Použije se věta o substituci na jednotlivé části integrálu podle toho, jak je plocha P zadaná.

Je vhodné si uvědomit, že kladná strana grafu funkce je horní strana.

VĚTA. Nechť $f : P \to \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P.

1. Nechť je plocha P grafem funkce g definované na množině A. Pak

$$\int_P f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_A (-f_1(x,y,g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial x}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y - f_2(x,y,g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + f_3(x,y,g(x,y))\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y)\,.$$

2. Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A. Pak

$$\begin{aligned}\int_P f \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \pm \int_A f_1(\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)) J(\psi, \tau)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\ &\pm \int_A f_2(\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)) J(\varphi, \tau)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\ &\pm \int_A f_3(\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)) J(\varphi, \psi)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,,\end{aligned}$$

kde znaménka před integrály se určí podle souhlasu orientace plochy s obvyklou orientací souřadnicových množin.

Poslední věta o určení znaménka znamená, např. pro poslední integrál na pravé straně, že znaménko bude stejné jako znaménko Jakobiánu $J(\varphi, \psi)$, pokud při pohledu seshora na rovinu xy vidíme kladnou stranu plochy v nějakém vybraném bodě, ve kterém se nějaké jeho okolí na ploše zobrazuje prostě na rovinu xy.

Podobně jako u křivkových integrálů, i zde existuje vztah mezi plošnými integrály 1.druhu a 2.druhu. Následující vzorec je zřejmý z popisu obou integrálů:

POZOROVÁNÍ. Nechť $f : P \to \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P. Potom

$$\int_P f \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_P (f_1(x,y,z)\cos\alpha + f_2(x,y,z)\cos\beta + f_3(x,y,z)\cos\gamma)\ \mathrm{d}S\,,$$

kde uvedené kosiny jsou směrové kosiny v bodech z P.

V integrálu $\int_P f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ lze tedy $f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ chápat jako skalární součin vektoru $\boldsymbol{f}$ s vektorem $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\ \mathrm{d}S$

Tedy $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je normálový vektor k ploše v daném bodě o velikosti $\mathrm{d}S$.

Poznámky 3:

Plošné integrály 2.druhu se často definují „po složkách", tj. integrál $\int f_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ zvlášť a další dva integrály také zvlášť. Výsledky se pak sečtou.

Opět je tu ztracen vektorový charakter a motivace, podobně jako u křivkových integrálů 2.druhu definovaných po složkách.

I plošné integrály 2.druhu lze definovat pomocí Riemannových součtů.

Konec poznámek 3.

Příklady 3:

1. Spočtěte $\int_P (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde P je plocha $\{(x,y,z); z=\sqrt{x^2+y^2}, z \in [0,1]\}$. [0]

2. Spočtěte $\int_P \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z/x + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x/y + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y/z$, kde P je povrch elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

3. Spočtěte plošný integrál 2.druhu funkce (xy, yz, xz) přes povrch krychle o délce hrany 1, se stranami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, procházející body $(0,0,0), (1,1,1)$. [3/2]

4. Spočtěte $\int_P x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,kde $P = \{(x,y,z); x+y+z=a, x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$ pro $a>0$. Použijte vyjádření pomocí plošného integrálu 1.druhu.

5. Spočtěte $\int_P 0\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $P = \{(x,y,z); y^2+z^2=a^2, z \ge 0, 0 \le x \le a\}$ je část válce ($a>0$). Použijte definici plošného integrálu 2.druhu pomocí skalárního součinu s normálou. [$2a^4$]

Konec příkladů 3.

Otázky 3:

1. Ukažte vlastnosti uvedené hned po definici integrálu, zvláště změnu znaménka při změně orientace plochy. Proč tato situace nenastane u plošného integrálu 1.druhu?

2. Dokažte vztah mezi plošnými integrály obou druhů.

Konec otázek 3.

Cvičení 3: Příklad. Vypočtěte integrál

$$I = \int_M x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je sféra o poloměru a orientovaná ve směru vnější normály.

Řešení. Substitucí převedeme integrál do sférických souřadnic.

Množina je kulatá a polární souřadnice nám provedou "narovnání"do roviny.

