INTEGRÁLY S PARAMETREM

V kapitole o integraci funkcí více proměnných byla potřeba spojitost funkce $g(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ proměnné x.

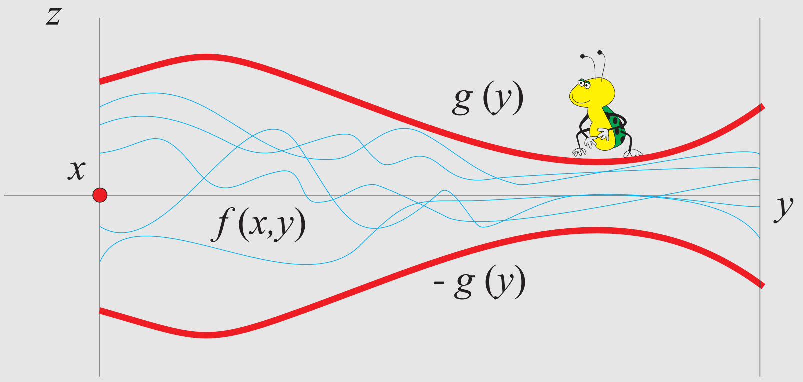
Spojitost funkce $g(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ proměnné x znamená vlastně prohození limity a integrálu

$$\lim_{x\to p} \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \lim_{x\to p} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrálu na levé straně se říká integrál s parametrem x a výsledkem jeho integrace je funkce proměnné x.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na součinu $M \times I$, kde $M \subset \mathbb{R}$ a I je interval v $\mathbb{R}$. Funkce $g(y)$ se nazývá integrovatelná majoranta funkce f, jestliže

- $|f(x,y)| \le g(y)$ pro všechna $x \in M, y \in I$;
- $\int_I g(y)\,\mathrm{d}y$ konverguje.



Podle dřívější úmluvy jsou uvedené integrály chápány jako zobecněný Newtonův integrál.

POZOROVÁNÍ. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I konvergující stejnoměrně. Pokud existuje libovolně velký index n pro který konverguje integrál $\int_I f_n$, potom má posloupnost $\{f_n\}$ integrovatelnou majorantu na I.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na intervalu I konvergující bodově k funkci f. Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ má integrovatelnou majorantu na I, pak

$$\lim \int_I f_n(x)\,\mathrm{dx} = \int_I f(x)\,\mathrm{dx}\,,$$

pokud pravá strana existuje.

DŮSLEDEK.

1. Nechť f je spojitá funkce definovaná na intervalu $I \times J$ v rovině a $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ existuje pro každé $x \in I$. Má-li $f(x,y)$ integrovatelnou majorantu $g(y)$ na $I \times J$, pak funkce $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ je na I spojitá.
2. Nechť f je omezená spojitá funkce definovaná na omezeném intervalu $I \times J$ v rovině. Pak $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ je na I spojitá.

Protože derivace je definována pomocí limity, dá se uvedená věta použít i na výpočet derivací integrálu s parametrem. Výsledkem je tvrzení o záměně derivace a integrálu.

VĚTA. Nechť f je spojitá funkce definovaná na intervalu $I \times J$ v rovině a $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ existuje pro každé $x \in I$. Má-li $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ integrovatelnou majorantu $g(y)$ na $I \times J$, pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \int_J f(x,y)\,\mathrm{dy} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{dy}$$

na I.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Cvičení 1

LEKCE26-IPA
integrál s parametrem
integr.majoranta
spojitost
derivace
inetgrál
Gama funkce
derivace
průběh
graf
Beta funkce
vztah Beta a Gama
$\Gamma(x)\Gamma(1-x)$
Stirlingův vzorec
STANDARDY
tahák
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

GAMA A BETA FUNKCE

Gama funkce

V této části bude zkoumána tzv. Gama funkce, která má vztah k $n!$ a její použití je velmi široké nejen v teoretické matematice, ale hlavně v praktickém použití, např. ve fyzice a ve statistice.

Funkce bude nyní definována pro reálná čísla, bude později rozšířena na komplexní čísla.

