INTEGRÁLY S PARAMETREM

V kapitole o integraci funkcí více proměnných byla potřeba spojitost funkce $g(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ proměnné x.

Graf funkce dvou proměnných $f(x,y)$ řežeme v bodě x ve směru y a koukáme, jestli se velikost řezů plynule mění.

Když se řežou nespojité schody, nemusí to tak být.

Spojitost funkce $g(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ proměnné x znamená vlastně prohození limity a integrálu

$$\lim_{x\to p} \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \lim_{x\to p} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrálu na levé straně se říká integrál s parametrem x a výsledkem jeho integrace je funkce proměnné x.

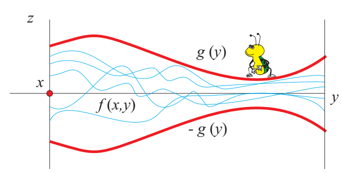
Pro zjištění jejího průběhu je podstatná uvedená rovnost pro záměnu limit a integrálu.

Jedno tvrzení o záměně limity a integrálu znáte z kapitoly o stejnoměrné konvergenci. V této kapitole bude toto tvrzení zobecněno.

Nejdříve se musí zavést nový pojem.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na součinu $M \times I$, kde $M \subset \mathbb{R}$ a I je interval v $\mathbb{R}$. Funkce $g(y)$ se nazývá integrovatelná majoranta funkce f, jestliže

- $|f(x,y)| \le g(y)$ pro všechna $x \in M, y \in I$;
- $\int_I g(y)\,\mathrm{d}y$ konverguje.



Pojem integrovatelné majoranty samozřejmě závisí na tom, jaký integrál se použije.

Podle dřívější úmluvy jsou uvedené integrály chápány jako zobecněný Newtonův integrál.

POZOROVÁNÍ. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I konvergující stejnoměrně. Pokud existuje libovolně velký index n pro který konverguje integrál $\int_I f_n$, potom má posloupnost $\{f_n\}$ integrovatelnou majorantu na I.

HA. Vidíte to taky? Jestli ne, tak hurá na pozorovatelnu.

Následující věta tedy zobecňuje větu o záměně limity a stejnoměrné konvergence.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na intervalu I konvergující bodově k funkci f. Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ má integrovatelnou majorantu na I, pak

$$\lim \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud pravá strana existuje.

Důkaz. Nechť g je spojitá integrovatelná majoranta posloupnosti $\{f_n\}$ na I a $\varepsilon > 0$.

Ze srovnávacího kritéria vyplývá, že integrály $\int_I f_n$ konvergují.

Existuje kompaktní interval $J \subset I$ tak, že $\left| \int_I g(x)\,\mathrm{d}x - \int_J g(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$.

Odtud vyplývají následující odhady:

$$\left| \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_I |f_n(x) - f(x))|\,\mathrm{d}x \le \int_J |f_n(x) - f(x))|\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon\,.$$

Zbývá odhadnout $\int_J |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x$.

K tomu bude nutné vyjít ven z Newtonových integrálů a použít obecnější K-integrál nebo L-integrál.

Označí se $G_n = \{x \in J; |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro každé $k \ge n\}$.

Zřejmě je $G_n \subset G_{n+1}$ a $\bigcup G_n = J$.

Množiny G_n nemusí být otevřené a proto nelze použít na integraci přes tyto množiny Newtonův integrál.

V následující rovnosti je trocha magie L (nebo K)-integrálů.

Platí

$$\lim \int_J |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{dx} = \lim \int_{G_n} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{dx}$$

a tedy existuje k takové, že pro $n \geq k$ je

$$\int_J |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{dx} \leq \int_{G_n} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{dx} + \varepsilon \leq \varepsilon d(J) + \varepsilon \,,$$

kde $d(J)$ je délka intervalu J. Tím je důkaz hotov. ◇

Důležitým důsledkem jsou tvrzení o spojitosti integrálu s parametrem:

DŮSLEDEK.

1. Nechť f je spojitá funkce definovaná na intervalu $I \times J$ v rovině a $\int_J f(x,y) \, \mathrm{dy}$ existuje pro každé $x \in I$. Má-li $f(x,y)$ integrovatelnou majorantu $g(y)$ na $I \times J$, pak funkce $\int_J f(x,y) \, \mathrm{dy}$ je na I spojitá.
2. Nechť f je omezená spojitá funkce definovaná na omezeném intervalu $I \times J$ v rovině. Pak $\int_J f(x,y) \, \mathrm{dy}$ je na I spojitá.

Důkaz. Nechť $x \in I$ a $\{x_n\}$ je posloupnost v I konvergující k x.

Označí se $f_n(y) = f(x_n, y)$, takže $\lim f_n(y) = f(x,y)$ pro každé $y \in J$.

