STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

Zatím nebylo v těchto textech věnováno příliš pozornosti konvergenci funkcí, ať jako limita posloupnosti nebo součet řady.

Jinak byla konvergence posloupnosti funkcí nebo řady brána jako bodová konvergence.

To je samozřejmě základní pojem konvergence, ale v mnoha případech je příliš obecný a nestačí na dokazování některých užitečných tvrzení.

POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

Před uvedením různých konvergencí posloupností nebo řad funkcí je vhodné rozvést některé základní pojmy definované dříve.

Není nutné se soustředit jen na funkce jedné proměnné a ani na reálné funkce.

Ale ani není nutné probírat téma v úplně obecnosti.

Zobrazení f z Euklidovského prostoru do Euklidovského prostoru dimenze m je m-tice $(f_1, ..., f_m)$ funkcí více proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Protože základní vlastnosti funkce f jsou určeny vlastnostmi funkcí f_i a konvergence v $\mathbb{R}^m$ je konvergence po souřadnicích, stačí probírat případy *reálných funkcí více proměnných* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a omezit se na $n \le 2$.

Nicméně, vzhledem k zjednodušení zápisu budou některé pojmy zavedeny nebo probírány obecněji.

DEFINICE. Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje bodově na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, tj.

$$\forall \varepsilon \forall x \in M \, \exists k \in \mathbb{N} \, \forall n \ge k \; \left(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right).$$

Obvyklé značení je $\lim f_n = f$ nebo $f_n \to f$.

Bodový součet řady zobrazení se může definovat jako bodová limita posloupnosti částečných součtů řady, nebo rovností $\left(\sum f_n\right)(x) = \sum f_n(x)$ (ukažte, že se dostane tentýž pojem).

Jak je obvyklé z teorie řad čísel, i řady funkcí nebo jejich součet se značí $\sum f_n$.

VĚTA. Pro bodovou konvergenci na množině M platí:

1. $\lim_n (f_n + g_n) = \lim_n f_n + \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.
2. $\lim_n (f_n g_n) = \lim_n f_n \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.
3. $\lim_n (f_n / g_n) = \lim_n f_n / \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.

DŮSLEDEK. $\sum_n (af_n + bg_n) = a \sum_n f_n + b \sum_n g_n$, má-li pravá strana smysl, kde a, b jsou reálná čísla.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

Bodová limita posloupnosti spojitých funkcí nemusí být spojitá (například x^n) a jsou i další vlastnosti, které bodová konvergence nemá.

Je proto vhodné přidat nějakou další podmínku na konvergenci, aby se vyloučily ony špatné situace.

Takovou jednoduchou podmínkou je stejnoměrnost konvergence:

DEFINICE. Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall n \geq k\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Obvyklé značení je $f_n \rightrightarrows f$.

DEFINICE. Řada funkcí $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f, jestliže posloupnost částečných součtů $\{\sum_{i=1}^{n} f_i\}$ konverguje na M stejnoměrně k f.

POZOROVÁNÍ.

1. Konverguje-li posloupnost $\{f_n\}$ k f stejnoměrně na M, konverguje na M k f i bodově.
2. (Bolzanova–Cauchyova podmínka) Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k nějaké funkci právě když platí:
$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall m, n \geq k\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,.$$
3. Řada $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně právě když platí:
$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, |\sum_{n=k}^{\infty} f_n(x)| < \varepsilon\,.$$

Poslední podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řad lze též přepsat pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky:

$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall m > l > k\, \left(|\sum_{n=l}^{m} f_n(x)| < \varepsilon \right)\,.$$

VĚTA.

1. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f právě když platí
$$\lim_n \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0\,.$$
2. Jestliže $\sum f_n$ má na M majorantní stejnoměrně konvergentní řadu (tj., existuje stejnoměrně konvergentní řada $\sum g_n$ na M taková, že $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ pro každé n a každé $x \in M$), pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.
3. Nechť $|f_n(x)| \leq c_n$ pro každé $x \in M$ a $\sum c_n$ konverguje. Pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.