Položme tedy

$$\varphi(u,v) = a\cos u\cos v, \quad \psi(u,v) = a\sin u\cos v, \quad \tau(u,v) = a\sin v,$$

kde

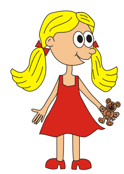
$$u \in (-\pi,\pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Potom

$$\begin{aligned} I &= \int_M x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u\cos^3 v + \sin^2 u\cos^3 v + \sin^2 v\cos v)\,\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v\,\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = 4\pi a^3, \end{aligned}$$

což jsme měli spočítat.

Problémy se zde nemohou objevit.



Protože jsem tu taky já.

Konec cvičení 3.

GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA

Greenova věta převádí křivkový integrál po jednoduše uzavřené křivce na integrál přes vnitřek této křivky. Posunutím o dimenzi výše by se měla dostat věta o převodu plošného integrálu po jednoduše uzavřené ploše na integrál přes vnitřek této plochy.

Je to jenom narovnání do roviny. To bude snadné.

Greenův vzorec měl dvě podoby: pro křivkový integrál ze skalárního součinu s tečným vektorem nebo s normálovým vektorem.

Pro plošné integrály se musí použít druhá varianta.

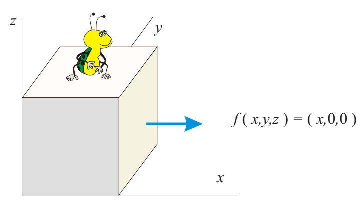
VĚTA. Nechť G je otevřená podmnožina prostoru a P je jednoduše uzavřená orientovaná plocha ležící i s vnitřkem v G. Nechť $f = (f_1, f_2, f_3)$ je funkce $G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak platí

$$\oint_P \big(f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + f_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big) =$$

$$= \int_{\iota P} \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Důkaz je naznačen v *Poznámkách* a *Otázkách*.

Jak budou vypadat strany rovnosti z věty pro tento jednoduchý příklad?



Podobně jako Greenova věta, dá se i Gaussova–Ostrogradského věta vyslovit pro konečná sjednocení ploch.

Je to stále jenom varianta základní věty analýzy? A pokud tomu dobře rozumím, jde o zákon zachování všeho. A nejobecnější variantu asi nikdy nenajdeme.

Brzy najdeme nejobecnější formulaci.

Poznámky 4:

V *Otázkách* je naznačen důkaz Gaussova–Ostrogradského vzorce pro kvádr. Myšlenka důkazu pro obecné přípustné těleso je obdobná jako v případě Greenovy věty:

Těleso se pokryje nepřekrývajícími se kvádry a integrál přes těleso je součet integrálů přes jednotlivé kvádry, které se vyjádří podle již dokázaného vzorce jako plošné integrály 2.druhu přes povrch kvádrů.

Vzhledem k opačným orientacím se plošné integrály přes jednotlivé stěny vyruší. Dá se očekávat, že zbude plošný integrál přes hranici tělesa.

Pokud se hranice tělesa skládá z obdélníků rovnoběžných se souřadnicovými rovinami, je zřejmě poslední věta předchozího odstavce platná. To bude případ, že se použilo konečně mnoho pokrývacích kvádrů.

Nyní stačí uvážit, že až na libovolné ε lze jak trojrozměrný integrál tak i potřebný plošný integrál nahradit integrály přes takové konečné sjednocení, resp. přes jeho hranici.

Gaussova–Ostrogradského vzorec má široké použití v přírodních vědách. Např. pomocí tohoto vzorce lze odvodit Archimedův zákon.

Používá se i v teorii gravitace.

Kdo je ten Gravitac?

Pomocí Gaussova–Ostrogradského vzorcese dá ukázat, že harmonická funkce $f(x, y, z)$ na tělese s hranicí tvaru jednoduše uzavřené plochy, je jednoznačně určena svými hodnotami na hranici. (f se nazývá harmonická, pokud $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = 0$.)

To je úžasná věc. Konečně harmonie v matematice.

Konec poznámek 4.

Příklady 4:

1. Vypočtěte plošný integrál 2.druhu z funkce (x, y, z) na sféře $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty.

2. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty vypočtěte plošný integrál 2.druhu z funkce (xy, yz, xz) na povrchu krychle o délce hrany 1, se stranami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, procházející body $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$. [3/2]

Konec příkladů 4.

Otázky 4:

Dokažte Gaussův–Ostrogradského vzorec pro kvádr K se stěnami rovnoběžnými s rovinami souřadnic, tj. pro $K = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.

Postupujte podobně jako u důkazu Greenovy věty pro obdélník.

