VEKTOROVÁ POLE

Podíváme se podrobněji na vektorové funkce.

Jde často o zkoumání fyzikálních veličin jako tlak vzduchu, proudění tekutin a podobně.

VEKTOROVÁ POLE

Na zobrazení z roviny do roviny nebo z prostoru do prostoru lze pohlížet jako na zobrazení, které přiřazuje danému bodu vektor.

Je-li A podmnožina roviny a f je zobrazení A do $\mathbb{R}^2$, které je dáno souřadnicemi f_1, f_2, tj., $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ pro $(x,y) \in A$, lze chápat dvojici $(f_1(x,y), f_2(x,y))$ jako vektor s počátečním bodem (x,y). Tím určuje zobrazení f tzv. vektorové pole na množině A.

Vektorovému poli lze dát přirozené interpretace. Např. si lze představit, že vektor udává směr a rychlost proudění kapaliny v daném bodě. Stejnou představu lze mít i v prostoru.

V dalším textu se bude často používat tato interpretace pro vysvětlení různých situací.

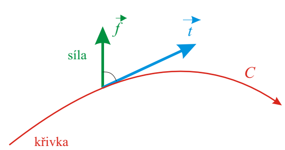
Použitím vektorů se dají zkrátit a lépe nahlížet různé vzorce. Místo neustálého rozepisování f_1, f_2, f_3 napíšete jedno písmenko $\mathbf{f}$. Není to pohodlíčko?

Zatím jsme se tomu zpravidla úspěšně vyhýbali.

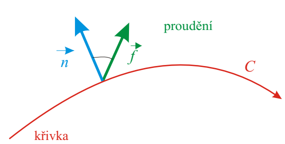
Greenova věta

V Greenově větě se první integrál v první verzi, tj. $\oint_C \mathbf{f}(z) . \mathrm{d}\boldsymbol{t}$, často nazývá cirkulace vektorového pole f po křivce C a znamená též práci vykonanou daným vektorovým polem po dané křivce.

Je to integrál ze skalárního součinu vektorového pole s tečným polem křivky.



Ve druhé verzi Greenova vzorce se integrál na levé straně, tj. $\oint_C (f_1(x,y)\,\mathrm{dy} - f_2(x,y)\,\mathrm{dx})$ nazývá tok vektorového pole f křivkou C. Je to integrál ze skalárního součinu vektorového pole a normálového pole křivky.

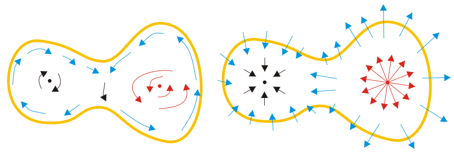


Funkce $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ z integrálu na pravé straně v první verzi se značí $\mathrm{rot} f$ (čte se *rotace* f). Fyzikálně znamená směr a rychlost otáčení víru okolo daného bodu.

Funkce $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ z integrálu na pravé straně ve druhé verzi se značí $\mathrm{div} f$ (čte se *divergence* f). Fyzikálně si lze představit divergenci v daném bodě plochy jako zřídlo (je-li divergence kladná) a odtok (je-li divergence záporná).

Greenovy vzorce lze pak psát ve tvaru

$$\oint_C \mathbf{f} . \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{\iota C} \mathrm{rot}\ f \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,, \quad \oint_C \mathbf{f} . \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\iota C} \mathrm{div}\ f \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$$



Fyzikálně oba vzorce znamenají, že *cirkulace proudění kapaliny uzavřenou křivkou je součtem otáčení všech vírů uvnitř křivky*, nebo resp. *tok křivkou se získá sečtením přitékající kapaliny ve zřídlech a odečtením unikající kapaliny v odtocích.*

Gaussova–Ostrogradského věta

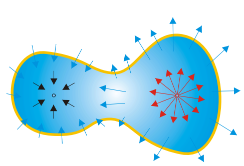
Na levé straně je integrál ze skalárního součinu vektorového pole f a normálového pole plochy P a tedy opět znamená tok pole f plochou P.

Na pravé straně se funkce $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ v souladu s polem v rovině značí $\mathrm{div} f$ a čte se divergence funkce f. V daném bodě opět vyjadřuje zřídlo nebo odtok a množství přitékající nebo odtékající kapaliny.