Poslední podmínka pro stejnoměrnou konvergenci se často nazývá *Weierstrassovo kritérium*.

V kapitole o číselných řadách byly, kromě kritérií pro absolutní konvergenci, dvě další kritéria pro konvergenci, a to Dirichletovo a Abelovo (Leibnizovo kritérium je speciální případ Dirichletova kritéria).

VĚTA. Nechť $\{f_n\}, \{g_n\}$ jsou dvě posloupnosti funkcí na intervalu I. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ konverguje na I stejnoměrně, jestliže $\{f_n\}$ je monotónní a buď

(a) f_n konverguje stejnoměrně k 0, $\{g_n\}$ má stejně omezené částečné součty (**Dirichlet**)

nebo

(b) $\{f_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na I (**Abel**),

DŮSLEDEK. (**Leibniz**) Nechť $\{f_n\}, \{g_n\}$ je posloupnost nezáporných funkcí na intervalu I. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ konverguje na I stejnoměrně, pokud $\{f_n\}$ je monotónní a f_n konverguje stejnoměrně k 0 na I.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

VLASTNOSTI STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE

Přestože lze následující tvrzení o spojitosti a limitách dokázat i pro funkce více proměnných, pro jednoduchost budou v této části uvažovány funkce jedné proměnné, tj. definiční obor M bude podmnožinou reálných čísel.

Spojitost

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost (stejnoměrně) spojitých funkcí na M, která na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Potom je f (stejnoměrně) spojitá funkce na M.

DŮSLEDEK. Nechť řada $\sum f_n$ (stejnoměrně) spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Potom je f (stejnoměrně) spojitá na M.

Existuje situace, kdy lze předchozí větu obrátit.

Monotónní posloupnost funkcí f_n je buď nerostoucí nebo neklesající posloupnost, tj, např. v prvním případě, pro každé x z definičního oboru funkcí f_n je $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$.

VĚTA. (**Dini**) Nechť posloupnost spojitých funkcí konverguje monotónně ke spojité funkci na kompaktní množině. Pak je tato konvergence stejnoměrná.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Stejnoměrná konvergence a limity

Pokud $f_n \to f$ a $\lim_{x\to a} f_n(x) = p_n$, nastává otázka, zda $\lim_n p_n = \lim_{x\to a} f(x)$, tj., zda lze přehodit limity

$$\lim_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_n f_n(x) .$$

Jak ukazuje příklad $f_n(x) = x^n$ na $[0, 1]$ a $a = 1$, pro bodovou konvergenci tato záměna limit platit nemusí.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na M, která na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Pro libovolný hromadný bod a množiny M platí

$$\lim_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_n f_n(x) ,$$

existuje-li pravá strana.

DŮSLEDEK. Nechť řada $\sum f_n$ spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně. Potom pro libovolný bod $a \in I$ je
$$\sum_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_n f_n(x)\,,$$
existuje-li jedna strana.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Stejnoměrná konvergence a integrál

Opět se dají najít jednoduché příklady, že nelze přehodit limitu a integraci u bodové konvergence.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f. Je-li $\{F_n\}$ posloupnost primitivních funkcí k f_n na I, která konverguje alespoň v jednom bodě z I, pak $\{F_n\}$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I.

DŮSLEDEK. Nechť $\sum f_n$ je řada funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f. Jsou-li F_n primitivní funkce k f_n na I takové, že řada $\sum F_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě x z I, pak $\sum F_n$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I.

Předchozí větu a její důsledek lze použít pro určité integrály:

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I.

1. Jestliže $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f. Pak pro libovolný interval $[a,b] \subset I$ platí
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
2. Jestliže $\sum f_n$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f. Pak pro libovolný interval $[a,b] \subset I$ platí
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Stejnoměrná konvergence a derivace

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I, která konverguje alespoň v jednom bodě z I a $\{f_n'\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci g. Potom $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k nějaké funkci f a $f' = g$.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

MOCNINNÉ ŘADY

Speciální případ řad funkcí, tzv. mocninné řady, se probíral v kapitole o Taylorových řadách funkcí.

