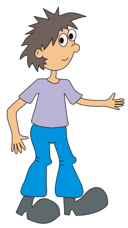
STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

Zatím nebylo v těchto textech věnováno příliš pozornosti konvergenci funkcí, ať jako limita posloupnosti nebo součet řady.

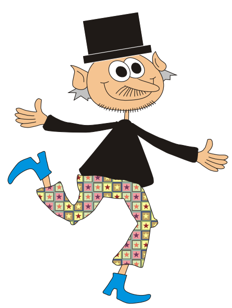


Nevšiml jsem si.

Jedinou větší výjimkou byly Taylorovy řady, kde byla i zmínka o stejnoměrné konvergenci.

Jinak byla konvergence posloupnosti funkcí nebo řady brána jako bodová konvergence.

To je samozřejmě základní pojem konvergence, ale v mnoha případech je příliš obecný a nestačí na dokazování některých užitečných tvrzení.



Obecně se připravte na zajímavou matematiku :-)

POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

Před uvedením různých konvergencí posloupností nebo řad funkcí je vhodné rozvést některé základní pojmy definované dříve.

Není nutné se soustředit jen na funkce jedné proměnné a ani na reálné funkce.

Ale ani není nutné probírat téma v úplně obecnosti.

Ď.

Zobrazení f z Euklidovského prostoru do Euklidovského prostoru dimenze m je m-tice $(f_1, ..., f_m)$ funkcí více proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Protože základní vlastnosti funkce f jsou určeny vlastnostmi funkcí f_i a konvergence v $\mathbb{R}^m$ je konvergence po souřadnicích, stačí probírat případy *reálných funkcí více proměnných* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a omezit se na $n \leq 2$.

Obecně si malujte obrázky všude tam, kde se něco k něčemu blíží.

Nicméně, vzhledem k zjednodušení zápisu budou některé pojmy zavedeny nebo probírány obecněji.

Znáte tento vtip? Fyzik přednáší o interakcích v devíti-rozměrném prostoru. Mezi posluchači vedle sebe sedí inženýr a matematik. Zatímco inženýr je zoufalý, matematik spokojeně přikyvuje. Inženýrovi to nedá a zeptá se matematika, jak může pojmout tak nepředstavitelné věci: „Je to jednoduché, neprve si vše představím v n dimenzích, a pak za n dosadím 9!"

DEFINICE. Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje bodově na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, tj.

$$\forall \varepsilon \forall x \in M \, \exists k \in \mathbb{N} \, \forall n \geq k \; (\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \,) \, .$$

Obvyklé značení je $\lim f_n = f$ nebo $f_n \to f$.

Bodový součet řady zobrazení se může definovat jako bodová limita posloupnosti částečných součtů řady, nebo rovností $\left(\sum f_n\right)(x) = \sum f_n(x)$ (ukažte, že se dostane tentýž pojem).

Jak je obvyklé z teorie řad čísel, i řady funkcí nebo jejich součet se značí $\sum f_n$.

VĚTA. Pro bodovou konvergenci na množině M platí:

1. $\lim_n (f_n + g_n) = \lim_n f_n + \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.
2. $\lim_n (f_n g_n) = \lim_n f_n \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.

3. $\lim_n(f_n/g_n) = \lim_n f_n / \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.

Pro řady lze uvést jen linearitu, protože násobení (nebo podíl) částečných součtů nedává částečný součet příslušných součinů (podílů, resp.).

DŮSLEDEK. $\sum_n(af_n + bg_n) = a\sum_n f_n + b\sum_n g_n$, má-li pravá strana smysl, kde a, b jsou reálná čísla.

Poznámky 1:

V definici bodové limity jsou funkce definovány na nějaké nespecifikované množině M. O té není nutné vůbec nic znát, protože konvergence probíhá v oborech hodnot funkcí, tedy v $\mathbb{R}$.

Ani v uvedených tvrzeních není třeba o množině M vědět více, protože sčítání, násobení a dělení je opět prováděno v $\mathbb{R}$.

Místo $\mathbb{R}$ lze vzít jakoukoli strukturu, kde je definována konvergence a uvedené algebraické operace, např. množinu racionálních čísel, nebo množinu všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$ se stejnoměrnou konvergencí (viz další sekci pro definici).

Pozor: v množině racionálních čísel nebude konvergovat vše, co konverguje v $\mathbb{R}$ (tedy Cauchyovské posloupnosti). HA!

V uvedených tvrzeních o linearitě limity nebo součtu jsou koeficienty brány z $\mathbb{R}$. Pokud se zkoumají funkce do $\mathbb{R}^2$, lze za koeficienty brát komplexní čísla s příslušným násobením (nikoli tedy násobení po souřadnicích).

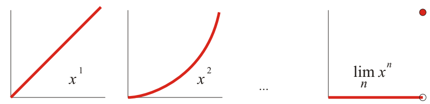
Baireovy třídy funkcí a já.

*Baireovy třídy funkcí

V této části se bude jednat jen o reálných funkcích definovaných na nějakém kompaktním intervalu, např. na $[0, 1]$.

Jednoduché příklady ukazují, že bodová limita posloupnosti spojitých funkcí nemusí být spojitá (např. $f_n(x) = x^n$). Nicméně, tyto limity jsou v jistém smyslu blízko spojitým funkcím a mají některé pěkné vlastnosti. Říká se jim funkce (Baireovy) 1.třídy.

Například zde je jeden kandidát.



Není důvod, proč nepokračovat dále. Funkce se nazývá funkce (Baireovy) 2.třídy, jestliže je bodovou limitou posloupnosti funkcí 1.třídy.

Obecně lze dát následující definici (stále se jedná o funkce na $[0,1]$)

DEFINICE. Funkce se nazývá funkcí 0.třídy, jestliže je spojitá.

Pro ordinální číslo $\xi > 0$ se funkce nazývá funkcí ξ-té třídy, jestliže je bodovou limitou posloupnosti funkcí menších tříd.

V některých textech se funkce nazývá funkcí ξ-té třídy, jestliže je funkcí ξ-té třídy v právě definovaném smyslu, ale není funkcí η-té třídy pro žádné $\eta < \xi$.

Dají se snadno ukázat následující tvrzení:

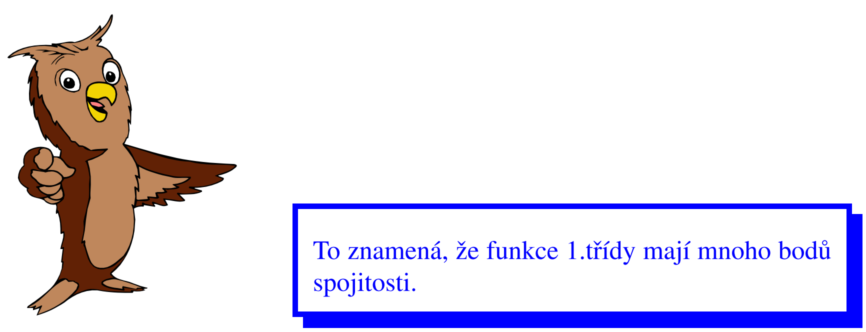
1. Je-li $\xi \le \eta$, je každá funkce ξ-té třídy zároveň funkcí η-té třídy.
2. Pro $\xi \ge \omega_1$ je každá funkce ξ-té třídy zároveň funkcí ω_1-té třídy.
3. Součet, součin a podíl funkcí ξ-té třídy je opět funkcí ξ-té třídy.

Na prvním nespočetném ordinálním čísle ω_1 se tedy proces zastaví. Otázkou je, zda se už nezastaví dříve. Že se tento proces zastaví opravdu až na ω_1, dokázal Lebesgue a důkaz přesahuje rámec tohoto textu.