Nejdříve upravte $\int_K \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z})\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ podle definice trojrozměrného integrálu.

Potom rozepište $\oint_{\partial K} \big(f_1(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_2(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + f_3(x, y, z))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big)$ podle jednotlivých stěn kvádru a porovnejte s výsledkem z předchozího odstavce.

Děkuji :-)

Kdo je hravý analytik, ten to hravě zvládne.

Konec otázek 4.

STOKESOVA VĚTA

Greenovu větu lze přenést o dimenzi výše ještě jedním způsobem, a to na prostorovou křivku, která je hranicí nějaké plochy.

Na rozdíl od Gaussovy–Ostrogradského věty se bude v tomto případě vycházet z Greenova vzorce pro skalární součin funkce a tečného vektoru:

VĚTA. Nechť C je jednoduše uzavřená křivka v prostoru, která je krajem po částech hladké plochy ιC. Nechť C i ιC leží v otevřené množině G, na které je definována funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak platí

$$\oint_C (f_1(x,y,z)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y,z)\,\mathrm{dy} + f_3(x,y,z)\,\mathrm{dz}) =$$

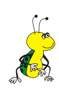
$$\int_{\iota C} \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dz} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \right).$$

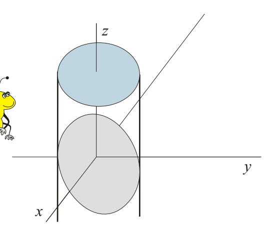
Podobně jako Greenova věta, dá se i Stokesova věta vyslovit pro plochy mající za kraj konečná sjednocení jednoduše uzavřených křivek v prostoru.

Bla, bla, bla? Proč by ne.

Příklady 5:

1. Vypočtěte pomocí Stokesovy věty $\oint_C (y\,\mathrm{dx} + z\,\mathrm{dy} + x\,\mathrm{dz})$ přes kružnici $\{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x + y + z = 0\}$.





2. Vypočtěte pomocí Stokesovy věty $\oint_C (y^2\,\mathrm{dx} + z^2\,\mathrm{dy} + x^2\,\mathrm{dz})$ přes obvod trojúhelníka s vrcholy $(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$ a to jak přes „vnitřek" tohoto trojúhelníka, tak přes tři trojúhelníky spojující vždy dva vrcholy s počátkem.

3. Vypočtěte pomocí Stokesovy věty plošný integrál z funkce $(y, -x, 0)$ přes horní polosféru $\{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0\}$.

Získaný křivkový integrál spočtěte pomocé Greenovy věty.

Konec příkladů 5.

Otázky 5:

Dokažte Stokesovu větu následujícím postupem.

Pro jednoduchost předpokládejte $f_2 = f_3 = 0$.

Nechť má ιC parametrizaci $\Phi = (\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v))$ na intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$ a obvod I se zobrazí na křivku C pomocí 4 zobrazení $\Phi(t,0), \Phi(1,t), \Phi(t,1), \Phi(0,t)$ na $[0,1]$.

Vyjádřete integrál $\oint_C (f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x$ podle definice pomocí zobrazení z obvodu I a dostanete $\oint_{\partial I}(f_1\varphi_u\ \mathrm{d}u + f_1\varphi_v\ \mathrm{d}v)$.

Na tento integrál použijte Greenovu větu a dostanete

$$\int_I (f_{1z}(\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v))J(\tau,\varphi)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v +$$

$$-\int_I (f_{1y}(\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v))J(\varphi,\psi)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,.$$

Srovnejte tento výsledek s popisem plošného integrálu 2.druhu pomocí parametrizace (pozor na znaménka). Měli byste dostat $\int_{\iota C} f1z(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - f_{1y}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Totéž se provede pro funkce $(0, f_2, 0)$ a $(0, 0, f_3)$ a výsledky se sečtou.

Rozmyslete si Stokesovu větu. BTW, nechcete si vymyslet svoji větu?

Moje věta? Počkám do jara, jestli na Stokesově větě něco nevyraší.

Konec otázek 5.

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ

Obdobně jako u křivkových integrálů, se nyní dají počítat velikosti ploch a jejich těžiště.

Pro tuto velikost bude používán termín *míra*.

Míra ani těžiště ploch nebyly definovány, následující popis je zde brán jako definice.

DEFINICE.

