VEKTOROVÁ POLE

VEKTOROVÁ POLE

Je-li A podmnožina roviny a f je zobrazení A do $\mathbb{R}^2$, které je dáno souřadnicemi f_1, f_2, tj., $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ pro $(x,y) \in A$, lze chápat dvojici $(f_1(x,y), f_2(x,y))$ jako vektor s počátečním bodem (x,y). Tím určuje zobrazení f tzv. vektorové pole na množině A.

Vektorovému poli lze dát přirozené interpretace. Např. si lze představit, že vektor udává směr a rychlost proudění kapaliny v daném bodě. Stejnou představu lze mít i v prostoru.

Greenova věta

V Greenově větě se první integrál v první verzi, tj. $\oint_C \mathbf{f}(z).\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$, často nazývá cirkulace vektorového pole f po křivce C a znamená též práci vykonanou daným vektorovým polem po dané křivce.

Je to integrál ze skalárního součinu vektorového pole s tečným polem křivky.

Ve druhé verzi Greenova vzorce se integrál na levé straně, tj. $\oint_C (f_1(x,y)\,\mathrm{d}y - f_2(x,y)\,\mathrm{d}x)$ nazývá tok vektorového pole f křivkou C. Je to integrál ze skalárního součinu vektorového pole a normálového pole křivky.

Funkce $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ z integrálu na pravé straně v první verzi se značí $\mathrm{rot} f$ (čte se *rotace* f). Fyzikálně znamená směr a rychlost otáčení víru okolo daného bodu.

Funkce $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ z integrálu na pravé straně ve druhé verzi se značí $\mathrm{div} f$ (čte se *divergence* f). Fyzikálně si lze představit divergenci v daném bodě plochy jako zřídlo (je-li divergence kladná) a odtok (je-li divergence záporná).

Greenovy vzorce lze pak psát ve tvaru

$$\oint_C \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{\iota C} \mathrm{rot}\, f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \quad \oint_C \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\iota C} \mathrm{div}\, f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Gaussova–Ostrogradského věta

Na levé straně je integrál ze skalárního součinu vektorového pole f a normálového pole plochy P a tedy opět znamená tok pole f plochou P.

Na pravé straně se funkce $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ v souladu s polem v rovině značí $\mathrm{div} f$ a čte se divergence funkce f. V daném bodě opět vyjadřuje zřídlo nebo odtok a množství přitékající nebo odtékající kapaliny.

Gaussův–Ostrogradského vzorec má pak tvar

$$\oint_P \mathbf{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\iota P} \mathrm{div}\mathbf{f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Tento vzorec tedy říká, že množství kapaliny, které proteče uzavřenou plochou P se rovná množství kapaliny vzniklé ve zřídlech uvnitř P po odečtení množství kapaliny, která odteče odtoky uvnitř P. Je-li $\mathrm{div} f = 0$ uvnitř P, je množství kapaliny, které do vnitřku P vteče, stejné jako to, které vyteče.

Stokesova věta

Na levé straně je integrál ze skalárního součinu vektorového pole f a tečného pole křivky C a znamená opět cirkulaci pole f podél křivky C.

Vektorové pole v integrálu na pravé straně Stokesova vzorce

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

se značí $\mathrm{rot} f$ a čte se rotace pole f. Podobně jako v rovině znamená rychlost a otáčení víru v daném bodě.

Stokesův vzorec má pak tvar

$$\oint_{\partial P} \mathbf{f} . \,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_P \mathrm{rot} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{S}, .$$

Fyzikální význam je opět stejný: cirkulace proudění kapaliny uzavřenou křivkou je součtem směrů a rychlostí všech vírů uvnitř křivky.

Otázky 1

POTENCIÁLNÍ POLE V ROVINĚ

Jestliže jsou dány dvě křivky v rovině mající společný počátek i společný konec, mohou být integrály dané funkce přes tyto dvě křivky různé.

Této situaci se říká, že integrál z dané funkce závisí na cestě.

Zopakujeme, že jednoduchá otevřená množina G je souvislá otevřená množina, která nemá díry, tj., je-li C jednoduše uzavřená křivka ležící v G, pak i její vnitřek leží v G.

DEFINICE. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina A a funkce $f = (f_1, f_2) : A \to \mathbb{R}^2$. Vektorové pole dané funkcí f se nazývá potenciální na A, jestliže integrace f podle hladkých křivek ležících v A nezávisí na cestě.