DEFINICE. Funkce Gama je definována rovností

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \, .$$

1. Definiční obor.

Na intervalu $(0,1)$ má e^{-t} hodnoty mezi e^{-1} a 1; funkce $e^{-t}t^{x-1}$ se tedy z hlediska konvergence integrálu chová jako t^{x-1} (tj., $t^{x-1}/3 < e^{-t}t^{x-1} < t^{x-1}$ pro každé $t \in (0,1)$. Integrál $\int_0^1 t^{x-1} \, \mathrm{d}t$ konverguje právě když $x > 0$.

Navíc se pro $x > a > 0$ získala integrovatelná majoranta t^{a-1} funkce $e^{-t}t^{x-1}$ na $(0,1)$.

Stačí se nyní omezit na $x > 1$. Pro dané $x > 1$ existuje $p > 0$ tak, že $e^{-t}t^{x-1} \le e^{-t/2}$ pro $t > p$ (ukažte to). Na $[1,p]$ je funkce $e^{-t}t^{x-1}$ proměnné t spojitá a omezená, takže $ke^{-t/2}$ je (pro nějakou konstantu k) integrovatelná majoranta funkce $e^{-t}t^{x-1}$ na $(1,\infty)$.

Definičním oborem funkce Γ *je interval* $(0,\infty)$*; na celém definičním intervalu je* $\Gamma(x) > 0$.

Spojitost a derivace. Parciální derivace podle x funkce $e^{-t}t^{x-1}$ je rovna $e^{-t}t^{x-1}\log t$.

Pro $x > 0$ se vezme $a \in (0,x)$ a parciální derivace se přepíše do tvaru $e^{-t}t^{a-1}(t^{x-a}\log t)$.

LEKCE26-IPA
integrál s parametrem
integr.majoranta
spojitost
derivace
inetgrál
Gama funkce
derivace
průběh
graf
Beta funkce
vztah Beta a Gama
$\Gamma(x)\Gamma(1-x)$
Stirlingův vzorec
STANDARDY
tahák
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poslední funkce v závorce je spojitá a omezená na $(0,1)$ a tedy funkce $e^{-t}t^{x-1}\log t$ má (až na vynásobení nějakou konstantou) stejnou integrovatelnou majorantu na $(0,\infty)$ jako funkce $e^{-t}t^{x-1}$.

Totéž platí pro parciální derivace vyšších řádů funkce $e^{-t}t^{x-1}$ podle x. Z věty o derivaci integrálu podle parametru nyní plyne:

Funkce Gama má derivace všech řádů a je tedy spojitá.

Protože $\Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log^2 t \; \mathrm{d}t$, je druhá derivace kladná a tudíž

funkce Gama je ryze konvexní.

Nyní se použije integrace po částech na $\Gamma(x+1)$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x \; \mathrm{d}t = [-e^{-t}t^x]_{t=0}^\infty + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} \; \mathrm{d}t\,.$$

První výraz na pravé straně se rovná 0 pro $x>0$. Výsledkem je rovnost

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{pro } x>0\,.$$

Snadno se vypočte $\Gamma(1)=1$, takže $\Gamma(2)=1, \Gamma(3)=2.1, \ldots$ a indukcí $\Gamma(n+1)=n!$.