Funkce ξ-té třídy se dají charakterizovat bez pomocí limit, podobně jako je charakterizována spojitost pomocí vzorů množin.

Funkce je spojitá (tj. 0.-té třídy) právě když vzor každé uzavřené množiny je uzavřená množina.

Funkce je 1.třídy právě když vzor každé uzavřené množiny je průnikem spočetně mnoha otevřených množin. Nebo ekvivalentně: její zúžení na libovolnou uzavřenou množinu má bod spojitosti.



Dá se dokázat, že pro funkci f libovolné ξ-té třídy vždy existuje K-integrál $\int_0^1 f$. Existují však funkce f, pro něž tento integrál existuje a které nejsou ze žádné ξ-té třídy.

* Polospojité funkce

:-)

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Vypočtěte bodovou limitu posloupnosti $\{x^n\}$ **na intervalu** $(0,1)$ **a na** $[0,1]$**.**

2. Vypočtěte součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ **na** $\mathbb{R}$**.**

3. Vypočtěte bodovou limitu posloupnosti $\{\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\}$ **na** $\mathbb{R}$**.**

4. Vypočtěte bodovou limitu posloupnosti $\{n^2x(1-x^2)^n\}$ **na intervalu** $[0,1]$**.**

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

1. Ukažte, že funkce je spojitá právě když je shora a zdola polospojitá.

2. Charakteristická funkce uzavřené (nebo otevřené) množiny je shora (resp. zdola) polospojitá.

Co když množina je jednobodová?

Budeme si hrát na třídy.

3^***. Dokažte, že funkce na** $[0,1]$**, která má nenulovou hodnotu právě v jednom bodě intervalu, je funkce 1.třídy.**

4^***. Předchozí tvrzení lze zobecnit na funkci, která se rovná jedné na uzavřeném podintervalu** $[0,1]$ **a jinde je 0. Dokonce lze místo podintervalu vzít uzavřenou množinu (to je již těžší).**

5^***. Dokažte, že Dirichletova funkce je funkcí 2.třídy. Uvažte dvojnou posloupnost** $\cos^{2m}(n!\pi x)$ **a vhodné pořadí limit podle** n **a** m**.**

Je Dirichletova funkce funkcí 1.třídy? Zkuste použít ekvivalentní definici.

6^*. **Dokažte tvrzení 1,2 a 3 z** *Poznámek*.

7^*. **Dokažte indukcí, že je-li f funkce ξ-té třídy a g funkce η-té třídy, která zobrazuje $[0,1]$ do $[0,1]$, je složení $f \circ g$ funkce $\xi + \eta$-té třídy.**

8^*. **Ukažte, že každá monotónní funkce je funkcí 1.třídy.**

Obecněji, každá funkce s nejvýše spočetně mnoha body nespojitosti je 1.třídy.

Hraje si se mnou ještě někdo?

Konec otázek 1.

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

Bodová limita posloupnosti spojitých funkcí nemusí být spojitá (například x^n) a jsou i další vlastnosti, které bodová konvergence nemá.

Je proto vhodné přidat nějakou další podmínku na konvergenci, aby se vyloučily ony špatné situace.

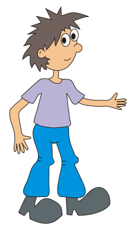
Takovou jednoduchou podmínkou je stejnoměrnost konvergence:

DEFINICE. Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall n \geq k\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Obvyklé značení je $f_n \rightrightarrows f$.

Pokud dokazujete stejnoměrnou konvergenci, musíte pro dané epsilon najít jedno k, aby pak nepřítel nemohl předhodit x, kde bude rozdíl velký. (Zatímco u konvergence hledáte k až po té, co nepřítel vybere epsilon i x.)



Já nemám nepřátele.

DEFINICE. **Řada funkcí $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f, jestliže posloupnost částečných součtů $\{\sum_{i=1}^{n} f_i\}$ konverguje na M stejnoměrně k f.**

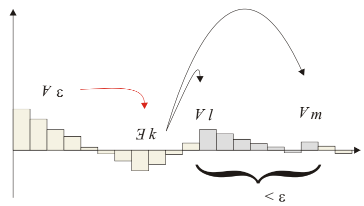
Řady i posloupnosti jsou zajímavé. Lépe se malují posloupnosti, protože členy řady rychle mizí.

Když namaluju řadu, stejně nic nevidím . . .

POZOROVÁNÍ.

1. **Konverguje-li posloupnost $\{f_n\}$ k f stejnoměrně na M, konverguje na M k f i bodově.**
2. **(Bolzanova–Cauchyova podmínka) Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k nějaké funkci právě když platí:**
$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall m, n \geq k\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,.$$
3. **Řada $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně právě když platí:**
$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, |\sum_{n=k}^{\infty} f_n(x)| < \varepsilon\,.$$

Poslední podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řad lze též přepsat pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky:
$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall m > l > k\, \left(|\sum_{n=l}^{m} f_n(x)| < \varepsilon \right)\,.$$



U těch řad jsou jasně vidět takzvané "malé ocasy".

Následující kritéria jsou jednoduchá ale účinná.

VĚTA.

1. **Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f právě když platí**

$$\lim_n \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0 .$$

2. **Jestliže $\sum f_n$ má na M majorantní stejnoměrně konvergentní řadu (tj., existuje stejnoměrně konvergentní řada $\sum g_n$ na M taková, že $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ pro každé n a každé $x \in M$), pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.**

3. **Nechť $|f_n(x)| \leq c_n$ pro každé $x \in M$ a $\sum c_n$ konverguje. Pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.**

Poslední podmínka pro stejnoměrnou konvergenci se často nazývá *Weierstrassovo kritérium*.

V kapitole o číselných řadách byly, kromě kritérií pro absolutní konvergenci, dvě další kritéria pro konvergenci, a to Dirichletovo a Abelovo (Leibnizovo kritérium je speciální případ Dirichletova kritéria).

Podíváte-li se na důkaz těchto dvou kritérií pro případ, že se jedná o řady funkcí, uvidíte, že dává následující tvrzení:

VĚTA. Nechť $\{f_n\}, \{g_n\}$ jsou dvě posloupnosti funkcí na intervalu I. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ konverguje na I stejnoměrně, jestliže $\{f_n\}$ je monotónní a buď

(a) f_n konverguje stejnoměrně k 0, $\{g_n\}$ má stejně omezené částečné součty (Dirichlet)
nebo
(b) $\{f_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na I (Abel),

DŮSLEDEK. (Leibniz) Nechť $\{f_n\}, \{g_n\}$ je posloupnost nezáporných funkcí na intervalu I. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ konverguje na I stejnoměrně, pokud $\{f_n\}$ je monotónní a f_n konverguje stejnoměrně k 0 na I.

Já jim říkám součinová kritéria.

Já to raději nepovím ...

Poznámky 2:

Všimněte si u definice stejnoměrné konvergence přehození kvantifikátorů oproti bodové konvergenci. Toto přehození znamená, že výběr $k \in \mathbb{N}$ pro body x z bodové konvergence nezávisí na x, tj. všechna tato k lze vzít stejná.

Často se stává, že bodová konvergence na množině M je stejnoměrná jen na nějaké podmnožině $K \subset M$. V některých případech (např. pokud za K lze brát otevřené intervaly), i tato částečná stejnoměrná konvergence stačí k důkazu některých vlastností limitní funkce (viz dále část o spojitosti limitní funkce).