Gaussův–Ostrogradského vzorec má pak tvar

$$\oint_P \mathbf{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\iota P} \mathrm{div}\mathbf{f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Tento vzorec tedy říká, že množství kapaliny, které proteče uzavřenou plochou P se rovná množství kapaliny vzniklé ve zřídlech uvnitř P po odečtení množství kapaliny, která odteče odtoky uvnitř P. Je-li $\mathrm{div} f = 0$ uvnitř P, je množství kapaliny, které do vnitřku P vteče, stejné jako to, které vyteče.



Stokesova věta

Na levé straně je integrál ze skalárního součinu vektorového pole f a tečného pole křivky C a znamená opět cirkulaci pole f podél křivky C.

Vektorové pole v integrálu na pravé straně Stokesova vzorce

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

se značí $\mathrm{rot} f$ a čte se rotace pole f. Podobně jako v rovině znamená rychlost a otáčení víru v daném bodě.

Stokesův vzorec má pak tvar

$$\oint_{\partial P} \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_P \mathrm{rot} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S},.$$

Fyzikální význam je opět stejný: cirkulace proudění kapaliny uzavřenou křivkou je součtem směrů a rychlostí všech vírů uvnitř křivky.

Fyzikální význam je opět stejný: cirkulace proudění kapaliny uzavřenou křivkou je součtem směrů a rychlostí všech vírů uvnitř křivky.

Otázky 1:

Ukažte, že složky rotace vektorového pole (f_1, f_2, f_3) jsou subdeterminanty příslušnými k i, j, k v následujícím determinantu:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Takhle si to jde zapamatovat.

Konec otázek 1.

POTENCIÁLNÍ POLE V ROVINĚ

Jestliže jsou dány dvě křivky v rovině mající společný počátek i společný konec, mohou být integrály dané funkce přes tyto dvě křivky různé.

Této situaci se říká, že integrál z dané funkce závisí na cestě.

Důležité případy nastávají, když integrace na cestě nezávisí.

Zopakujeme, že jednoduchá otevřená množina G je souvislá otevřená množina, která nemá díry, tj., je-li C jednoduše uzavřená křivka ležící v G, pak i její vnitřek leží v G.

Pro jednoduché otevřené množiny v prostoru se místo křivek použijí plochy.

DEFINICE. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina A a funkce $f = (f_1, f_2) : A \to \mathbb{R}^2$. Vektorové pole dané funkcí f se nazývá potenciální na A, jestliže integrace f podle hladkých křivek ležících v A nezávisí na cestě.

Pomocí Greenovy věty a dalších úvah lze potenciální pole různě charakterizovat:

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G a funkce $f = (f_1, f_2) : G \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace na G. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

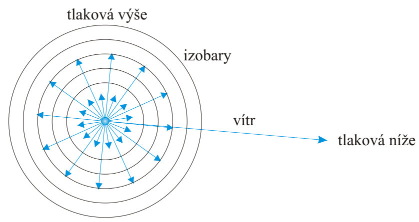
1. Vektorové pole dané funkcí f je na G potenciální.
2. $\oint_C \mathbf{f} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = 0$ pro každou jednoduše uzavřenou křivku C ležící v G.
3. Rotace f v G se rovná 0.
4. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{R}$ tak, že $\mathrm{grad} F = f$ na G.

Důkaz. Zřejmě platí $1 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftarrow 4$.
To, že $2 \Rightarrow 1$ není zcela jednoduché, protože dvě hladké křivky C_1, C_2 se stejnými počátky a konci sice tvoří uzavřenou křivku $C_1 + (-C_2)$, ale ta nemusí být jednoduše uzavřená.
Dá se však aproximovat konečnými spojeními jednoduše uzavřených křivek a to se zde nebude dokazovat.
Pokud je $C_1 + (-C_2)$ jednoduše uzavřená, je podle 2 $\oint_{C_1+(-C_2)} f = 0$, což znamená $\oint_{C_1} f - \oint_{C_2} f = 0$ a tedy platnost 1. Zbývá ověřit $1 \Rightarrow 4$. Protože $\int_C \mathbf{f} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ závisí jen na počátečním a koncovém bodě křivky C, lze definovat $F(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{f} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$, kde (a, b) je pevně zvolený bod z G. Snadno se ukáže, že $\mathrm{grad} F = f$ (viz *Otázky*). $\diamond$

Funkce F z předchozí věty se nazývá potenciál vektorového pole f.

Hlásím, že jsem si toho F fšiml.