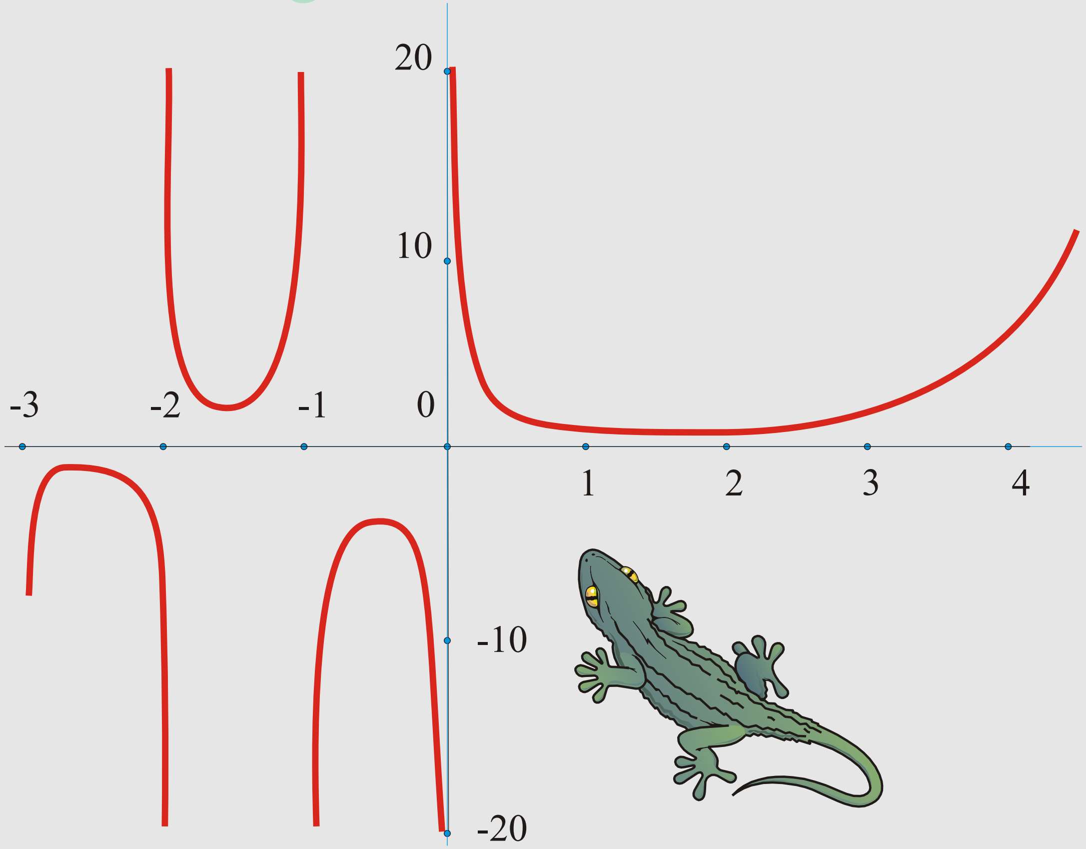
Z konvexity vyplývá, že *minimum funkce* Γ *leží v intervalu* $(1,2)$ a že $\lim\limits_{x\to\infty}\Gamma(x)=\infty$.

Dále je

$$\lim_{x\to 0_+}\Gamma(x) = \lim_{x\to 0_+}\frac{\Gamma(x+1)}{x} = \infty\,.$$

Pomocí vzorce $\Gamma(x)=\Gamma(x+1)/x$ lze dodefinovat funkci Γ na intervalu $(-1,0)$, potom na intervalu $(-2,-1)$, atd. až na $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,-3,\ldots\}$.

Agama a Gama



LEKCE26-IPA

integrál s parametrem
- integr.majoranta
- spojitost
- derivace
- inetgrál

Gama funkce
- derivace
- průběh
- graf

Beta funkce
- vztah Beta a Gama
- $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$

Stirlingův vzorec

STANDARDY

tahák

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Beta funkce

Beta funkce má úzký vztah ke Gama funkci a proto je stejně důležitá.

DEFINICE. Funkce Beta je definována rovností

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pomocí substituce $t = u/(u+1)$ se dá funkce Beta vyjádřit integrálem přes neomezený interval:

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}\,\mathrm{d}u\,,$$

z které ale není vidět symetrický charakter, totiž že $B(x,y) = B(y,x)$.