Ve větě charakterizující stejnoměrnou konvergenci pomocí limity suprem funkcí není nutné brát suprema, která se někdy obtížně počítají. Pro jednu implikaci stačí vzít horní odhady (viz *Otázky*).

Weierstrassovo kritérium je formulováno pro horní meze funkcí, protože u tohoto kritéria nemůže jít o ekvivalenci. Samozřejmě, čím menší horní meze vezmete, tím větší je naděje na jejich konvergenci.

Nejlepší z matematického hlediska je proto vzít supréma funkcí f_n na dané množině. Prakticky to však není vždy možné, buď kvůli jejich složitějšímu výpočtu nebo složitějšímu dokazování konvergence vzniklé řady.

Aha.

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Ukažte, že ani jedna z konvergencí z předchozích *Příkladů* není stejnoměrná.

2. Zkoumejte stejnoměrnou konvergenci pro následující posloupnosti a řady:

$$\{\frac{x}{1+nx^2}\}\text{na}\,\mathbb{R}\,, \quad \sum_n nx^n\,, \quad \sum_n \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}\,, \quad \sum_n \frac{\cos(nx)}{e^{nx}}\,.$$

3. Použijte Abelovo kritérium na stejnoměrnou konvergenci řady $\sum \frac{(-x)^n}{n(1+x^n)}$ **na intervalu** $[0,1)$**.**

4. Pomocí Dirichletova kritéria zjistěte stejnoměrnou konvergenci řad

$$\sum \sin(nx)/n, \sum \cos(nx)/n\,.$$

Místo $1/n$ **vezměte obecné koeficienty** a_n **– co je nutné od nich požadovat, aby řady** $\sum a_n \sin(nx), \sum a_n \cos(nx)$ **konvergovaly stejnoměrně?**

Konec příkladů 2.

Otázky 2:

1. Dokažte uvedená kritéria stejnoměrné konvergence vyplývající ze srovnávacího kritéria pro číselné řady.

1. Ověřte, že důkaz Dirichletova a Abelova kritéria pro číselné řady lze s formální modifikací použít pro stejnoměrnou konvergenci funkcí.

3. Nechť $\{a_n\}$ **je nerostoucí posloupnost reálných čísel konvergující k 0. Ukažte, že řada** $\sum_n a_n \cos(nx)$ **konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu neobsahujícím žádný celý násobek čísla** 2π**. Totéž pro sinus místo kosinu.**

Já si myslím, že jsem to už někde viděl. Teda tu omezenost částečných součtů $\sin nx$**. A byl tam teleskop jak vrata.**

Konec otázek 2.

VLASTNOSTI STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE

Další text nyní ukáže, proč bývá stejnoměrná konvergence vhodnější než pouhá bodová konvergence.

Pro stejnoměrně konvergentní nekonečné řady totiž platí podobná tvrzení jako pro konečné součty, např. zachování spojitosti, integrace a derivace součtů.

Přestože lze následující tvrzení o spojitosti a limitách dokázat i pro funkce více proměnných, pro jednoduchost budou v této části uvažovány funkce jedné proměnné, tj. definiční obor M bude podmnožinou reálných čísel.

Spojitost

Bodová limita posloupnosti spojitých funkcí nemusí být spojitá, např. $\lim_n x^n$ na intervalu $[0,1]$.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost (stejnoměrně) spojitých funkcí na M, která na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Potom je f (stejnoměrně) spojitá funkce na M.

Stejnoměrně ale není zadarmo . . .

Důkaz. Nejdříve pro spojitost. Buď $p \in M$ a $\varepsilon > 0$. Má se najít okolí U bodu p takové, že pro $x \in M \cap U$ je $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ pro všechna $x \in M$. Protože f_k je spojitá v p, existuje okolí U bodu p tak, že pro $x \in M \cap U$ je $|f_k(x) - f_k(p)| < \varepsilon/3$.

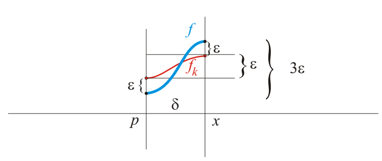
Nyní se tyto odhady dají dohromady a důkaz bude dokončen

$$|f(x) - f(p)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(p)| + |f_k(p) - f(p)| < 3\varepsilon/3 = \varepsilon\,.$$

Pro stejnoměrnou spojitost je důkaz skoro stejný – proveďte ho.

To je jednoduché, k epsilonu musí být f_k všude blízká k f (epsilon/3) a f_k mi řekne na jakým delta má už rozkmity malé (menší než epsilon/3).

Já radši nedělím, mi stačí 3 epsilon.



◇

DŮSLEDEK. Nechť řada $\sum f_n$ (stejnoměrně) spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Potom je f (stejnoměrně) spojitá na M.

Existuje situace, kdy lze předchozí větu obrátit.

Monotónní posloupnost funkcí f_n je buď nerostoucí nebo neklesající posloupnost, tj, např. v prvním případě, pro každé x z definičního oboru funkcí f_n je $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$.

VĚTA. (Dini) Nechť posloupnost spojitých funkcí konverguje monotónně ke spojité funkci na kompaktní množině. Pak je tato konvergence stejnoměrná.

Důkaz. Nechť M je kompaktní množina a rostoucí posloupnost spojitých funkcí f_n konverguje na M ke spojité funkci f.

Buď $\varepsilon > 0$. Pro $k \in \mathbb{N}$ se definuje $G_k = \{x \in M; |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\}$.

Zřejmě je každá množina G_k otevřená (protože f_k, f jsou spojité), $G_k \subset G_{k+1}$ (protože $\{f_n\}$ je monotónní) a $\bigcup_k G_k = M$ (protože $f_n \to f$).

Protože M je kompaktní, musí existovat k takové, že $G_k = M$. Jinak by existovala posloupnost $x_k \in M \setminus G_k$, ta musí mít hromadný bod v M, který musí ležet v nějakém G_k, což není možné.

Rovnost $G_k = M$ ale znamená stejnoměrnou konvergenci f_n k f. $\diamond$

Stejnoměrná konvergence je v podstatě konvergence prvků, ale v prostoru spojitých funkcí. Ale to až někdy jindy.

Poznámky 3:

Podíváte-li se na důkaz věty o spojitosti stejnoměrné limity spojitých funkcí, uvidíte, že stačí požadovat méně, a to stejnoměrnou konvergenci jen v nějakých okolích jednotlivých bodů. Taková konvergence se nazývá lokálně stejnoměrná konvergence.

Platí tedy tvrzení, že *lokálně stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce*.

Uvedené tvrzení lze zformulovat jen pro jednotlivé body: *Konverguje-li $\{f_n\}$ stejnoměrně v okolí bodu x a skoro všechny funkce f_n jsou spojité v bodě x, pak limitní funkce je spojitá v x.*

Stejnoměrná konvergence zachovává i stejnoměrnou spojitost, ale lokálně stejnoměrná limita stejnoměrně spojitých funkcí nemusí být stejnoměrně spojitá (viz *Otázky* **a** *Příklady***).**

V *Příkladech* **najdete situace, kdy monotónní posloupnost spojitých funkcí konverguje k nespojité funkci a kdy spojité funkce konvergují ke spojité funkci nestejnoměrně.**

Dá se dokázat, že funkce je shora (nebo zdola) polospojitá právě když je limitou neklesající (resp. nerostoucí) posloupnosti spojitých funkcí.

Pokud polospojitá funkce není spojitá, nemůže být uvedená konvergence lokálně stejnoměrná.

Konec poznámek 3.