Například pro "větrné"vektorové pole f existuje "tlaková"potenciální funkce F a naopak. Vítr fouká proti směru gradientu tlaku.



A podobně se hledají kamna.

A co nadmořská výška a síla, co vás tlači ze svahu: co je potenciál a co potenciální pole?

Pro potenciální pole na G lze pak křivkový integrál 2.druhu $\int_C f \, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ psát jako $\int_P^Q f \, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$, kde P, Q jsou krajní body křivky C.

Je-li znám potenciál F pole f, pak $\int_P^Q f \, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = F(Q) - F(P)$.

Je to tedy podobná situace, jako při počítání Newtonova integrálu. Roli primitivní funkce tu hraje potenciál.

Všiml jsem si, že se oba konce intervalu $[0,1]$ na sebe nekoukají. To je teď jasnější nad slunce.

Příklady 2:

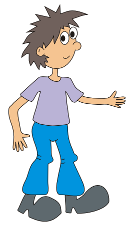
1. Ukažte, že vektorové pole $f = (x^2 - y^2, 5 - 2xy)$ je potenciální a najděte jeho potenciál.

Pro nalezení potenciálu hledejte přímo F tak, že $\mathrm{grad} F = f$ postupnou integrací a ověřte výsledek nalezením potenciálu postupem uvedeným v důkazu věty.

Zvlášť vypečené jsou ovšem příklady, které nejsou potenciální. Hmmm.

2. Spočtěte $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} (x^2 - y^2)\,\mathrm{dx} + (5 - 2xy)\,\mathrm{dy}$ pomocí vypočteného potenciálu.

Věty tu jsou a byly pro lidi.



Doufám, že i příklady.

3. Vektorové pole $f = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ je definováno všude kromě bodu $(0,0)$.
Ukažte, že pokud jednoduše uzavřená křivka obsahuje uvnitř počátek, není integrál z f přes tuto křivku roven 0.
Pokud je počátek vně jednoduše uzavřené křivky, je integrál roven 0.
Najděte potenciál tohoto vektorového pole v otevřených polorovinách $x > 0$, $x < 0$,$y > 0$ a $y < 0$.

Existuje potenciál tohoto pole na sjednocení těchto polorovin?

Konec příkladů 2.

Otázky 2:

1. Rozmyslete si, proč nemá smysl mluvit o nezávislosti na cestě křivkových integrálů 1.druhu.

2. Má-li funkce $F : G \to \mathbb{R}$ spojité parciální derivace na otevřené podmnožině G roviny, platí $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} F) = 0$.

3. Dokažte, že funkce F definovaná v důkazu věty, má za gradient funkci f.
Pro důkaz $F_x = f_1$ je nejlépe postupovat podle definice derivace limitou

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \,;$$

h lze volit tak malé, že úsečka z x do $x+h$ leží v G.

4. Ukažte, že má-li vektorové pole f potenciál F, je $\int_P^Q f \, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = F(Q) - F(P)$.

Ne. Nešálí mne zrak. Je to opět čistá pravda.

Konec otázek 2.

Cvičení 2: Příklad. Dokažte, že pole

$$f(x, y) = (-5\cos y, 5x\sin y)$$

je potenciální v $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Podle věty máme ověřit podmínku

$$\operatorname{rot} f = 0.$$

Spočteme tedy

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Získáme

$$\operatorname{rot} f = 5\sin x - 5\sin x = 0.$$

Dokázali byste najít potenciál tohoto pole?

Konec cvičení 2.

Učení 2:

Našel jsem oba potenciály.

Oba až na konstantu ;-)

Konec učení 2.

POTENCIÁLNÍ POLE V PROSTORU

Podobné úvahy jako v rovině o nezávislosti integrování na cestě vedou k následující definici a charakterizacím, se stejnými poznámkami jako v rovinném případě.

Teď se to asi rychleji čte než říká.

Čtěte co nejrychleji.

DEFINICE. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$. Vektorové pole dané funkcí f se nazývá potenciální na G, jestliže integrace f podle křivek ležících v G nezávisí na cestě, tj. $\int_{C_1} f = \int_{C_2} f$ jakmile křivky C_1, C_2 leží v G a mají stejný počáteční a stejný koncový bod.

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

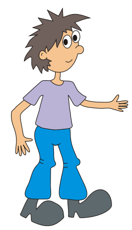
1. Vektorové pole dané funkcí f je na G potenciální.
2. $\oint_C \mathbf{f}(z).\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = 0$ pro každou jednoduše uzavřenou hladkou křivku ležící v G.
3. Rotace f v G se rovná 0.
4. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{R}$ tak, že $\mathrm{grad} F = f$ na G.