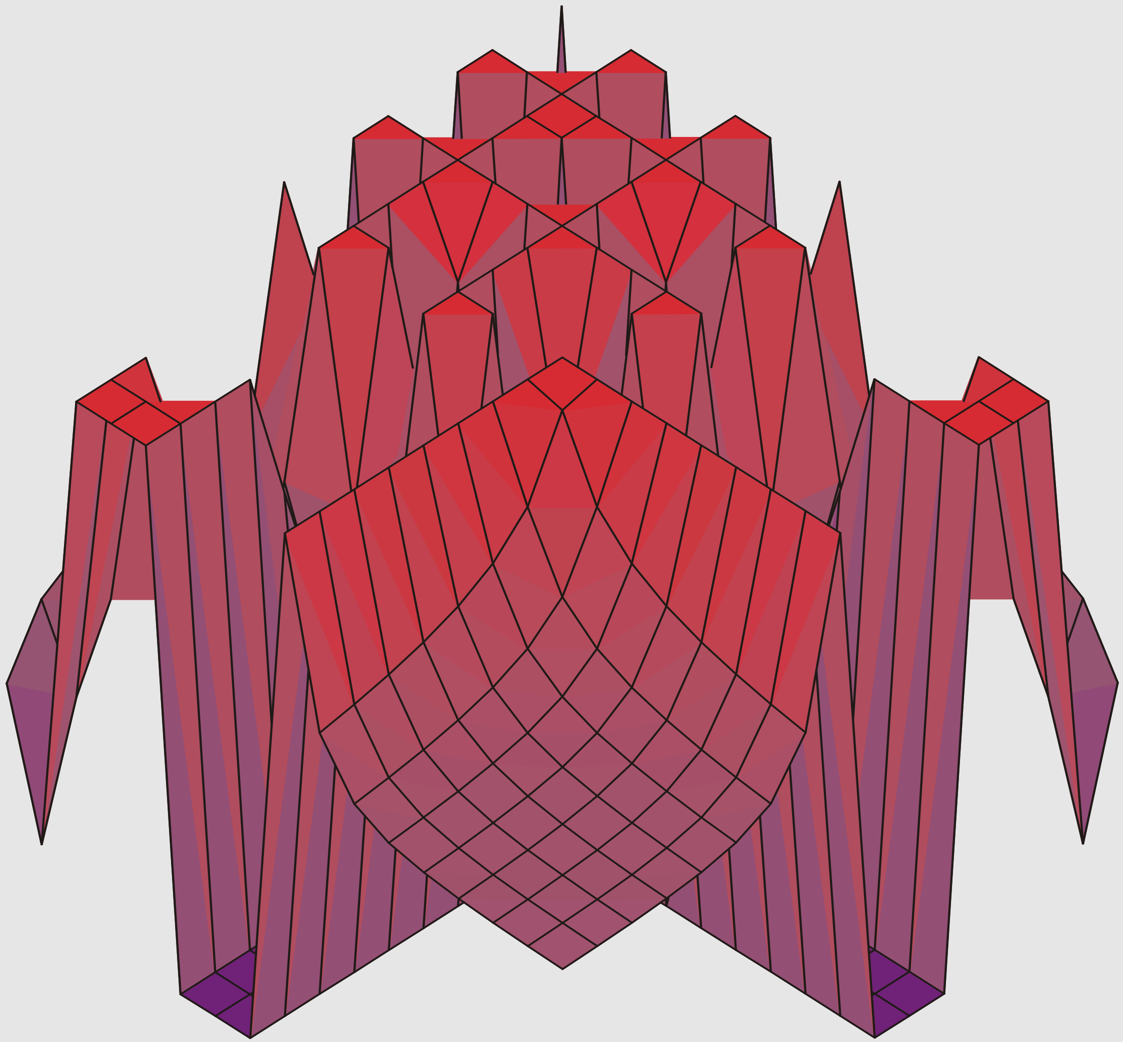
Snadno se zjistí, že $B(x,y)$ je definována v prvním kvadrantu, tj. pro $x > 0, y > 0$.

Napíše se součin $\Gamma(x)\Gamma(y)$ a do vzniklého dvojrozměrného integrálu se dá substituce $v = t+u, w = y/(x+y)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-u}t^{x-1}u^{y-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty ve^{-v}(vw)^{x-1}v^{y-1}(1-w)^{y-1}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-v}v^{x+y-1}(w)^{x-1}(1-w)^{y-1}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \Gamma(x+y)B(x,y)\,.
\end{aligned}$$

Odtud plyne hledaný vzorec

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$



Jestliže se v předchozím vzorci dá $y = 1 - x$ pro $x \in (0, 1)$, dostane se po substitucích

$u = (1-t)^{-1}$ do prvního integrálu a $v = u^(-1)$ do předposledního integrálu

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1-t)^x}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^1 \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u + \int_1^\infty \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \frac{v^{-x}}{1+v}\,\mathrm{d}v\,.$$

Zlomek $\frac{1}{1+u}$ je součet geometrické řady s kvocientem $-u$, která se dá integrovat člen po členu (řada konverguje stejnoměrně na $[0,1]$ podle Abelovy věty):

$$\int_0^1 \Big(\frac{u^{x-1}}{1+u} + \frac{u^{-x}}{1+u}\Big)\,\mathrm{d}u \int_0^1 \left(u^{x-1} + u^{-x}\right) \sum_0^\infty (-1)^n u^n\,\mathrm{d}u =$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n \int_0^1 \left(u^{n+x-1} + u^{n-x}\right)\,\mathrm{d}u \sum_0^\infty (-1)^n \Big(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n-x+1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^\infty \frac{2x}{n^2-x^2}\,.$$