1. Míra po částech hladké plochy P je rovna $\int_P \mathrm{d}S$.
2. Hmotnost zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P je rovna $\int_P h \, \mathrm{d}S$, kde h je funkce na P udávající hustotu.
3. Těžiště zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P mající hustotu h má souřadnice

$$T_x = \frac{\int_P xh \, \mathrm{d}S}{m}, T_y = \frac{\int_P yh \, \mathrm{d}S}{m}, T_z = \frac{\int_P zh \, \mathrm{d}S}{m},$$

kde m je hmotnost desky.

V integrálech se musí za x, y, z, $\mathrm{d}S$ dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je plocha P popsána.

Čitatelé ve vzorcích pro těžiště jsou momenty (statické) plochy vzhledem k rovinám yz nebo xz nebo xy resp.

Opět stejně jako u použití Greenovy věty pro míry rovinných obrazců, lze použít Gaussovu–Ostrogradského větu pro výpočet objemu tělesa. Postup je zcela stejný.

Je-li G otevřená podmnožina prostoru mající za hranici uzavřenou po částech hladkou plochu ∂G, pak objem $V(G)$ tělesa G (nebo jeho uzávěru $\overline{G}$) je roven

$$V(G) = \int_{\partial G} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{\partial G} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = \int_{\partial G} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \int_{\partial G} (x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z + x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y) \, .$$

Poznámky 6:

Stokesovu větu lze použít na výpočet obsahu plochy křivkovým integrálem přes kraj plochy (podobně jako Greenovu větu na výpočet obsahu rovinného obrazce pomocí křivkového integrálu) – viz *Otázky*. Tento přístup se příliš nepoužívá.

Obecně si můžeme zkusit algebraickou formičku:

*$(n.k)$**-rozměrná Greenova věta.**

Obě zobecnění Greenovy věty na Stokesovu a Gaussovu–Ostrogradského se zdají být zcela různá a nepodobná. Avšak není tomu tak. Existuje obecná věta, jejíž speciální případy jsou všechny tři uvedené věty.

Jsou vidět alespoň dvě společné věci těchto vzorců: integrál přes geometrický útvar se převádí na integrál přes jeho hranici, přičemž na hranici se bere daná funkce a na celém útvaru se berou jisté kombinace derivací funkce.

Obecná věta vypadá následovně:

$$\int_P \mathrm{d}\omega = \int_{\partial P} \omega\,,$$

kde P je k-dimenzionální „hezká" plocha v $\mathbb{R}^n$ s „hezkým" krajem ∂P a ω je tzv. $(k-1)$-forma na P.

Podle definice má k-forma ω tvar $\sum\limits_{i_1,\ldots,i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_n)\ \mathrm{d}x_{i_1}\ldots\ \mathrm{d}x_{i_k}$.

A samozřejmně 0-forma je $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Potom

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_l}\ \mathrm{d}x_l\ \mathrm{d}x_{i_1}\ldots\ \mathrm{d}x_{i_k}\right).$$

Je-li plocha P dána parametricky pomocí $x_i = \varphi_i(u_1,\ldots,u_k)$, kde $(u_1,\ldots,u_k) \in D \subset \mathbb{R}^k, i = 1,\ldots,n$, pak

$$\int_P \omega = \int_D \Big(f_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi_1(u_1,\ldots,u_k),\ldots,\varphi_n(u_1,\ldots,u_k)J(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k})\Big)\ \mathrm{d}u_1\ldots\ \mathrm{d}u_k\,.$$

kde J jsou příslušné Jakobiány.

Dosazením různých hodnot pro $1 \le k \le n$ se dostanou známá tvrzení:

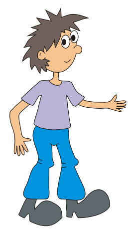
Pro $k = n = 1$ se dostane rovnost $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

Pro $k = n = 2$ se dostane Greenova věta.

Pro $k = n = 3$ se dostane Gaussova–Ostrogradského věta.

Pro $k = 2, n = 3$ se dostane Stokesova věta.

Ozkoušejte, co se dostane v případech $k = 1, n = 2$, $k = 1, n = 3$.



Pochopil jsem jedině, že $\mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2 = -\ \mathrm{d}x_2\ \mathrm{d}x_1$ a tedy $\mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_1 = 0$. Smysl mi to nedává.

Cítíš tam to "vektorovo"a "algebraično"? To dělali algebraický skřítci a to se pak nediv ...

Konec poznámek 6.