Integrovatelná majoranta g pro f je zároveň integrovatelnou majorantou pro posloupnost $\{f_n\}$ a podmínky věty jsou splněny.

Platí tedy

$$\lim \int_J f(x_n, y) \, \mathrm{dy} = \lim \int_J f_n(y) \, \mathrm{dy} = \int_J f(x,y) \, \mathrm{dy} \,,$$

což se mělo dokázat v prvním tvrzení.

◇

Druhé tvrzení je důsledkem prvního tvrzení (co se vezme za integrovatelnou majorantu?).

Protože derivace je definována pomocí limity, dá se uvedená věta použít i na výpočet derivací integrálu s parametrem. Výsledkem je tvrzení o záměně derivace a integrálu.

VĚTA. Nechť f je spojitá funkce definovaná na intervalu $I \times J$ v rovině a $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ existuje pro každé $x \in I$. Má-li $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ integrovatelnou majorantu $g(y)$ na $I \times J$, pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \int_J f(x,y)\,\mathrm{dy} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{dy}$$

na I.

Jednou jsem viděl opravdového majora a ten měl na hlavě "přehazovačku". To asi nebylo náhodou.

Důkaz. Výsledek vyplývá z následujících rovností:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \int_J f(x,y)\,\mathrm{dy} &= \lim_{x_n \to x} \frac{\int_J f(x_n,y)\,\mathrm{dy} - \int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}}{x_n - x} \\
&= \lim_{x_n \to x} \int_J \frac{f(x_n,y) - f(x,y)}{x_n - x}\,\mathrm{dy} \\
&= \int_J \lim_{x_n \to x} \frac{f(x_n,y) - f(x,y)}{x_n - x}\,\mathrm{dy} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{dy}\,.
\end{aligned}$$

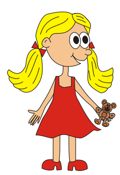
Předposlední rovnost vyplývá z věty, protože g je integrovatelná majoranta pro uvedený zlomek (díky $x' \in [x_n, x]$):

$$\left|\frac{f(x_n,y) - f(x,y)}{x_n - x}\right| = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x',y)(x_n - x)}{x_n - x}\right| \le g(y)\,.$$

◇

Přirozené je podívat se na záměnu integrace s integrálem. To však bylo probráno v kapitole o integrálech funkcí více proměnných, v části o Fubiniově větě.

Všechno souvisí se vším a to NEMÁM rád.



Já nemám ráda všechno, co souvisí s mrkvičkou.

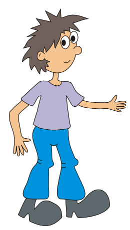
Poznámky 1:

Existuje obecnější tvrzení o záměně limity a integrálu, kde se místo existence integrovatelné majoranty předpokládá stejnoměrná konvergence integrálu $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ v bodě b vzhledem k $x \in M$, což znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $c \in (a,b)$ tak, že pro libovolná $b_1, b_2 \in (c,b), x \in M$ je $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right| < \varepsilon$.

Věta o derivaci integrálu s parametrem má také důsledky pro případy, kdy existují omezené spojité parciální derivace integrované funkce až do řádu k na omezeném intervalu $I \times J$. Pak integrál s parametrem má spojité derivace až do řádu k.

Při zjišťování spojitosti a derivace integrálu s parametrem se často používá lokálního charakteru spojitosti a derivace. Např. při zjišťování spojitosti $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ na intervalu $(0,\infty)$ stačí zjistit spojitost (a tedy hledat majorantu) jen na omezených intervalech $x \in (c,d)$ pro libovolná čísla $0 < c < d < \infty$.

Jen ty intervaly (c, d) musejí "umět pokrýt"libovolný bod $x \in (0, \infty)$.



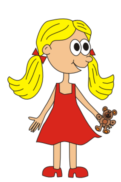
To bylo řečeno pro mimina.

Věta o záměně derivace a integrálu se používá pro výpočet některých integrálů, u kterých je obtížné nebo nemožné napsat primitivní funkci.

Do integrálu se přidá vhodně parametr tak, aby po zderivování funkce podle parametru se získal jednodušší integrál.

Ten se vypočte; hodnota jedné z jeho primitivních funkcí je rovna původnímu integrálu. Viz *Příklady*.

Rád se o taková kouzla podělím.



Já se taky dělím o čokoládu.

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Ukažte, že pro $F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{y}\,\mathrm{d}y$ je $F'(x) = 0$ na $(0, \infty)$, ale $\int_0^\infty \frac{\partial \sin xy/y}{\partial x}\,\mathrm{d}y$ neexistuje.