Poslední řada bude sečtena v kapitole o Fourierových řadách (rozvoj funkce $\cos(xt)$ pro $t \in (-\pi,\pi)$) a dostane se důležitý vzorec

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \text{pro } x \in (0,1)\,.$$

Stirlingův vzorec

Gama i Beta funkce lze vyjádřit mnoha způsoby, např. jako součet nekonečné řady, součin nekonečné posloupnosti, limity posloupností, ...

Všechna tato přesná vyjádření jsou nekonečné procesy, které se až na výjimky nedají přesně v jednotlivých bodech spočítat.

Proto je někdy výhodnější nahradit uvedené charakterizace jednodušším vzorcem, který aproximuje danou funkci.

Následující postup můžete sami sledovat (až na poslední krok):

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^x \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{x\log t - t}\,\mathrm{d}t \overset{u=t-x}{=} \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-x}^\infty e^{x\log(1+u/x)-u/x}\,\mathrm{d}u \\ &\overset{v=u/\sqrt{x}}{=} \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{x\log(1+v/\sqrt{x})-v/\sqrt{x}}\,\mathrm{d}v \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x,\end{aligned}$$

kde v posledním kroku byla použita rovnost $\lim\limits_{x\to\infty} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{x\log(1+v/\sqrt{x})-v/\sqrt{x}}\,\mathrm{d}v = \sqrt{2\pi}$.

Vztah $f(x) \approx g(x)$ tedy znamená, že $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.

Tím se dostává aproximační Stirlingův vzorec

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

a jeho verze pro faktoriál

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Poznámky 2 Příklady 2 Cvičení 2

STANDARDY z kapitoly

INTEGRÁLY S PARAMETREM

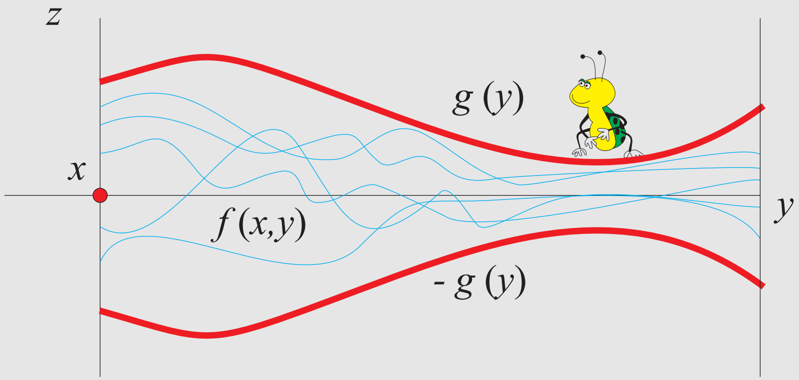
Spojitost funkce $g(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ proměnné x znamená vlastně prohození limity a integrálu

$$\lim_{x\to p} \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \lim_{x\to p} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrálu na levé straně se říká integrál s parametrem x a výsledkem jeho integrace je funkce proměnné x.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na součinu $M \times I$, kde $M \subset \mathbb{R}$ a I je interval v $\mathbb{R}$. Funkce $g(y)$ se nazývá integrovatelná majoranta funkce f, jestliže

- $|f(x,y)| \leq g(y)$ pro všechna $x \in M, y \in I$;
- $\int_I g(y)\,\mathrm{d}y$ konverguje.



POZOROVÁNÍ. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I konvergující stejnoměrně. Pokud existuje libovolně velký index n pro který konverguje integrál $\int_I f_n$, potom má posloupnost $\{f_n\}$ integrovatelnou majorantu na I.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na intervalu I konvergující bodově k funkci f. Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ má integrovatelnou majorantu na I, pak

$$\lim \int_I f_n(x)\,\mathrm{dx} = \int_I f(x)\,\mathrm{dx}\,,$$

pokud pravá strana existuje.

DŮSLEDEK.

1. Nechť f je spojitá funkce definovaná na intervalu $I \times J$ v rovině a $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ existuje pro každé $x \in I$. Má-li $f(x,y)$ integrovatelnou majorantu $g(y)$ na $I \times J$, pak funkce $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ je na I spojitá.