Důkaz je obdobný jako důkaz charakterizace potenciálního pole v rovině.

Potenciálnímu poli se také někdy říká nevírové pole, ze zřejmých důvodů.

Ráda bych poznamenala . . .

…jak bylo již poznamenáno u potenciálního pole v rovině



A příklad ze světa? Gravitační pole je zaplevelené.

Příklady 3:

1. Ukažte, že vektorové pole $f = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy + z)$ je potenciální a najděte jeho potenciál.

Pro nalezení potenciálu hledejte přímo F tak, že $\mathrm{grad} F = f$ postupnou integrací.

Pomocí potenciálu pak spočtěte $\int\limits_{(0,0,0)}^{(\pi/2,\pi,2)} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$. $[e^x \cos y + xyz + z^2/2]$

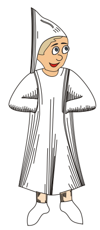
Usmívám se a nevím sám čemu.

To nebude trvat dlouho …

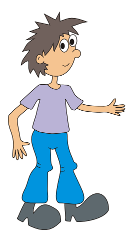
2. Ukažte, že vektorové pole $f = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$ je potenciální a najděte jeho potenciál.

To bude trvat dlouho …

3. Ukažte, že vektorové pole $f = (yz(2z+y+z), xz(x+2y+z), xy(x+y+2z))$ je potenciální a najděte jeho potenciál.



Mám chuť to trochu pokazit. Pomůže mi někdo najít příklad, který nepůjde spočítat?



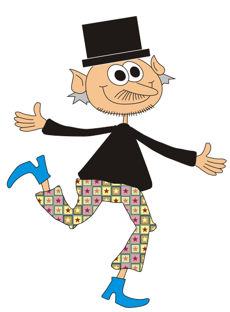
Myslím, že to svedu.

Konec příkladů 3.

Otázky 3:

Řešte všechny problémy v předchozích *Otázkách* formulovaných pro prostor místo pro rovinu.

Navíc zopakujte důkaz věty pro prostor.



Zamlada, to se to hřesilo …

Zamlada, byl opravdu šikovný a rád to zopakoval ...

Konec otázek 3.

Cvičení 3: Příklad. Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_L (x^2 - yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka $L = (\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi})$ je dána parametricky s parametrem $t \in (-\pi, \pi)$.

Řešení.

Nejprve si nakreslíme, jak vlastně křivka L vypadá. Je to jeden závit šroubovice.

Při výpočtu bychom rádi využili předchozích vět, proto doplníme křivku L křivkou M tak, aby křivka $L - M$ byla hranicí plochy S.

Podle Stokesovy věty je

$$\int_{\partial S} F \cdot\,\mathbf{dt} = \int_S \operatorname{rot} F \cdot\,\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Spočítáme tedy rotaci funkce $F(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$.

Přímým výpočtem zjistíme, že

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = (0,0,0).$$

Odtud dostáváme

$$\int_{L-M} F \cdot\,\mathbf{dt} = 0,$$

neboli

$$\int_L F \cdot\,\mathbf{dt} = \int_M F \cdot\,\mathbf{dt}\,.$$

Stačí tedy spočítat integrál na pravé straně.

Křivka M má parametrizaci

$$M(t) = (-1, 0, t), \quad t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Proto její derivace bude

$$\dot{M}(t) = (0,0,1), \quad t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Potom

$$\int_M F \cdot \mathrm{d}\mathbf{t} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1, t/(2\pi), t^2/(4\pi^2)) \cdot (0,0,1)\, \mathrm{d}t = \cdots$$

Konec cvičení 3.

SOLENOIDÁLNÍ POLE V PROSTORU

V předchozích dvou částech byla zkoumána nezávislost křivkových integrálů 2.druhu na cestě.

Lze podobně zkoumat nezávislost plošných integrálů 2.druhu?

Nezávislost křivkových integrálů na cestě znamená závislost jen na kraji křivek (v pořadí daném orientací). Přirozená obdoba této situace pro plošné integrály znamená jejich závislost jen na kraji ploch, orientovaných souhlasně s orientací ploch.