Příklady 6:

1. Najděte těžiště horní polosféry.

2. Najděte těžiště desky ve tvaru daném funkcí $z = x^2 + y^2$ pro $z \in [0, 1]$, která má hustotu v bodě (x, y, z) rovnou z.

3. Vypočtěte objem koule pomocí křivkových integrálů.

Konec příkladů 6.

Otázky 6:

1. Ověřte vzorce pro objem $V(G)$ tělesa G pomocí křivkových integrálů.

2. Najděte vzorce pro výpočet obsahu plochy pomocí křivkového integrálu přes kraj plochy.

Ve Stokesově větě se musí nejdříve plošný integrál 2.druhu převést na plošný integrál 1.druhu (např. pomocí směrových kosinů).

Pak se musí zvolit funkce f tak, aby odpovídající funkce v získaném plošném integrálu 1.druhu byla rovna 1.

Je to vždy možné?

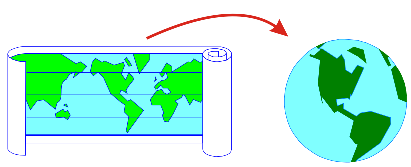
Konec otázek 6.

STANDARDY z kapitoly

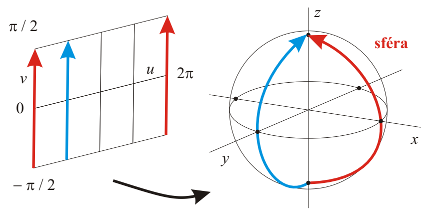
PLOŠNÉ INTEGRÁLY

PLOCHY

Parametrizace plochy je vlastně udělání dvojrozměrného plánu.



Musí se vlastně daná plocha "osahat".



Plocha je množina $\{(\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)); (u,v) \in I\}$, kde $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.

Předchozí plocha se nazývá uzavřená, jestliže I je uzavřený a všechny body z hranice I se zobrazí do jediného bodu.

Nechť P_1, P_2 jsou plochy zadané na intervalech I_1, I_2 resp., které mají společnou jednu svou stranu. Spojení ploch P_1, P_2 je pak jejich sjednocení definované na $I_1 \cup I_2$. Značí se $P_1 + P_2$.

Indukcí lze tento pojem zavést pro spojení konečně mnoha ploch.

Plocha zadaná parametry $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ na intervalu I se nazývá hladká, jestliže platí:

1. funkce φ, ψ, τ mají spojité první parciální derivace na I;
2. pro každé $(u,v) \in I$ má matice
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \end{pmatrix}$$
hodnost 2;
3. každý bod plochy je obrazem jediného bodu $(u,v) \in I$ s jedinou možnou výjimkou: obrazy bodů z hranice I mohou splývat.

Pro další část je důležitý pojem kraj plochy P.

Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v $\mathbb{R}^3$ (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.

Pro představu si vezměte kruh, jakkoli položený v prostoru, třeba i zvlněný. Je jasné, co znamená kraj tohoto obrazce.

Plocha s prázdným krajem je totéž, co uzavřená plocha.

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.

Povrch krychle nebo válce jsou příklady po částech hladké uzavřené plochy.

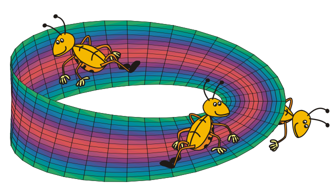
Každá po částech hladká plocha je parametricky zadaná reálnými spojitými funkcemi $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$, které jsou definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině, přičemž $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ mají spojité parciální derivace všude v I kromě konečně mnoha úseček.

Po částech hladká plocha P, parametricky zadaná zobrazením Φ na uzavřeném intervalu I, se nazývá jednoduše uzavřená jestliže Φ je prosté na vnitřku I, konstantní na hranici I s hodnotou různou od hodnot na vnitřku I.

Jednoduše uzavřená plocha P rozděluje prostor na dvě souvislé části, jednu omezenou, zvanou vnitřek (značení ιP) a druhou neomezenou.

Orientace plochy znamená, že lze mluvit o dvou stranách plochy, jedna se označí za kladnou a druhá za zápornou.

Ne všechny plochy lze orientovat – typickou neorientovatelnou plochou je Möbiův list.



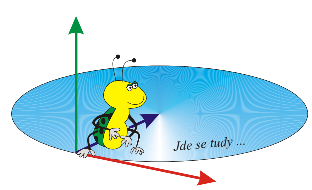
Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.