Příklady 3:

Funkce $f_n(x) = x^2$ pro $|x| \leq n$ a $f_n(x) = n^2$ pro $|x| \geq n$ tvoří posloupnost stejnoměrně spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, která konverguje lokálně stejnoměrně k nestejnoměrně spojité funkci. Ověřte.

Sestrojte podobný příklad na omezeném intervalu.

Lze takový příklad sestrojit na kompaktní množině?

Konec příkladů 3.

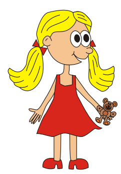
Otázky 3:

1. Dokažte, že stejnoměrná konvergence zachovává stejnoměrnou spojitost.

2. Uvědomte si, že uvedené důkazy jsou nezávislé na tom, v jaké dimenzi se pracuje. Zkuste ověřit, že důkazy (a tedy i tvrzení) jsou správné i v prostoru.

3. Je konvergence posloupnosti $\{x^n\}$ k 0 na $(0,1)$ stejnoměrná?

Někdo nám vyhodil ten protivný bod. Usmějeme se, nebo se zasmějeme?



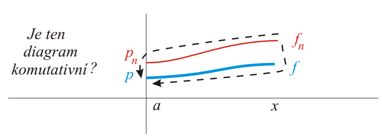
Já jsem vysmátá.

Konec otázek 3.

Stejnoměrná konvergence a limity

Pokud $f_n \to f$ a $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = p_n$, nastává otázka, zda $\lim_n p_n = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, tj., zda lze přehodit limity

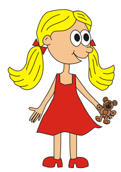
$$\lim_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_n f_n(x)\,.$$



Jak ukazuje příklad $f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$ a $a = 1$, pro bodovou konvergenci tato záměna limit platit nemusí.

Pro stejnoměrnou konvergenci je situace příznivá. Dokonce velmi příznivá.

A to není poslední dobré kouzlo.



Mám stejnoměrně růžové šatičky a to je dobrá zpráva.

VĚTA. **Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na M, která na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Pro libovolný hromadný bod a množiny M platí**

$$\lim_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_n f_n(x)\,,$$

existuje-li pravá strana.

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = p_n$, $\lim_n p_n = p$. Má se ukázat, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = p$. Buď $\varepsilon > 0$.

Platí

$$|f(x) - p| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - p_n| + |p_n - p|\,.$$

Existuje n tak, že první a poslední člen na pravé straně jsou nejvýše ε pro všechna $x \in M$.

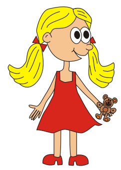
Pak existuje okolí U bodu x tak, že i druhý člen je nejvýše ε pro $x \in U \cap M$, takže pro tato x je $|f(x) - p| \le 3\varepsilon$, což se mělo dokázat. $\diamond$

DŮSLEDEK. **Nechť řada $\sum f_n$ spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně. Potom pro libovolný bod $a \in I$ je**

$$\sum_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_n f_n(x)\,,$$

existuje-li jedna strana.

Ta komutativita opravdu platí a je hezká.



Jsem hezká.

Poznámky 4:

Problém změny pořadí limit je velmi důležitý a používá se v mnoha výpočtech i teoretických postupech.

Formulace v textu byla uvedena pro limity funkcí, ale lze uvést ekvivalentní formulaci pro limity dvojných posloupností. To vyplývá z toho, že limita funkce je charakterizována limitou posloupnosti.

Dvojná posloupnost má dva indexy probíhající spočetnou množinu, tj $\{a_{nm}\}$**, kde** $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$**. Dvojná posloupnost je vlastně nekonečná matice**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. \\ \vdots & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Kdy platí $\lim\limits_n \lim\limits_m a_{n,m} = \lim\limits_m \lim\limits_n a_{n,m}$**?**

V *Otázkách* **je uvedeno přesné znění věty z textu pro tento případ.**

Roli tam hraje stejnoměrná konvergence pro posloupnosti: $\lim\limits_n a_{nm} = p_m$ **stejnoměrně vzhledem k** m**, jestliže pro každé** $\varepsilon > 0$ **existuje** $k \in \mathbb{N}$ **takové, že pro všechna** $l \geq k$ **je** $|a_{lm} - p_m| < \varepsilon$ **pro všechna** m**.**

Konec poznámek 4.

Příklady 4:

1. Ukažte, že nelze zaměnit limitu a součet u řady funkcí $x^2/(1+x^2)^n$**.**

2. Lze zaměnit limity u dvojné posloupnosti $\lim_n \lim_m a_{m,n}$**?**

Konec příkladů 4.

Otázky 4:

1. Ověřte, že definice stejnoměrné konvergence $\lim\limits_n a_{nm} = p_m$ **vzhledem k** m **je speciální případ definice stejnoměrné konvergence pro funkce** f_n **na množině** $\mathbb{N}$**.**

2. Dokažte tvrzení: *Nechť* $\{a_{nm}\}$ *je dvojná posloupnost reálných čísel a nechť* $\lim\limits_n a_{nm} = p_m$ *stejnoměrně vzhledem k* m*, a* $\lim\limits_m a_{nm} = q_n$*. Potom* $\lim\limits_m p_m = \lim\limits_n q_n$ *pokud jedna strana má smysl.*

3. Ukažte pomocí tvrzení z předchozího bodu větu o záměně limit uvedenou v textu.

4. Ukažte, že ve větě o záměně limit nestačí požadovat lokálně stejnoměrnou konvergenci.

Leží-li však limitní bod v množině, na které posloupnost nebo řada konverguje lokálně stejnoměrně, záměnu limit lze provést – ukažte to.

5. Pomocí věty o záměně limit dokažte tvrzení o spojitosti (lokálně) stejnoměrné limity funkcí.

Konec otázek 4.

Stejnoměrná konvergence a integrál

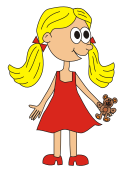
Opět se dají najít jednoduché příklady, že nelze přehodit limitu a integraci u bodové konvergence.

Jde to, ale musíte jít nahoru nebo daleko.

Co třeba $f_n(x) = (n+1)x^n$ na $[0, 1)$? Nakreslete si a vypočtěte. To je opravdu neuvěřitelné.

Já to dělám z trojúhelníků u nuly nebo u nekonečna a taky to jde.

Koukám, že si člověk může vybrat, kde to dělá, není-liž pravda?



Já to dělám do nočníčku.

U stejnoměrné konvergence prohození integrálu a limity možné je.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f. Je-li $\{F_n\}$ posloupnost primitivních funkcí k f_n na I, která konverguje alespoň v jednom bodě z I, pak $\{F_n\}$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I.

Důkaz je dopředu prokouknutelný. Jiný vlastně být nemůže, že?

Důkaz. Nechť $\{F_n\}$ konverguje v bodě $a \in I$.

To, že $\{F_n\}$ konverguje stejnoměrně, vyplývá (pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky) z odhadů

$$\begin{aligned}|F_n(x) - F_m(x)| &= |F_n(x) - F_n(a) + F_n(a) - F_m(a) + F_m(a) - F_m(x)| \\ &\le |(F_n(x) - F_m(x)) - (F_n(a) - F_m(a))| + |F_n(a) - F_m(a)| \\ &\le |f_n(c) - f_m(c)||x - a| + |F_n(a) - F_m(a)|\,.\end{aligned}$$

V poslední nerovnosti je použita věta o střední hodnotě pro funkci $F_n - F_m$, c je potom vnitřní bod intervalu s koncovými body a, x.

Oba poslední členy budou od určitého k malé nezávisle na x.