Některé podrobnosti o mocninných řadách budou nyní uvedeny, další budou probrány v kapitolách o komplexních funkcích.

Na rozdíl od probíraných Taylorových řad se obecné mocninné řady budou definovat v rovině (tj., pro komplexní čísla).

DEFINICE. Mocninná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $a_n, z_0, z \in \mathbb{R}^2$.

Bod z_0 se nazývá střed konvergence mocninné řady.

VĚTA. Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existuje číslo $\rho \in [0,+\infty]$ takové, že řada konverguje na množině $\{z; |z-z_0| < \rho\}$ a diverguje na množině $\{z; |z-z_0| > \rho\}$.

Platí $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$.

Číslo ρ z předchozí věty se nazývá poloměr konvergence dané mocninné řady.

Z důkazu věty vyplývá následující tvrzení:

DŮSLEDEK. Je-li $q \in (0,\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, pak tato řada konverguje stejnoměrně a absolutně na množině $\{z; |z-z_0| \le q\}$.

DŮSLEDEK. Součtem mocninné řady je funkce spojitá na množině $\{z; |z-z_0| < \rho\}$, kde ρ je poloměr konvergence řady.

Protože mocninná řada konverguje stejnoměrně na uzavřených kruzích uvnitř kruhu konvergence, lze použít předchozí věty o integraci a derivaci řad.

VĚTA. Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Potom na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ platí

1. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je ρ.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k f a poloměr konvergence této řady je ρ.

Z druhého tvrzení vyplývá, že pro $(a,b) \subset (x_0-\rho, x_0+\rho)$ je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left((b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}\right).$$

DŮSLEDEK. Nechť funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady. Pak f má derivace všech řádů na I.

DŮSLEDEK. Nechť funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

jsou Taylorovy koeficienty funkce f v bodě x_0.

VĚTA. (**Abel**) Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Tato mocninná řada konverguje v bodě $x_0+\rho$ (nebo $x_0-\rho$) právě když tato mocninná řada konverguje na $[x_0, x_0+\rho)$ (resp. na $(x_0-\rho, x_0]$) stejnoměrně.

To nastane právě když konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n$; tento součet se pak rovná $\lim_{x\to x_0+\rho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. (Obdobně pro $-\rho$.)

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6

Cvičení 6

STANDARDY z kapitoly

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

Zobrazení f z Euklidovského prostoru do Euklidovského prostoru dimenze m je m-tice $(f_1, ..., f_m)$ funkcí více proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Protože základní vlastnosti funkce f jsou určeny vlastnostmi funkcí f_i a konvergence v $\mathbb{R}^m$ je konvergence po souřadnicích, stačí probírat případy *reálných funkcí více proměnných* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a omezit se na $n \le 2$.

DEFINICE. Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje bodově na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, tj.

$$\forall \varepsilon \forall x \in M \, \exists k \in \mathbb{N} \, \forall n \ge k \; (\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \,)\,.$$

Obvyklé značení je $\lim f_n = f$ nebo $f_n \to f$.

Bodový součet řady zobrazení se může definovat jako bodová limita posloupnosti částečných součtů řady, nebo rovností $\left(\sum f_n\right)(x) = \sum f_n(x)$ (ukažte, že se dostane tentýž pojem).

Jak je obvyklé z teorie řad čísel, i řady funkcí nebo jejich součet se značí $\sum f_n$.

Bodová limita spojitých funkcí $f_n(x) = x^n$ na intervalu $[0, 1]$ není spojitá.

Bodovým limitám spojitých funkcí se říká funkce 1. Baireovy třídy. Funkce spojité jsou formálně 0.třídy.

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

DEFINICE. Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \, \exists k \in \mathbb{N} \, \forall x \in M \, \forall n \ge k \, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Obvyklé značení je $f_n \rightrightarrows f$.

DEFINICE. Řada funkcí $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f, jestliže posloupnost částečných součtů $\{\sum_{i=1}^{n} f_i\}$ konverguje na M stejnoměrně k f.

POZOROVÁNÍ.