2. Použitím věty o záměně limity a integrálu ukažte, že

$$\lim_n \int_0^1 x^n \,\mathrm{dx} = 0\,, \lim_n \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{dx} = 0$$

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{dx} = 1\,, \lim_{x\to\infty} \int_0^\infty e^{-xy}\sin y \,\mathrm{dy} = 0\,.$$

3. Najděte funkci na $[0,1]\times[0,1]$ spojitou všude kromě bodu $(0,0)$ a takovou, že $\lim_{x\to 0_+} \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{dx} \neq \int_0^1 \lim_{x\to 0_+} f(x,y)\,\mathrm{dx}$.

4. Ukažte, že funkce $\int_0^\infty e^{-xy^2}\,\mathrm{dy}$ je spojitá na $(0,\infty)$.

5. Platí $\int_0^\infty e^{-xy}\,\mathrm{dy} = 1/x$ pro $x>0$. Ukažte, že můžete použít větu o záměně derivací a integrálu a dostanete rovnosti $\int_0^\infty y^n e^{-xy}\,\mathrm{dy} = n!/x^{n+1}$ pro $x>0$.

6. Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin^2(bx)}{x}\,\mathrm{dx} \text{ pro } a>0, b\in\mathbb{R}\,.$$

Použije se postup popsaný na konci *Poznámek*.

Zde již jsou parametry dány, ale jsou dva. Nejdříve je nutné se rozhodnout, podle kterého parametru se bude derivovat (v některých případech je možné brát takovýto integrál jako funkci dvou proměnných a derivovat podle obou proměnných).

Zde je lepší vzít za parametr b.

Zkuste i parametr a, abyste viděli, jaké těžkosti nastanou. BTW, raději to nezkoušejte.

Ukažte, že lze zaměnit derivaci a integrál, vypočtěte nový integrál a dostanete výsledek $2b/(a^2+4b^2)$.

Najděte neurčitý integrál (proměnné b) k tomuto výsledku a dosaďte hodnotu $b=0$. Tím odstraníte konstantu a dostanete výsledek

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin^2(bx)}{x}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\log\left(1+\frac{4b^2}{a^2}\right) \text{ pro } a>0, b\in\mathbb{R}\,.$$

Věci s parametrem nemám rád.

7. Má se spočítat

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(bx)\,\mathrm{dx} \text{ pro } a\neq 0, b\in\mathbb{R}\,.$$

Ze stejného důvodu jako v předchozím příkladě se použije parametr b, integrál označíme $F(b)$.
Ukažte, že lze zaměnit derivaci a integrál a na nový integrál použijte integraci po částech.
Dostanete rovnost $F'(b) = -\frac{b}{2a^2}F(b)$, což je diferenciální rovnice pro neznámou F.
Jejím vyřešením (s počáteční podmínkou $F(0) = \sqrt{\pi}/(2a)$ – proč?) dostanete výsledek

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(bx)\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)^2} \quad \text{pro } a \neq 0, b \in \mathbb{R}\,.$$

8. Spočtěte integrál $\int_0^\pi \log(1 - 2x\sin y + y^2)\,\mathrm{d}y$ pro $x \in [-1.1]$. [Vyjde 0]

Kdo se ve tmě nebojí, je můj kamarád.

***9.** Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\,\mathrm{dx} \qquad \text{pro } a \geq 0\,.$$

Je vhodné zvolit za parametr b. Po nalezení integrovatelné majoranty a zderivování snadno spočtete získaný integrál a jeho primitivní funkci. Získáte však výsledek jen pro $a > 0$ (pro $a = 0$ neexistuje integrovatelná majoranta).
Abyste získali výsledek i pro $a = 0$, musíte integrál i výsledek zlimitovat pro $a \to 0_+$. Protože neexistuje integrovatelná majoranta, musí se v tomto případě použít zobecnění věty o záměně limity a integrálu vysvětlené v *Poznámkách*, tj. stejnoměrná konvergence počítaného integrálu pro $a > 0$, která se určí snadno.

A je to.

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

1. Ukažte, že je-li f spojitá funkce definovaná na součinu $M \times (a, b)$, kde $M \subset \mathbb{R}$ a $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y$ existuje pro každé $x \in M$ a má-li f na $M \times (a, b)$ integrovatelnou majorantu, pak $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y$ konverguje v b stejnoměrně vzhledem k $x \in M$.

2. Projděte důkaz věty o záměně limity a integrálu a zjistěte, že platí i pro předpoklad stejnoměrné konvergence integrálu $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y$.
Napište přesnou formulaci této modifikace věty.

3. Důkaz Důsledku o spojitosti integrálu s parametrem lze udělat i obráceně, tj. dokázat nejdříve druhou část a z ní vyplyne první část (jak?).

Konec otázek 1.

Cvičení 1: Příklad. Vypočítejme integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x$$

pro $a, b > 0$.