U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.

U grafů funkcí dvou proměnných se za kladnou stranu bere horní strana.

Orientace hladké plochy znamená, že v každém jejím bodě je určen směr normály a to spojitým způsobem: jestliže půjdete po jednoduše uzavřené křivce na dané ploše, musíte dojít do výchozího bodu ve stejné poloze.

Je-li orientovaná křivka C částí kraje orientované plochy P, říká se, že obě orientace jsou souhlasné, jestliže při chůzi po křivce v kladném směru a po kladné straně plochy, máte plochu po levé straně.



Nebude-li řečeno jinak, bude se vždy předpokládat, že plochy a jejich kraje jsou orientovány souhlasně.

Musí se dávat pozor při orientaci po částech hladkých ploch, protože ve styčných hranách obecně neexistují normály.

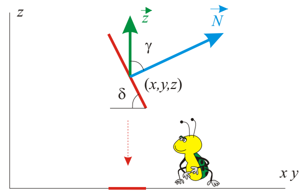
Nechť jsou jednotlivé spojované plochy orientovány a nechť jejich kraje jsou uzavřené křivky, které jsou orientovány souhlasně s příslušnými plochami. Pak je celá plocha orientována, jestliže části krajů, které se stýkají (právě dvě) jsou navzájem orientovány opačně.

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU

V bodě (x, y, z) plochy se velmi malá ploška $\mathrm{d}S$ okolo tohoto bodu dá považovat za rovinnou a zjistí se poměr její velikosti ku poměru jejího průmětu, např. do roviny xy (není-li tento průmět úsečka nebo bod).

V rovině xy má průmět velikost $\mathrm{d}x.\,\mathrm{d}y$. Skutečná ploška má velikost větší, a to $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x.\,\mathrm{d}y/|\cos\gamma|$, kde γ je úhel, který svírá normála k ploše v (x, y, z) s rovnoběžkou v (x, y, z) s osou z v kladném směru.

Je nutné předpokládat, že $|\cos\gamma| \neq 0$, tj., že ploška není rovnoběžná s osou z.



Podle druhé podmínky definice hladkých ploch musí být v každém bodě plochy aspoň jeden uvedený kosinus nenulový.

Plocha se rozdělí na nejvýše tři části, a v každé je jeden daný kosinus nenulový. Integrál přes plochu P je pak součtem integrálů přes tyto části.

Podle volby takové části se berou průměty i do rovin xz nebo yz a dostávají se velikosti plošek $\mathrm{d}x.\,\mathrm{d}z/|\cos\beta|$, resp. $\mathrm{d}y.\,\mathrm{d}z/|\cos\alpha|$, kde úhly β, α jsou opět úhly mezi normálou a příslušnými osami (y, resp. x). Kosiny těchto úhlů se nazývají *směrové kosiny* normály.

Bude zadefinován integrál 1. druhu přes projekci M plochy na rovinu xy.

DEFINICE. Nechť f je funkce zadaná na hladké ploše P, na které je v každém bodě $\cos\gamma \neq 0$. Pak se definuje plošný integrál 1.druhu funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S)\,\mathrm{d}S = \int_M f(S)\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|\cos\gamma|}\,.$$

Na pravé straně je dvojrozměrný integrál, v něm se za proměnné S, x, y, γ musí dosadit příslušné hodnoty (viz dále).

Požadavek nenulovosti směrového kosinu lze oslabit podmínkou, že může nabývat 0 jen na malé množině (nulové).

Úhel γ se samozřejmě mění spolu s bodem (x, y, z) a pro výpočet plošného integrálu je obvykle třeba $\cos\gamma$ vyjádřit pomocí nějakých souřadnic.

VĚTA. Nechť plocha P je grafem funkce $h(x, y)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Plochy však bývají ponejvíce zadány parametricky. Tam je potřeba k přepočítání plošného elementu plochy $\mathrm{d}S$ na plošný element intervalu parametrů $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ zapotřebí velikost normálového vektoru $\mathbf{n}$ k ploše v daném bodě.

Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A. Pak normálový vektor $\mathbf{n}$ k ploše je vektorovým součinem vektorů parciálních derivací

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \tau}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \tau}{\partial v} \right)$$

Vektorový součin vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ je definován

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Nyní lze napsat převod plošného integrálu 1.druhu na obyčejný integrál přes rovinnou množinu.