1. Konverguje-li posloupnost $\{f_n\}$ k f stejnoměrně na M, konverguje na M k f i bodově.
2. (Bolzanova–Cauchyova podmínka) Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k nějaké funkci právě když platí:
$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall m, n \geq k\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,.$$
3. Řada $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně právě když platí:
$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, |\sum_{n=k}^{\infty} f_n(x)| < \varepsilon\,.$$

Poslední podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řad lze též přepsat pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky:
$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall m > l > k \ \left(|\sum_{n=l}^{m} f_n(x)| < \varepsilon \right)\,.$$

VĚTA.

1. (**σ_n podmínka**.) Označme
$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|\,.$$
Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f právě když platí
$$\lim_n \sigma_n = 0\,.$$
2. (**Majoranta**.) Jestliže $\sum f_n$ má na M majorantní stejnoměrně konvergentní řadu (tj., existuje stejnoměrně konvergentní řada $\sum g_n$ na M taková, že $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ pro každé n a každé $x \in M$), pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.
3. (**Weierstrass**. **M-test**.) Nechť $|f_n(x)| \leq c_n$ pro každé $x \in M$ a $\sum c_n$ konverguje. Pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}, \{g_n\}$ jsou dvě posloupnosti funkcí na intervalu I. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ konverguje na I stejnoměrně, jestliže $\{f_n\}$ je monotónní a buď

(a) f_n konverguje stejnoměrně k 0, $\{g_n\}$ má stejně omezené částečné součty (**Dirichlet**)

nebo

(b) $\{f_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na I (**Abel**),

DŮSLEDEK. (**Leibniz**) Nechť $\{f_n\}, \{g_n\}$ je posloupnost nezáporných funkcí na intervalu I. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ konverguje na I stejnoměrně, pokud $\{f_n\}$ je monotónní a f_n konverguje stejnoměrně k 0 na I.

VLASTNOSTI STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE

Spojitost

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost (stejnoměrně) spojitých funkcí na M, která na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Potom je f (stejnoměrně) spojitá funkce na M.

DŮSLEDEK. Nechť řada $\sum f_n$ (stejnoměrně) spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Potom je f (stejnoměrně) spojitá na M.

Pro monotónní funkce lze větu obrátit.

Monotónní posloupnost funkcí f_n je buď nerostoucí nebo neklesající posloupnost, tj, např. v prvním případě, pro každé x z definičního oboru funkcí f_n je $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$.

VĚTA. (**Dini**) Nechť posloupnost spojitých funkcí konverguje monotónně ke spojité funkci na kompaktní množině. Pak je tato konvergence stejnoměrná.

Stejnoměrná konvergence a limity

Pokud $f_n \to f$ a $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = p_n$, nastává otázka, zda $\lim_n p_n = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, tj., zda lze přehodit limity

$$\lim_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_n f_n(x)\,.$$

Jak ukazuje příklad $f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$ a $a = 1$, pro bodovou konvergenci tato záměna limit platit nemusí.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na M, která na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Pro libovolný hromadný bod a množiny M platí

$$\lim_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_n f_n(x)\,,$$

existuje-li pravá strana.

DŮSLEDEK. Nechť řada $\sum f_n$ spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně. Potom pro libovolný bod $a \in I$ je

$$\sum_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_n f_n(x)\,,$$

existuje-li jedna strana.

Stejnoměrná konvergence a integrál

Opět se dají najít jednoduché příklady, že nelze přehodit limitu a integraci u bodové konvergence.

Například $f_n(x) = (n+1)x^n$ na $[0,1)$.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f. Je-li $\{F_n\}$ posloupnost primitivních funkcí k f_n na I, která konverguje alespoň v jednom bodě z I, pak $\{F_n\}$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I.

DŮSLEDEK. Nechť $\sum f_n$ je řada funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f. Jsou-li F_n primitivní funkce k f_n na I takové, že řada $\sum F_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě x z I, pak $\sum F_n$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I.

1. Jestliže $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f. Pak pro libovolný interval $[a,b] \subset I$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

2. Jestliže $\sum f_n$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f. Pak pro libovolný interval $[a,b] \subset I$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \sum_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Stejnoměrná konvergence a derivace

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I, která konverguje alespoň v jednom bodě z I a $\{f'_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci g. Potom $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k nějaké funkci f a $f' = g$.