2. Nechť f je omezená spojitá funkce definovaná na omezeném intervalu $I \times J$ v rovině. Pak $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ je na I spojitá.

Protože derivace je definována pomocí limity, dá se uvedená věta použít i na výpočet derivací integrálu s parametrem. Výsledkem je tvrzení o záměně derivace a integrálu.

VĚTA. Nechť f je spojitá funkce definovaná na intervalu $I \times J$ v rovině a $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ existuje pro každé $x \in I$. Má-li $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ integrovatelnou majorantu $g(y)$ na $I \times J$, pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \int_J f(x,y)\,\mathrm{dy} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{dy}$$

na I.

Příklad. Použitím věty o záměně limity a integrálu ukažte, že

$$\lim_n \int_0^1 x^n\,\mathrm{dx} = 0\,, \lim_n \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{dx} = 0$$

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{dx} = 1\,, \lim_{x\to\infty} \int_0^\infty e^{-xy}\sin y\,\mathrm{dy} = 0\,.$$

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x$$

pro $a, b > 0$.

Řešení. Využijeme tvaru integrované funkce

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\log x}\right]_a^b \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y.$$

Potom již snadno dostáváme

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \log\frac{1+b}{1+a}.$$

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}\,\mathrm{d}x$$

pro $a, b > 0$.

Řešení. Derivujeme podle parametru a, majorantu $\frac{1}{1+p^2x^2}$ najdeme pro $a \in [p, \infty)$ pro $p > 0$. Po integrování hledáme integrační konstantu $C(b)$, použijeme $a = b$ a dostaneme výsledek

$$\frac{\pi}{2}\log\frac{a}{b}\,.$$

GAMA A BETA FUNKCE

Gama funkce

DEFINICE. Funkce Gama je definována rovností

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t\,.$$

1. Definiční obor.

Na intervalu $(0,1)$ má e^{-t} hodnoty mezi e^{-1} a 1; funkce $e^{-t}t^{x-1}$ se tedy z hlediska konvergence integrálu chová jako t^{x-1} (tj., $t^{x-1}/3 < e^{-t}t^{x-1} < t^{x-1}$ pro každé $t \in (0,1)$. Integrál $\int_0^1 t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ konverguje právě když $x > 0$.

Navíc se pro $x > a > 0$ získala integrovatelná majoranta t^{a-1} funkce $e^{-t}t^{x-1}$ na $(0,1)$.

Stačí se nyní omezit na $x > 1$. Pro dané $x > 1$ existuje $p > 0$ tak, že $e^{-t}t^{x-1} \le e^{-t/2}$ pro $t > p$ (ukažte to). Na $[1,p]$ je funkce $e^{-t}t^{x-1}$ proměnné t spojitá a omezená, takže $ke^{-t/2}$ je (pro nějakou konstantu k) integrovatelná majoranta funkce $e^{-t}t^{x-1}$ na $(1,\infty)$.

Definičním oborem funkce Γ *je interval* $(0,\infty)$*; na celém definičním intervalu je* $\Gamma(x) > 0$.

Funkce Gama má derivace všech řádů a je tedy spojitá.

Protože $\Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log^2 t\, \mathrm{d}t$, je druhá derivace kladná a tudíž *funkce Gama je ryze konvexní.*

Nyní se použije integrace po částech na $\Gamma(x+1)$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x\, \mathrm{d}t = [-e^{-t}t^x]_{t=0}^\infty + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\, \mathrm{d}t\,.$$