Buď F limita posloupnosti $\{F_n\}$. Zbývá dokázat, že $F' = f$ na I:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \lim_{n} \frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} = \lim_{n} \lim_{h\to 0} \frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} = \lim_{n} f_n(x) = f(x)\,,$$

kde záměna obou limit vyplývá z předchozí věty. $\diamond$

DŮSLEDEK. Nechť $\sum f_n$ je řada funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f. Jsou-li F_n primitivní funkce k f_n na Itakové, že řada $\sum F_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě x z I, pak $\sum F_n$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I.

Ano.

Předchozí větu a její důsledek lze použít pro určité integrály:

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I.

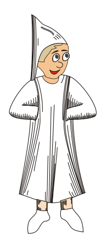
1. **Jestliže $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f. Pak pro libovolný interval $[a,b] \subset I$ platí**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2. **Jestliže $\sum f_n$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f. Pak pro libovolný interval $[a,b] \subset I$ platí**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

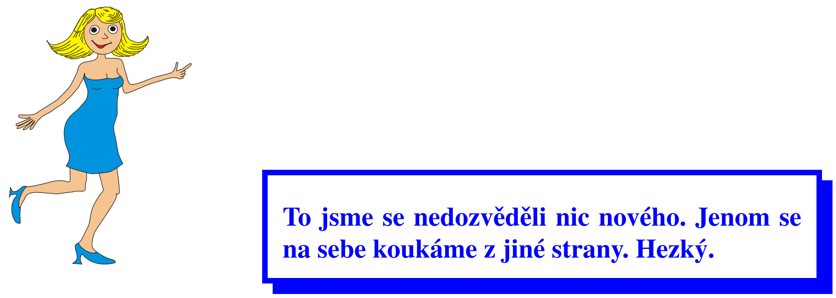
Stejnoměrná konvergence a derivace



Derivace stejnoměrně konvergentní posloupnosti nemusí konvergovat.

Následující tvrzení je úpravou věty pro stejnoměrnou konvergenci primitivních funkcí a nikoho nepřekvapí.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I, která konverguje alespoň v jednom bodě z I a $\{f_n'\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci g. Potom $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k nějaké funkci f a $f' = g$.

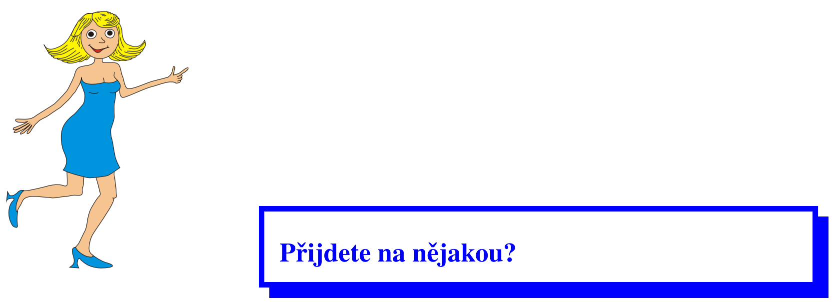


Poznámky 5:

Protože primitivní funkce jsou určeny až na konstantu, je možné zvolit tyto konstanty tak, že příslušná posloupnost nebo řada primitivních funkcí konvergovat nebude. Proto je v tvrzení předpoklad o konvergenci aspoň v jednom bodě.

Protože určitý integrál nezávisí na hodnotách funkce v krajních bodech, dá se očekávat, že tvrzení o záměně integrace a konvergence platí i pro podmínku $(a,b) \subset I$ – viz *Otázky*.

Je dobré si uvědomit, že stejnoměrná konvergence dává podmínku pro záměnu integrálu s konvergencí, ale není to nutná podmínka. Snadno se dají najít posloupnosti nebo řady funkcí, které nekonvergují stejnoměrně a záměna se dá provést.



Toho, že stejnoměrně konvergentní řada spojitých funkcí má za součet spojitou funkci, ale derivace už nemusejí být v žádném vztahu, lze využít ke konstrukci spojitých funkcí, které nemají derivaci v žádném bodě.

Weierstrass uvedl kolekci takových funkcí vzorcem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)\,,$$

kde $0 < a < 1, ab = 1$ a b je liché.

Český matematik Lerch uvedl jiný takový příklad:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!\pi x)}{n!}\,.$$

Konec poznámek 5.

Příklady 5:

1. Ukažte, že posloupnost funkcí $\{\sin(nx)/\sqrt{n}\}$ konverguje ke spojité funkci na $\mathbb{R}$, ale posloupnost jejich derivací nekonverguje.

2. Ukažte, že posloupnost funkcí $\{n^2 x(1-x^2)^n\}$ konverguje ke spojité funkci na $[0,1]$, ale limita jejich integrálů se nerovná integrálu z limitní funkce.

3. Najděte řadu funkcí, konvergující stejnoměrně, jejíž řada derivací konverguje, ale nikoli stejnoměrně.

Konec příkladů 5.

Otázky 5:

1. Dokažte pomocí věty o konvergenci primitivních funkcí větu o záměně integrálu a konvergence.

2. Dokažte větu o záměně integrálu a konvergence i pro podmínku $(a,b) \subset I$. Je třeba použít větu o záměně limity a konvergence?

3. Rozmyslete si, zda věta o záměně integrálu a konvergence platí i pro neomezené intervaly. Uveďte příklady.

4. Ukažte, že Dirichletova funkce na $[0,1]$, která nemá integrál, je součtem hezkých funkcí s konečně mnoha body nespojitosti, které mají zobecněný Newtonův integrál.

5. Dokažte větu o záměně derivace a konvergence z věty o záměně integrace a konvergence.

6. Dokažte následující modifikaci věty o derivaci posloupností a uveďte její tvar pro derivace řad:
Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I, která konverguje k funkci f na I a $\{f'_n\}$ konverguje na I lokálně stejnoměrně k funkci g. Potom $f' = g$.

Konec otázek 5.

MOCNINNÉ ŘADY

Speciální případ řad funkcí, tzv. mocninné řady, se probíral v kapitole o Taylorových řadách funkcí.

Některé podrobnosti o mocninných řadách budou nyní uvedeny, další budou probrány v kapitolách o komplexních funkcích.

Na rozdíl od probíraných Taylorových řad se obecné mocninné řady budou definovat v rovině (tj., pro komplexní čísla).

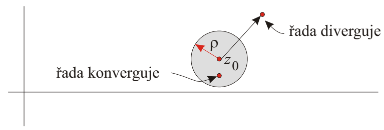
Budeme používat absolutní hodnotu komplexního čísla a v odhadech $|x-a| < \varepsilon$ se ani nepozná, zda jde či nejde o reálná čísla.

DEFINICE. Mocninná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, kde $a_n, z_0, z \in \mathbb{R}^2$.

Bod z_0 se nazývá střed konvergence mocninné řady.

Zřejmě každá mocninná řada konverguje ve svém středu konvergence. Následující tvrzení ukazuje, že pro mocninné řady je obor konvergence velice hezká množina a osvětluje název *střed konvergence*.

VĚTA. Pro každou mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existuje číslo $\rho \in [0,+\infty]$ takové, že řada konverguje na množině $\{z; |z-z_0| < \rho\}$ a diverguje na množině $\{z; |z-z_0| > \rho\}$.
Platí $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$.