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G a funkce $f = (f_1, f_2) : G \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace na G. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. Vektorové pole dané funkcí f je na G potenciální.
2. $\oint_C \mathbf{f} . \,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = 0$ pro každou jednoduše uzavřenou křivku C ležící v G.
3. Rotace f v G se rovná 0.
4. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{R}$ tak, že $\mathrm{grad} F = f$ na G.

Funkce F z předchozí věty se nazývá potenciál vektorového pole f.

Pro potenciální pole na G lze pak křivkový integrál 2.druhu $\int_C f \,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$ psát jako $\int_P^Q f \,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$, kde P, Q jsou krajní body křivky C.

Je-li znám potenciál F pole f, pak $\int_P^Q f \,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = F(Q) - F(P)$.

Příklady 2 Otázky 2

Cvičení 2

Učení 2

POTENCIÁLNÍ POLE V PROSTORU

Podobné úvahy jako v rovině o nezávislosti integrování na cestě vedou k následující definici a charakterizacím, se stejnými poznámkami jako v rovinném případě.

DEFINICE. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$. Vektorové pole dané funkcí f se nazývá potenciální na G, jestliže integrace f podle křivek ležících v G nezávisí na cestě, tj. $\int_{C_1} f = \int_{C_2} f$ jakmile křivky C_1, C_2 leží v G a mají stejný počáteční a stejný koncový bod.

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. Vektorové pole dané funkcí f je na G potenciální.
2. $\oint_C \mathbf{f}(z).\, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = 0$ pro každou jednoduše uzavřenou hladkou křivku ležící v G.
3. Rotace f v G se rovná 0.
4. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{R}$ tak, že $\mathrm{grad} F = f$ na G.

Důkaz je obdobný jako důkaz charakterizace potenciálního pole v rovině.

Potenciálnímu poli se také někdy říká nevírové pole, ze zřejmých důvodů.

Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3

SOLENOIDÁLNÍ POLE V PROSTORU

V předchozích dvou částech byla zkoumána nezávislost křivkových integrálů 2.druhu na cestě.

Nezávislost křivkových integrálů na cestě znamená závislost jen na kraji křivek (v pořadí daném orientací).

Přirozená obdoba této situace pro plošné integrály znamená jejich závislost jen na kraji ploch, orientovaných souhlasně s orientací ploch.

DEFINICE. Vektorové pole $\mathbf{f}$ na otevřené podmnožině prostoru se nazývá solenoidální, jestliže plošný integrál 2.druhu z f v A závisí jen na kraji, tj.,

$$\int_{P_1} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{P_2} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{n}$$

pro libovolné dvě hladké plochy P_1, P_2, které leží v A, mají stejný kraj a jsou souhlasně orientovány vzhledem k tomuto kraji.

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. Vektorové pole dané funkcí f je na G solenoidální.
2. $\int_P \mathbf{f}(z).\, \mathrm{d}\boldsymbol{n} = 0$ pro každou jednoduše uzavřenou plochu P ležící v G.
3. $\mathrm{div} f$ v G se rovná 0.
4. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{R}^3$ tak, že $\mathrm{rot} F = f$ na G.

Funkce F se někdy nazývá potenciálním vektorem pole f a solenoidální pole se občas nazývá nezřídlové pole.

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak existuje potenciální pole g a solenoidální pole h na G tak, že $f = g + h$.

Každé „hladké" vektorové pole f se tedy dá rozložit na funkci g s $\mathrm{rot} g = 0$ a funkci h s $\mathrm{div} h = 0$.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Cvičení 4

STANDARDY z kapitoly

VEKTOROVÁ POLE

VEKTOROVÁ POLE

Je-li A podmnožina roviny a f je zobrazení A do $\mathbb{R}^2$, které je dáno souřadnicemi f_1, f_2, tj., $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ pro $(x,y) \in A$, lze chápat dvojici $(f_1(x,y), f_2(x,y))$ jako vektor s počátečním bodem (x,y). Tím určuje zobrazení f tzv. vektorové pole na množině A.

Greenova věta

V Greenově větě se první integrál v první verzi, tj. $\oint_C \mathbf{f}(z).\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$, často nazývá cirkulace vektorového pole f po křivce C a znamená též práci vykonanou daným vektorovým polem po dané křivce.

Je to integrál ze skalárního součinu vektorového pole s tečným polem křivky.