DEFINICE. Vektorové pole $\mathbf{f}$ na otevřené podmnožině prostoru se nazývá solenoidální, jestliže plošný integrál 2.druhu z f v A závisí jen na kraji, tj.,

$$\int_{P_1} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{P_2} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{n}$$

pro libovolné dvě hladké plochy P_1, P_2, které leží v A, mají stejný kraj a jsou souhlasně orientovány vzhledem k tomuto kraji.

Gaussův–Ostrogradského vzorec umožňuje nalézt další charakterizaci solenoidálního pole:

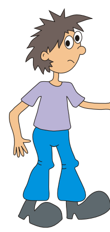
VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. Vektorové pole dané funkcí f je na G solenoidální.
2. $\int_P \mathbf{f}(z).\, \mathrm{d}\boldsymbol{n} = 0$ pro každou jednoduše uzavřenou plochu P ležící v G.
3. $\mathrm{div} f$ v G se rovná 0.
4. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{R}^3$ tak, že $\mathrm{rot} F = f$ na G.

Důkaz. Důkaz $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$ kopíruje důkaz pro potenciální pole s příslušnými změnami křivek na plochy (i s problémem pro $2 \Rightarrow 1$).

Důkaz $4 \Rightarrow 3$ se ověří spočítáním.

Máte doma solenoid?



Nemám. A ani nevím, co to je.

V tom je však "drobný logický spor", jak jednou poznamenal pan děkan MFF UK.

Nalezení $F = (F_1, F_2, F_3)$ pro solenoidální pole je těžší.

Situace se ulehčí, jestliže se zkusí předpokládat $F_3 = 0$. Hledají se tedy funkce F_1, F_2 tak, aby

$$f_1 = -F_{2z}\,, \quad f_2 = F_{1z}\,, \quad f_3 = F_{2x} - F_{1y}\,.$$

Integrací prvních dvou rovností se dostane $F_1(x,y,z) = \int f_2\,\mathrm{d}z + c_1(x,y)$, $F_2(x,y,z) = -\int f_1\,\mathrm{d}z + c_2(x,y)$.

Zbývá jediná podmínka a tedy lze zvolit např. $c_2 = 0$.
Třetí rovnost dá $f_3 = -\int F_{1x}\,\mathrm{d}z - \int F_{2y}\,\mathrm{d}z - c_{1x}$.
Protože $\mathrm{div} f = 0$, je $-\int F_{1x}\,\mathrm{d}z - \int F_{2y}\,\mathrm{d}z = \int F_{3z}\,\mathrm{d}z = f_3 + c_3(x, y)$. Stačí nyní položit $-c_1 = c_3$. $\diamond$

Funkce F se někdy nazývá potenciálním vektorem pole f a solenoidální pole se občas nazývá nezřídlové pole.

Všimněte si kdo je vektorem a kdo je "bez šipky".

Na závěr jedno zajímavé tvrzení:

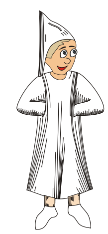
VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak existuje potenciální pole g a solenoidální pole h na G tak, že $f = g + h$.

Každé „hladké" vektorové pole f se tedy dá rozložit na funkci g s $\mathrm{rot} g = 0$ a funkci h s $\mathrm{div} h = 0$.

Jako na plese. Chvíli se člověk točí a pak se jde napít.

BTW, není to vždy samozřejmost.

Ta věta mi dělá velikou radost. Mám už ve sbírce hodně rozložených funkcí.



A já mu je potajmu skládám . . .

Poznámky 4:

Důkaz posledního tvrzení je založen na znalosti existence řešení rovnice

$$g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = G\,, \quad \text{tj. } \Delta g = G\,,$$

kde G je daná funkce 3 proměnných a g je hledaná funkce 3 proměnných.

Hledá se totiž funkce $\widetilde{g}(x, y, z) : G \to \mathbb{R}$ taková, že $f - \operatorname{grad}\widetilde{g}$ je solenoidální pole, tj. $\operatorname{div} f = \operatorname{div} \operatorname{grad} \widetilde{g}$. Poslední rovnost ale znamená $\Delta g = \div\, f$ a takové g existuje. Pak stačí položit $h = f - \operatorname{grad} \widetilde{g}$ a grad g a h jsou hledaná pole.

Hledat pole jahod je s dobrým zrakem snadné.

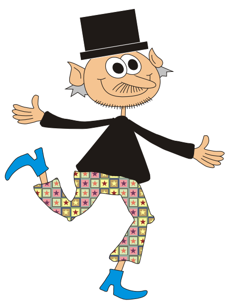
Konec poznámek 4.