Důkaz. První tvrzení vyplyne z následující úvahy: pokud řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje v bodě u, konverguje v každém bodě z, pro který je $|z-z_0| < |u-z_0|$.
Pak totiž stačí položit $\rho = \sup\{|u|;$ řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje v bodě $u\}$.
Důkaz této úvahy je snadný, protože

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(u-z_0)^n| \Big(\frac{|z-z_0|}{|u-z_0|}\Big)^n \le K \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{|z-z_0|}{|u-z_0|}\Big)^n,$$

kde K je horní mez čísel $|a_n(u-z_0)^n|$ (ta existuje vzhledem ke konvergenci řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(u-z_0)^n$).
Zbývá dokázat vzorec pro číslo ρ. Je-li $|z-z_0| > (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$, pak pro nekonečně mnoho indexů n je $|a_n(z-z_0)^n| \ge 1$, takže řada v bodě z nemůže konvergovat.
Je-li naopak $|z-z_0| < (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$, pak existuje číslo $q \in (0,1)$ tak, že i $|z-z_0|/q < (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$, což znamená, že pro skoro všechna n je $\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} \le q < 1$ a řada v bodě z konverguje podle odmocninového kritéria. $\diamond$

Číslo ρ z předchozí věty se nazývá poloměr konvergence dané mocninné řady.
Z důkazu věty vyplývá následující tvrzení:

DŮSLEDEK. Je-li $q \in (0,\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, pak tato řada konverguje stejnoměrně a absolutně na množině $\{z; |z-z_0| \le q\}$.

DŮSLEDEK. Součtem mocninné řady je funkce spojitá na množině $\{z; |z-z_0| < \rho\}$, kde ρ je poloměr konvergence řady.

Protože mocninná řada konverguje stejnoměrně na uzavřených kruzích uvnitř kruhu konvergence, lze použít předchozí věty o integraci a derivaci řad.

Je však nutné se nyní omezit na reálná čísla. Tam umíme derivovat a integrovat. ANO!!!

VĚTA. Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Potom na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ platí

1. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je ρ.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k f a poloměr konvergence této řady je ρ.

Z druhého tvrzení vyplývá, že pro $(a,b) \subset (x_0-\rho, x_0+\rho)$ je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left((b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}\right).$$

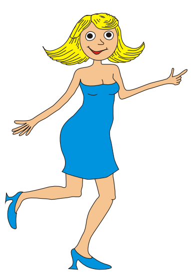
DŮSLEDEK. Nechť funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady. Pak f má derivace všech řádů na I.

DŮSLEDEK. Nechť funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

jsou Taylorovy koeficienty funkce f v bodě x_0.

Důkaz. Pro $n = k$ stačí do rovnosti $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$ dosadit za x číslo x_0. $\diamond$



Na hranici kruhu konvergence může a nemusí mocninná řada konvergovat.

A je lepší, když tam konverguje, nebo obráceně?.

VĚTA. (Abel) Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Tato mocninná řada konverguje v bodě $x_0+\rho$ (nebo $x_0-\rho$) právě když tato mocninná řada konverguje na $[x_0, x_0+\rho)$ (resp. na $(x_0-\rho, x_0]$) stejnoměrně.

To nastane právě když konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n$; tento součet se pak rovná $\lim_{x\to x_0+\rho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. (Obdobně pro $-\rho$.)

Důkaz. Pokud řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n$ konverguje, pak řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje na $[x_0, x_0+\rho)$ stejnoměrně podle Abelova kritéria (monotónní omezený faktor je $\frac{(x-x_0)^n}{\rho^n}$).

Pokud naopak řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje na $[x_0, x_0+\rho)$ stejnoměrně, pak podle věty o záměně limit je

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n = \sum_n \lim_{x\to x_0+\rho_-} a_n(x-x_0)^n = \lim_{x\to x_0+\rho_-} \sum_n a_n(x-x_0)^n\,,$$

a poslední limita existuje (viz větu o derivaci řady), protože součet $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je na $[x_0, x_0+\rho)$ stejnoměrně spojitý. $\diamond$

Tato věta oddělí zrno od plev. Kdo ji nebude používat správně, bude ostatním pro zábavu.

Poprvé to bylo nejkrásnější.

Poznámky 6:

Ve vzorci pro poloměr konvergence se musí $1/0$ chápat jako $+\infty$. Uvědomte si, že se hledá $\limsup$ nezáporných čísel.

Ve většině běžných případů existuje $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ a touto limitou lze nahradit $\limsup$. V těchto případech vlastnost poloměru konvergence vyplývá z limitního tvaru odmocninového kritéria pro konvergenci číselných řad.

Jak bylo uvedeno u číselných řad, možnost použití odmocninového kritéria implikuje možnost požití podílového kritéria, které je v některých případech jednodušší. Pak lze vyjádřit poloměr konvergence pomocí limit podílů – viz *Otázky*.

Vzpomeňte na „triky" při zjišťování Taylorových řad různých funkcí. Nyní jsou tyto postupy legalizovány předchozími tvrzeními o derivaci a integraci mocninných řad – viz *Otázky*.

Abelova věta o limitě mocninných řad dává možnost zjišťovat konvergenci na hranici konvergence (nyní pouze u reálných bodů, v příštím semestru na celé kružnici).

Na hranici konvergence sídlí "lvi". Tedy o hranici mluvte raději s úctou a bázní. Chyba se nemusí vyplatit.

Konec poznámek 6.

Příklady 6:

1. Najděte poloměry konvergence řad (pozor u poslední řady)

$$\sum nz^n\,, \quad \sum n!(z-1)^n\,, \quad \sum \frac{z^n}{3^{n(n+1)}}\,, \quad \sum \frac{(2z-3)^n}{2n+1}\,, \quad \sum \frac{x^{n^2}}{2^n}\,.$$

2. Prozkoumejte konvergenci následujících řad v reálných hraničních bodech $-\rho, \rho$, kde ρ je příslušný poloměr konvergence:

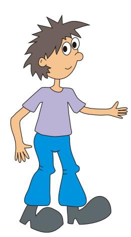
$$\sum \frac{x^n}{n^2}\,, \quad \sum \frac{x^n}{n}\,, \quad \sum nx^n\,.$$

3. Najděte Taylorovu řadu $\operatorname{arctg} x$ nebo $\log(x+1)$ pomocí rozvoje derivace těchto funkcí.

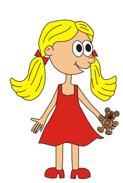
4. Pomocí Abelovy věty o limitě mocninných řad ukažte, že Taylorův rozvoj funkce $\log(x+1)$ je platný i pro $x = 1$ (nikoli pro $x = -1$).

Podobně prozkoumejte platnost Taylorova rozvoje funkce $(x+1)^p$ v krajních bodech konvergence $-1, 1$ – platnost bude záviset na p.

5 Najděte Taylorovu řadu primitivní funkce k $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.



Začínám tomu přicházet na chuť.



Já chci taky lízátko.

Konec příkladů 6.

Otázky 6:

1. Ukažte, že poloměr konvergence ρ mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je roven $(\lim_n \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$, pokud tato limita existuje.

Pokud existuje $\lim_n |a_n|/|a_{n+1}|$, je rovna ρ.

Konec otázek 6.

Cvičení 6: Příklad. Vypočítejte poloměr konvergence následující řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n!}}{n!}.$$

Řešení. Jedná se o řadu se členy $a_k = \frac{1}{k}$ pro $k = n!$, $n \in \mathbb{N}$ a $a_k = 0$ pro ostatní $k \in \mathbb{N}$.
Limes superior posloupnosti

$$\sqrt[k]{|a_k|}$$

bude rovno limitě posloupnosti

$$\sqrt[n!]{\frac{1}{n!}},$$

což je 1.

Uměli byste to ještě zdůvodnit?

Poloměr konvergence tedy roven 1.
Příklad. Sečtěte následující řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}.$$

Řešení. Nejprve si uvědomme, že podle známého Dirichlet-Abelova kriteria z řada konverguje.