Příklad. Porovnejte na $[0,1]$ konvergenci

$$f_n(x) = x^n \ , \ \ g_n(x) = x^n - x^{n+1} \ , \ \ h_n(x) = x^n - x^{2n} \ .$$

Příklad. (Trik nx.) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(nx)$.
Příklad. (Trik x/n.) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(x/n)$.
Příklad. (Trik x^n.) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(x^n)$.
Příklad. (Trik $\sqrt[n]{x}$.) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(\sqrt[n]{x})$.

MOCNINNÉ ŘADY

DEFINICE. Mocninná řada je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $a_n, z_0, z \in \mathbb{R}^2$.

Bod z_0 se nazývá střed konvergence mocninné řady.

VĚTA. Pro každou mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existuje číslo $\rho \in [0,+\infty]$ takové, že řada konverguje na množině $\{z; |z-z_0| < \rho\}$ a diverguje na množině $\{z; |z-z_0| > \rho\}$.

Platí $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$.

Číslo ρ z předchozí věty se nazývá poloměr konvergence dané mocninné řady.

DŮSLEDEK. Je-li $q \in (0,\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, pak tato řada konverguje stejnoměrně a absolutně na množině $\{z; |z-z_0| \le q\}$.

DŮSLEDEK. Součtem mocninné řady je funkce spojitá na množině $\{z; |z-z_0| < \rho\}$, kde ρ je poloměr konvergence řady.

VĚTA. Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Potom na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ platí

1. $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je ρ.
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k f a poloměr konvergence této řady je ρ.

Z druhého tvrzení vyplývá, že pro $(a,b) \subset (x_0-\rho, x_0+\rho)$ je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}((b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}) \ .$$

DŮSLEDEK. Nechť funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady. Pak f má derivace všech řádů na I.

DŮSLEDEK. Nechť funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

jsou Taylorovy koeficienty funkce f v bodě x_0.

VĚTA. (**Abel**) Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Tato mocninná řada konverguje v bodě $x_0+\rho$ (nebo $x_0-\rho$) právě když tato mocninná řada konverguje na $[x_0, x_0+\rho)$ (resp. na $(x_0-\rho, x_0]$) stejnoměrně.

To nastane právě když konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n$; tento součet se pak rovná $\lim_{x\to x_0+\rho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. (Obdobně pro $-\rho$.)

Příklad. Pomocí mocninných řad sečtěte (tam, kde to jde)

$$\sum \frac{x^n}{n} \, .$$

Příklad. Pomocí mocninných řad sečtěte (tam, kde to jde)

$$\sum (n+1)x^n \, .$$

Příklad. Najděte Taylorovu řadu $\operatorname{arctg} x$ pomocí rozvoje derivace.

Příklad. Najděte Taylorovu řadu $\log(x+1)$ pomocí rozvoje derivace. Pomocí Abelovy věty o limitě mocninných řad ukažte, že Taylorův rozvoj funkce $\log(x+1)$ je platný i pro $x=1$.

Příklad. Sečtěte následující řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}.$$

Řešení. Nejprve si uvědomme, že podle Dirichlet-Abelova kriteria z řada konverguje.

Budeme uvažovat řadu

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n+3},$$

pro $x \in (0,1)$.

Derivací této řady získáme řadu

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n,$$

kterou již snadno sečteme.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n = -1 + x^2 + \frac{1}{1+x^2}$$

Pro primitivní funkce tedy platí rovnost

$$S(x) = -x + \frac{1}{3}x^3 + \arctan x.$$

Podle Abelovy věty je hledaný součet roven limitě

$$\lim_{x\to 1-} S(x) = -1 + 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Příklad. Spočtěte s přesností 10^{-3} následující integrál

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Protože neznáme primitivní funkci k e^{-x^2}, využijeme teorie mocninných řad.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

Protože například

$$\sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} \leq \sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2^{-10} < 10^{-3},$$

dostáváme výsledek

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \doteq \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$