Příklady 4:

1. Rozložte vektorové pole $f = (x + y, y + z, x + z)$ na potenciální a solenoidální pole.

Postupujte podle důkazu uvedeného v *Poznámkách*.

Jedno řešení rovnice $\Delta g = 3$ se dá snadno uhádnout.



Zásoba mých tajných kouzel se tenčí ...

2. Ukažte, že pole $(y^2 + 2z - x^3, 2yz, 3x^2 z - z^3)$ je solenoidální najděte jeho potenciální vektor.

Konec příkladů 4.

Otázky 4:

1. Rozmyslete si, proč nemá smysl mluvit o závislosti jen na kraji plošných integrálů 1.druhu.

2. Má-li funkce $F : G \to \mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace na otevřené podmnožině G prostoru, platí $\mathrm{div}(\mathrm{rot} F) = 0$.

Když s chlapem pořádně zatočíte, nemá příležitost pít.

Konec otázek 4.

Cvičení 4: Příklad. Dokažte, že pole

$$f(x, y, z) = (3x^2 + x \sin(y + z), x + y + z + \cos(x + z), 6x - 3z^2)$$

je solenoidální na $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Máme ověřit podmínku

$$\mathrm{div} f = 0.$$

Spočteme tedy

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Dostaneme

$$\mathrm{div} f = 6 - 6 = 0.$$

Pole je tedy skutečně solenoidální.

Konec cvičení 4.

STANDARDY z kapitoly

VEKTOROVÁ POLE

Jde často o zkoumání fyzikálních veličin jako tlak vzduchu, proudění tekutin a podobně.

VEKTOROVÁ POLE

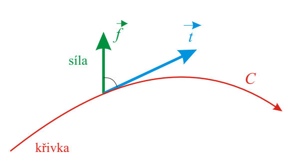
Na zobrazení z roviny do roviny nebo z prostoru do prostoru lze pohlížet jako na zobrazení, které přiřazuje danému bodu vektor.

Je-li A podmnožina roviny a f je zobrazení A do $\mathbb{R}^2$, které je dáno souřadnicemi f_1, f_2, tj., $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ pro $(x, y) \in A$, lze chápat dvojici $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ jako vektor s počátečním bodem (x, y). Tím určuje zobrazení f tzv. vektorové pole na množině A.

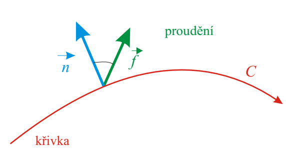
Greenova věta

V Greenově větě se první integrál v první verzi, tj. $\oint_C \mathbf{f}(z).\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$, často nazývá cirkulace vektorového pole f po křivce C a znamená též práci vykonanou daným vektorovým polem po dané křivce.

Je to integrál ze skalárního součinu vektorového pole s tečným polem křivky.



Ve druhé verzi Greenova vzorce se integrál na levé straně, tj. $\oint_C (f_1(x, y)\,\mathrm{d}y - f_2(x, y)\,\mathrm{d}x)$ nazývá tok vektorového pole f křivkou C. Je to integrál ze skalárního součinu vektorového pole a normálového pole křivky.

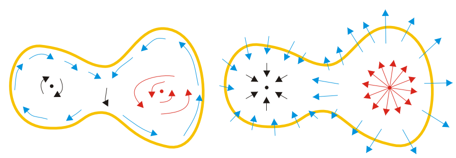


Funkce $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ z integrálu na pravé straně v první verzi se značí $\mathrm{rot} f$ (čte se *rotace* f). Fyzikálně znamená směr a rychlost otáčení víru okolo daného bodu.

Funkce $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ z integrálu na pravé straně ve druhé verzi se značí $\mathrm{div} f$ (čte se *divergence* f). Fyzikálně si lze představit divergenci v daném bodě plochy jako zřídlo (je-li divergence kladná) a odtok (je-li divergence záporná).

Greenovy vzorce lze pak psát ve tvaru

$$\oint_C \mathbf{f} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{\iota C} \mathrm{rot}\ f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \quad \oint_C \mathbf{f} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\iota C} \mathrm{div}\ f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



Fyzikálně oba vzorce znamenají, že *cirkulace proudění kapaliny uzavřenou křivkou je součtem otáčení všech vírů uvnitř křivky*, nebo resp. *tok křivkou se získá sečtením přitékající kapaliny ve zřídlech a odečtením unikající kapaliny v odtocích.*

Gaussova–Ostrogradského věta

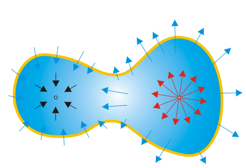
Na levé straně je integrál ze skalárního součinu vektorového pole f a normálového pole plochy P a tedy opět znamená tok pole f plochou P.