Předpoklady tohoto kriteria si ověříme?

Při výpočtu součtu této číselné řady využijeme poznatky o řadách funkcí.
Budeme uvažovat řadu

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n+3},$$

pro $x \in (0, 1)$.

Poloměr konvergence vidím.

Derivací této řady získáme řadu

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n,$$

kterou již snadno sečteme.

Bylo derivování legální?

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n = -1 + x^2 + \frac{1}{1+x^2}$$

Pro primitivní funkce tedy platí rovnost

$$S(x) = -x + \frac{1}{3}x^3 + \arctan x.$$

Víte, jak jsme určili, že na pravé straně má být právě tato primitivní funkce?

Podle Abelovy věty je hledaný součet roven limitě

$$\lim_{x \to 1-} S(x) = -1 + 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Znovu si promyslete jednotlivé kroky a ověřte jejich korektnost.

Příklad. **Spočtěte s přesností** 10^{-3} **následující integrál**

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. **Protože neznáme primitivní funkci k** e^{-x^2}, **využijeme teorie mocninných řad.**

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož řada vystupující v argumentu integrálu konverguje stejnoměrně v intervalu $[0,1]$, **(já vím proč) můžeme zaměnit sumu a integrál:**

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

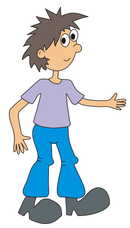
Nyní již stačí vzít dostatečný počet sčítanců z řady na pravé straně předchozí rovnosti, abychom zjistili hodnotu integrálu s požadovanou přesností.

Protože například

$$\sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} \leq \sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2^{-10} < 10^{-3},$$

dostáváme výsledek

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \doteq \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$



Koukám, že si sice započítám, ale musím mimojiné i zamyslit . . .

Konec cvičení 6.

STANDARDY z kapitoly

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

Zobrazení f z Euklidovského prostoru do Euklidovského prostoru dimenze m je m-tice $(f_1, ..., f_m)$ funkcí více proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Protože základní vlastnosti funkce f jsou určeny vlastnostmi funkcí f_i a konvergence v $\mathbb{R}^m$ je konvergence po souřadnicích, stačí probírat případy *reálných funkcí více proměnných* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **a omezit se na $n \le 2$.**

DEFINICE. Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje bodově na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, tj.

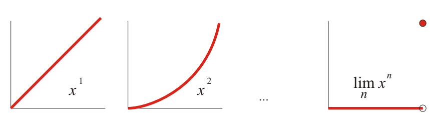
$$\forall \varepsilon \forall x \in M\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \ge k\ \left(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right).$$

Obvyklé značení je $\lim f_n = f$ nebo $f_n \to f$.

Bodový součet řady zobrazení se může definovat jako bodová limita posloupnosti částečných součtů řady, nebo rovností $\left(\sum f_n\right)(x) = \sum f_n(x)$ (ukažte, že se dostane tentýž pojem).

Jak je obvyklé z teorie řad čísel, i řady funkcí nebo jejich součet se značí $\sum f_n$.

Bodová limita spojitých funkcí $f_n(x) = x^n$ na intervalu $[0, 1]$ není spojitá.



Bodovým limitám spojitých funkcí se říká funkce 1. Baireovy třídy. Funkce spojité jsou formálně 0.třídy.

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

DEFINICE. Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall n \ge k\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

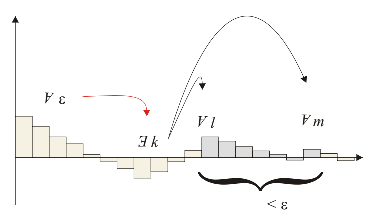
Obvyklé značení je $f_n \rightrightarrows f$.

DEFINICE. Řada funkcí $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f, jestliže posloupnost částečných součtů $\{\sum_{i=1}^{n} f_i\}$ konverguje na M stejnoměrně k f.

POZOROVÁNÍ.

1. **Konverguje-li posloupnost $\{f_n\}$ k f stejnoměrně na M, konverguje na M k f i bodově.**
2. **(Bolzanova–Cauchyova podmínka) Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k nějaké funkci právě když platí:**
$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall m, n \geq k\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,.$$
3. **Řada $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně právě když platí:**
$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, |\sum_{n=k}^{\infty} f_n(x)| < \varepsilon\,.$$

Poslední podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řad lze též přepsat pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky:
$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall m > l > k \quad \left(|\sum_{n=l}^{m} f_n(x)| < \varepsilon \right)\,.$$



VĚTA.

1. **(σ_n podmínka.) Označme**
$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|\,.$$
Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f právě když platí
$$\lim_n \sigma_n = 0\,.$$
2. **(Majoranta.) Jestliže $\sum f_n$ má na M majorantní stejnoměrně konvergentní řadu (tj., existuje stejnoměrně konvergentní řada $\sum g_n$ na M taková, že $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ pro každé n a každé $x \in M$), pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.**
3. **(Weierstrass. M-test.) Nechť $|f_n(x)| \leq c_n$ pro každé $x \in M$ a $\sum c_n$ konverguje. Pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.**

VĚTA. Nechť $\{f_n\}, \{g_n\}$ jsou dvě posloupnosti funkcí na intervalu I. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ konverguje na I stejnoměrně, jestliže $\{f_n\}$ je monotónní a buď

(a) f_n konverguje stejnoměrně k 0, $\{g_n\}$ má stejně omezené částečné součty (Dirichlet)

nebo

(b) $\{f_n\}$ je omezená a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na I (Abel),

DŮSLEDEK. (Leibniz) Nechť $\{f_n\}, \{g_n\}$ je posloupnost nezáporných funkcí na intervalu I. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ konverguje na I stejnoměrně, pokud $\{f_n\}$ je monotónní a f_n konverguje stejnoměrně k 0 na I.

VLASTNOSTI STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE

Spojitost

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost (stejnoměrně) spojitých funkcí na M, která na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Potom je f (stejnoměrně) spojitá funkce na M.

Důkaz. Nejdříve pro spojitost. Buď $p \in M$ a $\varepsilon > 0$. Má se najít okolí U bodu p takové, že pro $x \in M \cap U$ je $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

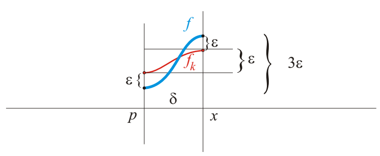
Existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ pro všechna $x \in M$. Protože f_k je spojitá v p, existuje okolí U bodu p tak, že pro $x \in M \cap U$ je $|f_k(x) - f_k(p)| < \varepsilon/3$.

Nyní se tyto odhady dají dohromady a důkaz bude dokončen

$$|f(x) - f(p)| \le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(p)| + |f_k(p) - f(p)| < 3\varepsilon/3 = \varepsilon\,.$$

Pro stejnoměrnou spojitost je to podobné.

◇



DŮSLEDEK. Nechť řada $\sum f_n$ (stejnoměrně) spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Potom je f (stejnoměrně) spojitá na M.

Pro monotónní funkce lze větu obrátit.

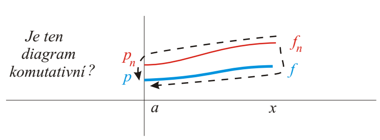
Monotónní posloupnost funkcí f_n je buď nerostoucí nebo neklesající posloupnost, tj, např. v prvním případě, pro každé x z definičního oboru funkcí f_n je $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$.

VĚTA. (Dini) Nechť posloupnost spojitých funkcí konverguje monotónně ke spojité funkci na kompaktní množině. Pak je tato konvergence stejnoměrná.