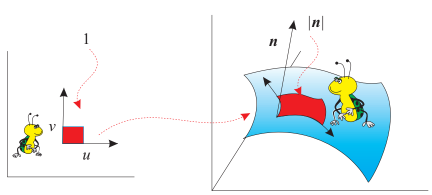
VĚTA. Nechť f je funkce definovaná na hladké ploše P.

1. Nechť je plocha P grafem funkce h definované na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\,\mathrm{d}S = \int_A f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

2. Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\,\mathrm{d}S = \int_A f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v))\,|\mathbf{n}|\,\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$



Příklad. Vypočtěte povrch koule B o poloměru a pomocí sférických souřadnic.

Řešení. Máme vypočítat integrál

$$\int_{\partial B} 1\,\mathrm{d}S.$$

Sféru ∂B tedy parametrizujeme

$$\varphi(u, v) = a \cos u \cos v, \quad \psi(u, v) = a \sin u \cos v, \quad \tau(u, v) = a \sin v,$$

kde
$$u \in (-\pi, \pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$
Spočítáme parciální derivace
$$\partial_u(\varphi, \psi, \tau), \qquad \partial_v(\varphi, \psi, \tau)$$
a spočítáme vektorový součin těchto dvou vektorů.
Výsledek označme $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Pak platí
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = a^4 \cos^2 v.$$
Dostáváme
$$\int_{\partial B} 1 \, \mathrm{d}S = a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos v| \, \mathrm{d}v \ \mathrm{d}u = 4\pi a^2.$$

Příklad. Zintegrujte funkci $x + y + z$ přes povrch krychle.
Příklad. Vypočtěte $\int_P z^2 \ \mathrm{d}S$, kde P je část kužele daná parametrizací
$$x = r \cos\varphi \sin\alpha, y = r \sin\varphi \sin\alpha, z = r \cos\alpha \ ,$$
$r \in [0, a], \varphi \in [0, 2\pi]$ a $\alpha \in (0, \pi/2)$ je konstanta.

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU

Křivkové integrály 2.druhu vyjadřují např. tok kapaliny danou křivkou.

Plošné integrály 2.druhu budou vyjadřovat tok kapaliny danou plochou.

DEFINICE. Nechť P je hladká orientovaná plocha a $f : P \to \mathbb{R}^3$ má souřadnice (f_1, f_2, f_3). Pak se definuje plošný integrál 2.druhu funkce f přes P rovností
$$\int_P \mathbf{f} . \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(x,y,z) \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z + f_2(x,y,z) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}z + f_3(x,y,z) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y) \, .$$

Integrál na pravé straně je součtem tří integrálů a každý lze brát přes projekci plochy P do příslušné roviny (yz nebo xz nebo xy resp.).

V definici je pro jednoduchost uvedena integrace přes celou rovinu (rozumí se, že integrovaná funkce se dodefinuje nulou ve zbývajících bodech).

Podle uvedené definice plošného integrálu 2.druhu však nelze integrál většinou přímo počítat, protože např. $\int_{\mathbb{R}^2}(f_1(x,y,z)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ obsahuje i proměnnou x, která závisí na y a z. Tato závislost se musí do integrálu dosadit.

Použije se věta o substituci na jednotlivé části integrálu podle toho, jak je plocha P zadaná.

VĚTA. Nechť $f : P \to \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P.

1. Nechť je plocha P grafem funkce g definované na množině A. Pak

$$\int_P f\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_A (-f_1(x,y,g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial x}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y - f_2(x,y,g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + f_3(x,y,g(x,y))\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y)\,.$$

$$\int_P f\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_A f(x,y,g(x,y))\ .\ \mathbf{n}\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\,,$$

kde $\mathbf{n} = (-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1)$ je normálový vektor k ploše.

2. Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ, ψ, τ na množině A. Pak

$$\begin{aligned}\int_P f\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad &= \quad \pm\int_A f_1(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))J(\psi,\tau)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\\ &\pm \quad \int_A f_2(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))J(\varphi,\tau)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\\ &\pm \quad \int_A f_3(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))J(\varphi,\psi)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,,\end{aligned}$$

kde znaménka před integrály se určí podle souhlasu orientace plochy s obvyklou orientací souřadnicových množin.

$$\int_P f\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_A f(x,y,g(x,y))\ .\ \mathbf{n}\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\,,$$

kde

$$\mathbf{n} = \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\tau}{\partial u}\Big) \times \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\tau}{\partial v}\Big)$$

je normálový vektor k ploše .