Na pravé straně se funkce $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ v souladu s polem v rovině značí $\mathrm{div} f$ a čte se divergence funkce f. V daném bodě opět vyjadřuje zřídlo nebo odtok a množství přitékající nebo odtékající kapaliny.

Gaussův–Ostrogradského vzorec má pak tvar

$$\oint_P \mathbf{f} \,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\iota P} \mathrm{div}\ \mathbf{f} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Tento vzorec tedy říká, že množství kapaliny, které proteče uzavřenou plochou P se rovná množství kapaliny vzniklé ve zřídlech uvnitř P po odečtení množství kapaliny, která odteče odtoky uvnitř P. Je-li $\mathrm{div} f = 0$ uvnitř P, je množství kapaliny, které do vnitřku P vteče, stejné jako to, které vyteče.



Stokesova věta

Na levé straně je integrál ze skalárního součinu vektorového pole f a tečného pole křivky C a znamená opět cirkulaci pole f podél křivky C.

Vektorové pole v integrálu na pravé straně Stokesova vzorce

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

se značí $\mathrm{rot} f$ a čte se rotace pole f. Podobně jako v rovině znamená rychlost a otáčení víru v daném bodě.

Stokesův vzorec má pak tvar

$$\oint_{\partial P} \mathbf{f} . \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_P \mathrm{rot} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{S}, .$$

Fyzikální význam je opět stejný: cirkulace proudění kapaliny uzavřenou křivkou je součtem směrů a rychlostí všech vírů uvnitř křivky.

Fyzikální význam je opět stejný: cirkulace proudění kapaliny uzavřenou křivkou je součtem směrů a rychlostí všech vírů uvnitř křivky.

Označne $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ formální diferenciální operátor.

Pak

$$\mathrm{grad}\ f = \nabla f$$

$$\mathrm{div}\ f = \nabla . f$$

$$\mathrm{rot}\ f = \nabla \times f$$

kde jde postupně o jednoduchý, skalární a vektorový součin.

Složky rotace vektorového pole (f_1, f_2, f_3) jsou vskutku subdeterminanty příslušnými k i, j, k v následujícím determinantu:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

POTENCIÁLNÍ POLE V ROVINĚ

Jestliže jsou dány dvě křivky v rovině mající společný počátek i společný konec, mohou být integrály dané funkce přes tyto dvě křivky různé. Této situaci se říká, že integrál z dané funkce závisí na cestě.

Zopakujeme, že jednoduchá otevřená množina G je souvislá otevřená množina, která nemá díry, tj., je-li C jednoduše uzavřená křivka ležící v G, pak i její vnitřek leží v G.

DEFINICE. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina A a funkce $f = (f_1, f_2) : A \to \mathbb{R}^2$. Vektorové pole dané funkcí f se nazývá potenciální na A, jestliže integrace f podle hladkých křivek ležících v A nezávisí na cestě.

Pomocí Greenovy věty a dalších úvah lze potenciální pole různě charakterizovat:

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G a funkce $f = (f_1, f_2) : G \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace na G. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. Vektorové pole dané funkcí f je na G potenciální.
2. $\oint_C \mathbf{f} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = 0$ pro každou jednoduše uzavřenou křivku C ležící v G.
3. Rotace f v G se rovná 0.
4. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{R}$ tak, že $\operatorname{grad} F = f$ na G.

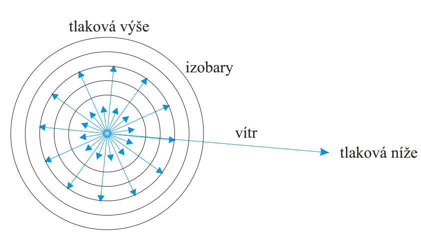
Když $\int_C \mathbf{f} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ závisí jen na počátečním a koncovém bodě křivky C, lze (jednoznačně) definovat

$$F(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{f} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{t} \;,$$

kde (a, b) je pevně zvolený bod z G. Snadno se ukáže, že $\operatorname{grad} F = f$.