Stejnoměrná konvergence a limity

Pokud $f_n \to f$ a $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = p_n$, nastává otázka, zda $\lim_n p_n = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, tj., zda lze přehodit limity

$$\lim_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_n f_n(x)\,.$$



Jak ukazuje příklad $f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$ a $a = 1$, pro bodovou konvergenci tato záměna limit platit nemusí.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na M, která na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Pro libovolný hromadný bod a množiny M platí

$$\lim_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_n f_n(x)\,,$$

existuje-li pravá strana.

DŮSLEDEK. Nechť řada $\sum f_n$ spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně. Potom pro libovolný bod $a \in I$ je

$$\sum_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_n f_n(x)\,,$$

existuje-li jedna strana.

Stejnoměrná konvergence a integrál

Opět se dají najít jednoduché příklady, že nelze přehodit limitu a integraci u bodové konvergence.
Například $f_n(x) = (n+1)x^n$ na $[0,1)$.

U stejnoměrné konvergence prohození integrálu a limity možné je.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f. Je-li $\{F_n\}$ posloupnost primitivních funkcí k f_n na I, která konverguje alespoň v jednom bodě z I, pak $\{F_n\}$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I.

Důkaz. Nechť $\{F_n\}$ konverguje v bodě $a \in I$.
To, že $\{F_n\}$ konverguje stejnoměrně, vyplývá (pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky) z odhadů

$$\begin{aligned}
|F_n(x) - F_m(x)| &= |F_n(x) - F_n(a) + F_n(a) - F_m(a) + F_m(a) - F_m(x)| \\
&\le |(F_n(x) - F_m(x)) - (F_n(a) - F_m(a))| + |F_n(a) - F_m(a)| \\
&\le |f_n(c) - f_m(c)||x - a| + |F_n(a) - F_m(a)|\,.
\end{aligned}$$

V poslední nerovnosti je použita věta o střední hodnotě pro funkci $F_n - F_m$, c je potom vnitřní bod intervalu s koncovými body a, x.
Oba poslední členy budou od určitého k malé nezávisle na x.
Buď F limita posloupnosti $\{F_n\}$. Zbývá dokázat, že $F' = f$ na I:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \lim_n \frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} =$$

$$= \lim_n \lim_{h\to 0} \frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} = \lim_n f_n(x) = f(x)\,,$$

kde záměna obou limit vyplývá z předchozí věty. $\diamond$

DŮSLEDEK. **Nechť $\sum f_n$ je řada funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f. Jsou-li F_n primitivní funkce k f_n na I takové, že řada $\sum F_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě x z I, pak $\sum F_n$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I.**

VĚTA. **Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I.**

1. **Jestliže $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f. Pak pro libovolný interval $[a,b] \subset I$ platí**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

2. **Jestliže $\sum f_n$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f. Pak pro libovolný interval $[a,b] \subset I$ platí**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \sum_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Stejnoměrná konvergence a derivace

VĚTA. **Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I, která konverguje alespoň v jednom bodě z I a $\{f_n'\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci g. Potom $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k nějaké funkci f a $f' = g$.**

Jde o přeformulování věty o integraci.

Příklad. **Porovnejte na $[0,1]$ konvergenci**

$$f_n(x) = x^n\ ,\quad g_n(x) = x^n - x^{n+1}\ ,\quad h_n(x) = x^n - x^{2n}\ .$$

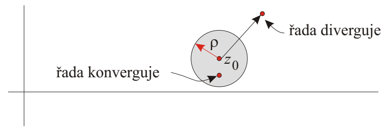
Příklad. **(Trik nx.) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(nx)$.**
Příklad. **(Trik x/n.) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(x/n)$.**
Příklad. **(Trik x^n.) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(x^n)$.**
Příklad. **(Trik $\sqrt[n]{x}$.) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(\sqrt[n]{x})$.**

MOCNINNÉ ŘADY

DEFINICE. **Mocninná řada je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $a_n, z_0, z \in \mathbb{R}^2$.**

Bod z_0 se nazývá střed konvergence mocninné řady.

VĚTA. **Pro každou mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existuje číslo $\rho \in [0,+\infty]$ takové, že řada konverguje na množině $\{z; |z-z_0| < \rho\}$ a diverguje na množině $\{z; |z-z_0| > \rho\}$.**
Platí $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$.



Číslo ρ z předchozí věty se nazývá poloměr konvergence dané mocninné řady.

DŮSLEDEK. Je-li $q \in (0, \rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, pak tato řada konverguje stejnoměrně a absolutně na množině $\{z; |z - z_0| \le q\}$.

DŮSLEDEK. Součtem mocninné řady je funkce spojitá na množině $\{z; |z - z_0| < \rho\}$, kde ρ je poloměr konvergence řady.

VĚTA. Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Potom na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ platí

1. **$f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je ρ.**
2. **$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k f a poloměr konvergence této řady je ρ.**

Z druhého tvrzení vyplývá, že pro $(a, b) \subset (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left((b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1}\right).$$

DŮSLEDEK. Nechť funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady. Pak f má derivace všech řádů na I.

DŮSLEDEK. Nechť funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Potom

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

jsou Taylorovy koeficienty funkce f v bodě x_0.

VĚTA. (Abel) Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Tato mocninná řada konverguje v bodě $x_0 + \rho$ (nebo $x_0 - \rho$) právě když tato mocninná řada konverguje na $[x_0, x_0 + \rho)$ (resp. na $(x_0 - \rho, x_0]$) stejnoměrně.

To nastane právě když konverguje $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$; tento součet se pak rovná $\lim\limits_{x \to x_0 + \rho-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. (Obdobně pro $-\rho$.)

Příklad. Pomocí mocninných řad sečtěte (tam, kde to jde)

$$\sum \frac{x^n}{n}.$$

Příklad. Pomocí mocninných řad sečtěte (tam, kde to jde)

$$\sum (n+1)x^n \ .$$

Příklad. **Najděte Taylorovu řadu** $\operatorname{arctg} x$ **pomocí rozvoje derivace.**

Příklad. **Najděte Taylorovu řadu** $\log(x+1)$ **pomocí rozvoje derivace. Pomocí Abelovy věty o limitě mocninných řad ukažte, že Taylorův rozvoj funkce** $\log(x+1)$ **je platný i pro** $x = 1$**.**

Příklad. **Sečtěte následující řadu**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}.$$

Řešení. **Nejprve si uvědomme, že podle Dirichlet-Abelova kriteria z řada konverguje.**

Budeme uvažovat řadu

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n+3},$$

pro $x \in (0,1)$.

Derivací této řady získáme řadu

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n,$$

kterou již snadno sečteme.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n = -1 + x^2 + \frac{1}{1+x^2}$$

Pro primitivní funkce tedy platí rovnost

$$S(x) = -x + \frac{1}{3}x^3 + \arctan x.$$

Podle Abelovy věty je hledaný součet roven limitě

$$\lim_{x \to 1-} S(x) = -1 + 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Příklad. **Spočtěte s přesností** 10^{-3} **následující integrál**

$$\int_0^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení. **Protože neznáme primitivní funkci k** e^{-x^2}**, využijeme teorie mocninných řad.**

$$\int_0^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \, \mathrm{d}x.$$

Jelikož řada vystupující v argumentu integrálu konverguje stejnoměrně v intervalu $[0,1]$**, můžeme zaměnit sumu a integrál:**

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

Protože například

$$\sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} \le \sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2^{-10} < 10^{-3},$$

dostáváme výsledek

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \doteq \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$