Ve druhé verzi Greenova vzorce se integrál na levé straně, tj. $\oint_C (f_1(x,y)\,\mathrm{d}y - f_2(x,y)\,\mathrm{d}x)$ nazývá tok vektorového pole f křivkou C. Je to integrál ze skalárního součinu vektorového pole a normálového pole křivky.

Funkce $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ z integrálu na pravé straně v první verzi se značí $\mathrm{rot} f$ (čte se *rotace* f). Fyzikálně znamená směr a rychlost otáčení víru okolo daného bodu.

Funkce $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ z integrálu na pravé straně ve druhé verzi se značí $\mathrm{div} f$ (čte se *divergence* f). Fyzikálně si lze představit divergenci v daném bodě plochy jako zřídlo (je-li divergence kladná) a odtok (je-li divergence záporná).

Greenovy vzorce lze pak psát ve tvaru

$$\oint_C \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{\iota C} \mathrm{rot}\ f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \qquad \oint_C \mathbf{f}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\iota C} \mathrm{div}\ f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Gaussova–Ostrogradského věta

Na levé straně je integrál ze skalárního součinu vektorového pole f a normálového pole plochy P a tedy opět znamená tok pole f plochou P.

Na pravé straně se funkce $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ v souladu s polem v rovině značí $\mathrm{div} f$ a čte se divergence funkce f. V daném bodě opět vyjadřuje zřídlo nebo odtok a množství přitékající nebo odtékající kapaliny.

Gaussův–Ostrogradského vzorec má pak tvar

$$\oint_P \mathbf{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\iota P} \mathrm{div}\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Tento vzorec tedy říká, že množství kapaliny, které proteče uzavřenou plochou P se rovná množství kapaliny vzniklé ve zřídlech uvnitř P po odečtení množství kapaliny, která odteče odtoky uvnitř P. Je-li $\mathrm{div} f = 0$ uvnitř P, je množství kapaliny, které do vnitřku P vteče, stejné jako to, které vyteče.

Stokesova věta

Na levé straně je integrál ze skalárního součinu vektorového pole f a tečného pole křivky C a znamená opět cirkulaci pole f podél křivky C.

Vektorové pole v integrálu na pravé straně Stokesova vzorce

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

se značí $\mathrm{rot} f$ a čte se rotace pole f. Podobně jako v rovině znamená rychlost a otáčení víru v daném bodě.

Stokesův vzorec má pak tvar

$$\oint_{\partial P} \mathbf{f} . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_P \mathrm{rot} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{S}, .$$

Fyzikální význam je opět stejný: cirkulace proudění kapaliny uzavřenou křivkou je součtem směrů a rychlostí všech vírů uvnitř křivky.

Označne $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ formální diferenciální operátor.

Pak

$$\mathrm{grad}\ f = \nabla f$$

$$\mathrm{div}\ f = \nabla . f$$

$$\mathrm{rot}\ f = \nabla \times f$$

kde jde postupně o jednoduchý, skalární a vektorový součin.

Složky rotace vektorového pole (f_1, f_2, f_3) jsou vskutku subdeterminanty příslušnými k i, j, k v následujícím determinantu:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

POTENCIÁLNÍ POLE V ROVINĚ

Jestliže jsou dány dvě křivky v rovině mající společný počátek i společný konec, mohou být integrály dané funkce přes tyto dvě křivky různé. Této situaci se říká, že integrál z dané funkce závisí na cestě.

Zopakujeme, že jednoduchá otevřená množina G je souvislá otevřená množina, která nemá díry, tj., je-li C jednoduše uzavřená křivka ležící v G, pak i její vnitřek leží v G.

DEFINICE. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina A a funkce $f = (f_1, f_2) : A \to \mathbb{R}^2$. Vektorové pole dané funkcí f se nazývá potenciální na A, jestliže integrace f podle hladkých křivek ležících v A nezávisí na cestě.

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G a funkce $f = (f_1, f_2) : G \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace na G. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. Vektorové pole dané funkcí f je na G potenciální.
2. $\oint_C \mathbf{f} . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = 0$ pro každou jednoduše uzavřenou křivku C ležící v G.
3. Rotace f v G se rovná 0.
4. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{R}$ tak, že $\mathrm{grad}\ F = f$ na G.