Funkce F z předchozí věty se nazývá potenciál vektorového pole f.

Například pro "větrné"vektorové pole f existuje "tlaková"potenciální funkce F a naopak. Vítr fouká proti směru gradientu tlaku.



Pro potenciální pole na G lze pak křivkový integrál 2.druhu $\int_C f \,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$ psát jako $\int_P^Q f \,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$, kde P, Q jsou krajní body křivky C.

Je-li znám potenciál F pole f, pak $\int_P^Q f \,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = F(Q) - F(P)$.

Je to tedy podobná situace, jako při počítání Newtonova integrálu. Roli primitivní funkce tu hraje potenciál.

Příklad. Ukažte, že vektorové pole $f = (x^2 - y^2, 5 - 2xy)$ je potenciální a najděte jeho potenciál. Poté spočtěte $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + (5 - 2xy)\,\mathrm{d}y$.

Řešení. Zkontrolujeme divergenci.

Pro nalezení potenciálu hledáme přímo F tak, že $\operatorname{grad} F = f$ postupnou integrací a ověříme výsledek nalezením potenciálu přímo výše uvedeným postupem.

Příklad. Vektorové pole $f = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ je definováno všude kromě bodu $(0,0)$.

Ukažte, že pokud jednoduše uzavřená křivka obsahuje uvnitř počátek, není integrál z f přes tuto křivku roven 0.

Pokud je počátek vně jednoduše uzavřené křivky, je integrál roven 0.

Existuje jeho potenciál?

Má-li funkce $F : G \to \mathbb{R}$ spojité parciální derivace na otevřené podmnožině G roviny, platí $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} F) = 0$.

Příklad. Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_L (x^2 - yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka $L = (\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi})$ je dána parametricky s parametrem $t \in (-\pi, \pi)$.

Řešení.

Nejprve si nakreslíme, jak vlastně křivka L vypadá. Je to jeden závit šroubovice.

Při výpočtu bychom rádi využili předchozích vět, proto doplníme křivku L křivkou M tak, aby křivka $L - M$ byla hranicí plochy S.

Podle Stokesovy věty je

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathbf{dt} = \int_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{dS}.$$

Spočítáme tedy rotaci funkce $F(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$.

Přímým výpočtem zjistíme, že

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = (0,0,0).$$

Odtud dostáváme
$$\int_{L-M} F \cdot \, \mathbf{dt} = 0,$$
neboli
$$\int_L F \cdot \, \mathbf{dt} = \int_M F \cdot \, \mathbf{dt}\,.$$
Stačí tedy spočítat integrál na pravé straně.
Křivka M má parametrizaci
$$M(t) = (-1, 0, t), \quad t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$
Proto její derivace bude
$$\dot{M}(t) = (0, 0, 1), \quad t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$
Potom
$$\int_M F \cdot \, \mathbf{dt} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1, t/(2\pi), t^2/(4\pi^2)) \cdot (0, 0, 1)\, \mathrm{d}t = \cdots$$

SOLENOIDÁLNÍ POLE V PROSTORU

DEFINICE. Vektorové pole $\mathbf{f}$ na otevřené podmnožině prostoru se nazývá solenoidální, jestliže plošný integrál 2.druhu z f v A závisí jen na kraji, tj.,
$$\int_{P_1} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{P_2} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{n}$$
pro libovolné dvě hladké plochy P_1, P_2, které leží v A, mají stejný kraj a jsou souhlasně orientovány vzhledem k tomuto kraji.

Gaussův–Ostrogradského vzorec umožňuje nalézt charakterizaci solenoidálního pole:

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. Vektorové pole dané funkcí f je na G solenoidální.
2. $\int_P \mathbf{f}(z).\, \mathrm{d}\boldsymbol{n} = 0$ pro každou jednoduše uzavřenou plochu P ležící v G.
3. $\mathrm{div} f$ v G se rovná 0.
4. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{R}^3$ tak, že $\mathrm{rot} F = f$ na G.

Funkce F se někdy nazývá potenciálním vektorem pole f a solenoidální pole se občas nazývá nezřídlové pole.

Na závěr jedno zajímavé tvrzení:

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak existuje potenciální pole g a solenoidální pole h na G tak, že $f = g + h$.

Každé „hladké" vektorové pole f se tedy dá rozložit na funkci g s $\operatorname{rot} g = 0$ a funkci h s $\operatorname{div} h = 0$.