První výraz na pravé straně se rovná 0 pro $x > 0$. Výsledkem je rovnost

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{pro } x > 0\,.$$

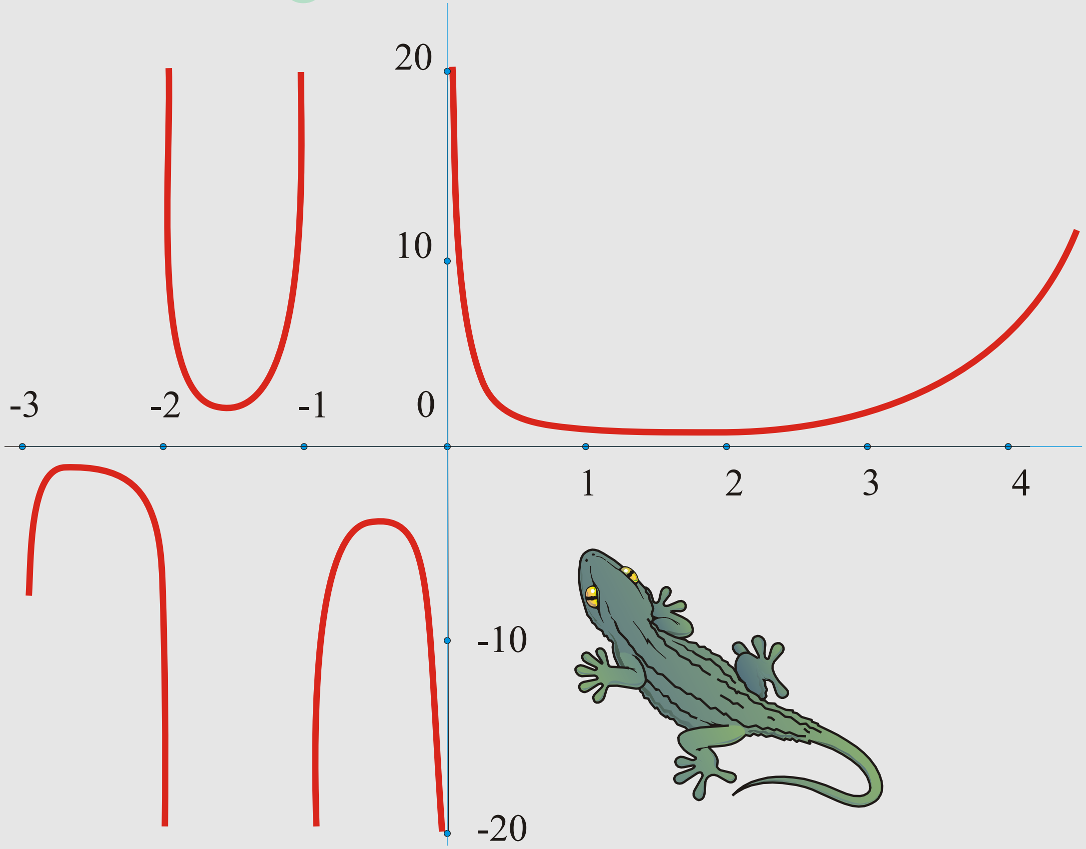
Snadno se vypočte $\Gamma(1) = 1$, takže $\Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2.1, \ldots$ a indukcí $\Gamma(n+1) = n!$.

Z konvexity vyplývá, že *minimum funkce* Γ *leží v intervalu* $(1,2)$ a že $\lim_{x\to\infty} \Gamma(x) = \infty$. Dále je

$$\lim_{x\to 0_+} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \infty\,.$$

Pomocí vzorce $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$ lze dodefinovat funkci Γ na intervalu $(-1,0)$, potom na intervalu $(-2,-1)$, atd. až na $\mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,-3,\ldots\}$.

Agama a Gama



LEKCE26-IPA
integrál s parametrem
integr.majoranta
spojitost
derivace
inetgrál
Gama funkce
derivace
průběh
graf
Beta funkce
vztah Beta a Gama
$\Gamma(x)\Gamma(1-x)$
Stirlingův vzorec
STANDARDY
tahák
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Beta funkce

DEFINICE. Funkce Beta je definována rovností

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Snadno se zjistí, že $B(x,y)$ je definována v prvním kvadrantu, tj. pro $x>0, y>0$.

Pomocí substituce $t=u/(u+1)$ se dá funkce Beta vyjádřit integrálem přes neomezený interval:

$$B(x,y)=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}\,\mathrm{d}u\,,$$

z které ale není vidět symetrický charakter, totiž že $B(x,y)=B(y,x)$.

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

Užitečný vzorec

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \text{pro } x\in(0,1)\,.$$

Stirlingův vzorec

Vztah $f(x) \approx g(x)$ znamená, že $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.

Platí aproximační Stirlingův vzorec

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

a jeho verze pro faktoriál

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Pro přesnější vyjádření Gama funkce (nebo faktoriálu) existují modifikace Stirlingova vzorce. Platí např. rovnosti

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{a_x}{12x}} = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + \frac{b_x}{6x}\right),$$

kde $0 < a_x < 1, 0 < b_x < 1$.