Když $\int_C \mathbf{f} . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ závisí jen na počátečním a koncovém bodě křivky C, lze (jednoznačně) definovat

$$F(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{f} . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t} \ ,$$

kde (a, b) je pevně zvolený bod z G. Snadno se ukáže, že $\mathrm{grad} F = f$.

Funkce F z předchozí věty se nazývá potenciál vektorového pole f.

Pro potenciální pole na G lze pak křivkový integrál 2.druhu $\int_C f \, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$ psát jako $\int_P^Q f \, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$, kde P, Q jsou krajní body křivky C.

Je-li znám potenciál F pole f, pak $\int_P^Q f\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} = F(Q) - F(P)$.

Příklad. Ukažte, že vektorové pole $f = (x^2 - y^2, 5 - 2xy)$ je potenciální a najděte jeho potenciál. Poté spočtěte $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} (x^2 - y^2)\,\mathrm{dx} + (5 - 2xy)\,\mathrm{dy}$.

Řešení. Zkontrolujeme divergenci.

Pro nalezení potenciálu hledáme přímo F tak, že $\mathrm{grad}\ F = f$ postupnou integrací a ověříme výsledek nalezením potenciálu přímo výše uvedeným postupem.

Příklad. Vektorové pole $f = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ je definováno všude kromě bodu $(0, 0)$.

Ukažte, že pokud jednoduše uzavřená křivka obsahuje uvnitř počátek, není integrál z f přes tuto křivku roven 0.

Pokud je počátek vně jednoduše uzavřené křivky, je integrál roven 0.

Existuje jeho potenciál?

Má-li funkce $F : G \to \mathbb{R}$ spojité parciální derivace na otevřené podmnožině G roviny, platí $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\ F) = 0$.

Příklad. Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_L (x^2 - yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka $L = (\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi})$ je dána parametricky s parametrem $t \in (-\pi, \pi)$.

Řešení.

Při výpočtu bychom rádi využili předchozích vět, proto doplníme křivku L křivkou M tak, aby křivka $L - M$ byla hranicí plochy S.

Podle Stokesovy věty je

$$\int_{\partial S} F \cdot\ \mathbf{dt} = \int_S \mathrm{rot}\ F \cdot\ \mathbf{dS}.$$

Spočítáme tedy rotaci funkce $F(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$.

Přímým výpočtem zjistíme, že

$$\mathrm{rot} F = \nabla \times F = (0, 0, 0).$$

Odtud dostáváme

$$\int_{L-M} F \cdot\ \mathbf{dt} = 0,$$

neboli

$$\int_L F \cdot\ \mathbf{dt} = \int_M F \cdot\ \mathbf{dt}\ .$$

Stačí tedy spočítat integrál na pravé straně.

Křivka M má parametrizaci

$$M(t) = (-1, 0, t), \quad t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Proto její derivace bude

$$\dot{M}(t) = (0, 0, 1), \quad t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Potom

$$\int_M F \cdot\ \mathbf{dt} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1, t/(2\pi), t^2/(4\pi^2)) \cdot (0, 0, 1)\,\mathrm{d}t = \cdots$$

SOLENOIDÁLNÍ POLE V PROSTORU

DEFINICE. Vektorové pole $\mathbf{f}$ na otevřené podmnožině prostoru se nazývá solenoidální, jestliže plošný integrál 2.druhu z f v A závisí jen na kraji, tj.,

$$\int_{P_1} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{P_2} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{n}$$

pro libovolné dvě hladké plochy P_1, P_2, které leží v A, mají stejný kraj a jsou souhlasně orientovány vzhledem k tomuto kraji.

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. Vektorové pole dané funkcí f je na G solenoidální.
2. $\int_P \mathbf{f}(z).\, \mathrm{d}\boldsymbol{n} = 0$ pro každou jednoduše uzavřenou plochu P ležící v G.
3. $\mathrm{div} f$ v G se rovná 0.
4. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{R}^3$ tak, že $\mathrm{rot} F = f$ na G.

Funkce F se někdy nazývá potenciálním vektorem pole f a solenoidální pole se občas nazývá nezřídlové pole.

VĚTA. Nechť je dána jednoduchá otevřená množina G v prostoru a funkce $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ mající spojité parciální derivace na G. Pak existuje potenciální pole g a solenoidální pole h na G tak, že $f = g + h$.

Každé „hladké" vektorové pole f se tedy dá rozložit na funkci g s $\mathrm{rot}\ g = 0$ a funkci h s $\mathrm{div}\ h = 0$.