POZOROVÁNÍ. Nechť $f : P \to \mathbb{R}^3$ je funkce definovaná na hladké ploše P. Potom

$$\int_P f\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_P (f_1(x,y,z)\cos\alpha + f_2(x,y,z)\cos\beta + f_3(x,y,z)\cos\gamma)\ \mathrm{d}S\,,$$

$$\int_P f\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_P f\ .\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\ \mathrm{d}S\,,$$

kde uvedené kosiny jsou směrové kosiny v bodech z P. Ve druhém vyjádření jde o složku f ve směru normály k ploše (spočítáno skalárním součinem f a jednotkového vektoru

$$\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\ .$$

Příklad. Vypočtěte integrál

$$I = \int_M x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je sféra o poloměru a orientovaná ve směru vnější normály.

Řešení. Substitucí převedeme integrál do sférických souřadnic. Položme tedy

$$\varphi(u,v) = a\cos u\cos v, \quad \psi(u,v) = a\sin u\cos v, \quad \tau(u,v) = a\sin v,$$

kde

$$u \in (-\pi,\pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Potom

$$\begin{aligned} I &= \int_M x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= a^3\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 u\cos^3 v + \sin^2 u\cos^3 v + \sin^2 v\cos v)\,\mathrm{d}v\Big)\,\mathrm{d}u = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos v\,\mathrm{d}v\Big)\,\mathrm{d}u = 4\pi a^3, \end{aligned}$$

což jsme měli spočítat.

GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA

Prostorová verze základní věty analýzy porovnává tok hranicí a divergenci pole uvnitř množiny:

VĚTA. Nechť G je otevřená podmnožina prostoru a P je jednoduše uzavřená orientovaná plocha ležící i s vnitřkem v G. Nechť $f = (f_1, f_2, f_3)$ je funkce $G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak platí

$$\oint_P \big(f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + f_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big) =$$

$$= \int_{\iota P}\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

STOKESOVA VĚTA

Greenovu větu lze přenést o dimenzi výše, a to na prostorovou křivku, která je hranicí nějaké plochy. Jak vektorová funkce proudí podél hranice plochy se pozná zintegrováním rotace funkce uvnitř plochy.

VĚTA. Nechť C je jednoduše uzavřená křivka v prostoru, která je krajem po částech hladké plochy ιC. Nechť C i ιC leží v otevřené množině G, na které je definována funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak platí

$$\oint_C (f_1(x,y,z)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y,z)\,\mathrm{dy} + f_3(x,y,z)\,\mathrm{dz}) =$$

$$\int_{\iota C} \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dz} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \right).$$

POUŽITÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ

DEFINICE.

1. Míra po částech hladké plochy P je rovna $\int_P \,\mathrm{d}S$.
2. Hmotnost zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P je rovna $\int_P h \,\mathrm{d}S$, kde h je funkce na P udávající hustotu.
3. Těžiště zakřivené desky ve tvaru po částech hladké plochy P mající hustotu h má souřadnice

$$T_x = \frac{\int_P xh \,\mathrm{d}S}{m}, T_y = \frac{\int_P yh \,\mathrm{d}S}{m}, T_z = \frac{\int_P zh \,\mathrm{d}S}{m},$$

kde m je hmotnost desky.

V integrálech se musí za $x, y, z,\ \mathrm{d}S$ dosadit příslušné výrazy podle toho, jak je plocha P popsána.

Čitatelé ve vzorcích pro těžiště jsou momenty (statické) plochy vzhledem k rovinám yz nebo xz nebo xy resp.

Opět stejně jako u použití Greenovy věty pro míry rovinných obrazců, lze použít Gaussovu–Ostrogradského větu pro výpočet objemu tělesa. Postup je zcela stejný.

Je-li G otevřená podmnožina prostoru mající za hranici uzavřenou po částech hladkou plochu ∂G, pak objem $V(G)$ tělesa G (nebo jeho uzávěru $\overline{G}$) je roven

$$V(G) = \int_{\partial G} x\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_{\partial G} y\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dz} = \int_{\partial G} z\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \frac{1}{3}\int_{\partial G} (x\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + y\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dz} + x\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}).$$

Příklad. Najděte těžiště horní polosféry.