Příklad. Pomocí vzorce pro $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ spočtěte $\Gamma(1/2)$ a odtud $\Gamma(3/2), \Gamma(5/2)$ a také integrál $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$.

Příklad. Pomocí substituce $u = e^{-t}$ v integrálu definujícím $\Gamma(x)$ ukažte, že

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\log\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{x-1} \mathrm{d}u \,.$$

Příklad. Pomocí Stirlingova vzorce spočtěte

$$\lim \sqrt[n^2]{n!} \,.$$

Řešení.

$$\lim \sqrt[n^2]{n!} = \lim \left(\sqrt{2n\pi}\frac{n^n}{e^n}e^{\frac{a_n}{12n}}\right)^{\frac{1}{n^2}} = 1\,.$$

Příklad. Odhadněte pomocí Stirlingova vzorce, jakého řádu je 100!.

Řešení. Vyjde 158.

Příklad. Vypočítejme integrál

$$\int_0^1 x^4 e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Jde o $\Gamma(5) = 4! = 24$.

Příklad. Vypočítejme integrál

$$\int_0^\infty x^3 e^{-2x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Substituce $y = 2x$ převede na funkci Γ.

Příklad. Vypočítejme

$$\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)}\,.$$

Řešení. Použijeme $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, takže v čitateli máme $\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$.

Příklad. Pomocí vzorečku

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \qquad \text{pro } x \in (0,1)$$

spočtěte $\Gamma(1/2)$.

Řešení. Zvolíme $x = 1/2$ a dostaneme $\sqrt{\pi}$.

Příklad. Spočtěte

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

substitucí $x = z^2$.

Řešení. Objeví se známý integrál

$$\int_0^\infty e^{-z^2} \, \mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

a spočteme výsledek $\sqrt{\pi}$.

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^3} \, \mathrm{d}x$$

substitucí $y = x^3$.

Řešení. Objeví se známá $\Gamma(1/2)$ a výsledek $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$.

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\log x}} \, \mathrm{d}x$$

substitucí $-\log x = t$.

Řešení. Objeví se známá $\Gamma(1/2)$.

Příklad. Vypočítejme integrál

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}\,\mathrm{d}x\ .$$

Řešení. Zase to převedeme na Γ. Začneme samozřejmě exponentem u e, aby se dostalo e^{-y}.

Příklad. Spočtěte

$$\int_a^\infty e^{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x$$

vyjádřením exponentu ve tvaru

$$2ax - x^2 = -(x-a)^2 + a^2$$

a převedením na známé integrály.

Příklad. Vyjádřete integrál

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t\,\mathrm{d}t$$

pomocí Beta funkce. Uvažujte $m, n > 1$.

Řešení. V integrálu provedeme substituci

$$x = \sin t.$$

Potom

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x^m (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Po další substituci $y = x^2$ dostáváme

$$\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{m}{2}}(1-y)^{\frac{n-1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{m-1}{2}}(1-y)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right).$$

Příklad. Rozhodněte o konvergenci následujícího integrálu

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

v závislosti na parametrech m, n a vyjádřete integrál pomocí Beta funkce.

Řešení. V integrálu provedeme substituci $t = x^n$.

Potom

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|n|}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m-1}{n}}}{1+t}t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|n|}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\,\mathrm{d}t,$$

pokud $n \neq 0$.

Rozdělením integrálu

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

určíme, že integrál konverguje pro

$$0 < \frac{m}{n} < 1.$$

(Uvědomte si, kdy konvergují integrály na pravé straně předchozí rovnosti.)

Celkem tedy můžeme pro tato m, n psát

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|n|}\mathrm{B}\left(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\right).$$

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

pomocí funkce Beta a Gama.

TAHAK z kapitoly

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\ \mathrm{d}t\,,\ \ \Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \log^2 t\ \mathrm{d}t$$

$$\Gamma(n+1) = n!\,,\ \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,,\ \ \Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \text{pro } x \in (0,1)$$

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{a_x}{12x}} = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} \dots\right)} = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + \frac{b_x}{6x}\right),$$

kde $0 < a_x < 1, 0 < b_x < 1$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t$$

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}\ \mathrm{d}u$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$