Řešení. Využijeme tvaru integrované funkce

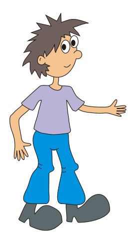
$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\log x}\right]_a^b \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

Nyní byste měli být schopni odůvodnit použití Fubiniovy věty, muchachos.

$$\int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$$

Potom již snadno dostáváme

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \log \frac{1+b}{1+a}.$$



To bylo něco, čemu říkám "polo-joke". Podruhé se nezasměju.

Konec cvičení 1.

GAMA A BETA FUNKCE

Pomocí integrálu s parametrem se dají definovat užitečné funkce.

Třeba $n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n \, \mathrm{d}t$.

Takže dovedeme spočítat jeden a půl faktoriál. To se hodí, protože mám přesně tolik ponožek.

Gama funkce

V této části bude zkoumána tzv. Gama funkce, která má vztah k $n!$ a její použití je velmi široké nejen v teoretické matematice, ale hlavně v praktickém použití, např. ve fyzice a ve statistice.

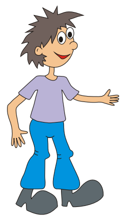
Jak jsem říkal.

Funkce bude nyní definována pro reálná čísla, bude později rozšířena na komplexní čísla.

DEFINICE. Funkce Gama je definována rovností

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \, .$$

Úkolem této části je zjistit průběh Gama funkce a uvést její základní vlastnosti.



To se nejrychleji zjistí pomocí PLOT(Gamma).

1. Definiční obor.

Pro která x konverguje $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$?

Na intervalu $(0,1)$ má e^{-t} hodnoty mezi e^{-1} a 1; funkce $e^{-t}t^{x-1}$ se tedy z hlediska konvergence integrálu chová jako t^{x-1} (tj., $t^{x-1}/3 < e^{-t}t^{x-1} < t^{x-1}$ pro každé $t \in (0,1)$. Integrál $\int_0^1 t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ konverguje právě když $x > 0$.
Navíc se pro $x > a > 0$ získala integrovatelná majoranta t^{a-1} funkce $e^{-t}t^{x-1}$ na $(0,1)$.

My někdy mluvíme skoro nesrozumitelně, ale baví nás to. Chtěla jsem vlastně říci, že?

Děkuji. Ano.

Stačí se nyní omezit na $x > 1$. Pro dané $x > 1$ existuje $p > 0$ tak, že $e^{-t}t^{x-1} \le e^{-t/2}$ pro $t > p$ (ukažte to). Na $[1,p]$ je funkce $e^{-t}t^{x-1}$ proměnné t spojitá a omezená, takže $ke^{-t/2}$ je (pro nějakou konstantu k) integrovatelná majoranta funkce $e^{-t}t^{x-1}$ na $(1,\infty)$.

Definičním oborem funkce Γ *je interval* $(0, \infty)$*; na celém definičním intervalu je* $\Gamma(x) > 0$.

Prozatím. Za chvíli si Gamu rozšíříme.

Nepřepínejte na jiný program. Pro jistotu ani na pračce.

Spojitost a derivace. Parciální derivace podle x funkce $e^{-t}t^{x-1}$ je rovna $e^{-t}t^{x-1}\log t$.

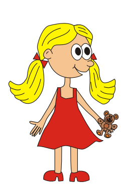
Pro $x > 0$ se vezme $a \in (0, x)$ a parciální derivace se přepíše do tvaru $e^{-t}t^{a-1}(t^{x-a}\log t)$.

Poslední funkce v závorce je spojitá a omezená na $(0, 1)$ a tedy funkce $e^{-t}t^{x-1}\log t$ má (až na vynásobení nějakou konstantou) stejnou integrovatelnou majorantu na $(0, \infty)$ jako funkce $e^{-t}t^{x-1}$.

Totéž platí pro parciální derivace vyšších řádů funkce $e^{-t}t^{x-1}$ podle x. Z věty o derivaci integrálu podle parametru nyní plyne:

Funkce Gama má derivace všech řádů a je tedy spojitá.

Bedlivě ji sleduji, co ještě vyvede.



Nic už dneska nevyvedu.

Protože $\Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log^2 t \ \mathrm{d}t$, je druhá derivace kladná a tudíž *funkce Gama je ryze konvexní.*

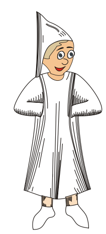
Nyní se použije integrace po částech na $\Gamma(x+1)$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x \ \mathrm{d}t = [-e^{-t}t^x]_{t=0}^\infty + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} \ \mathrm{d}t\,.$$

První výraz na pravé straně se rovná 0 pro $x > 0$. Výsledkem je rovnost

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{pro } x > 0\,.$$

Snadno se vypočte $\Gamma(1) = 1$, takže $\Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2.1, \ldots$ a indukcí $\Gamma(n+1) = n!$.



Ano. To je ale krásná věcička. To nás poprvé dokazovalo n skřítků.

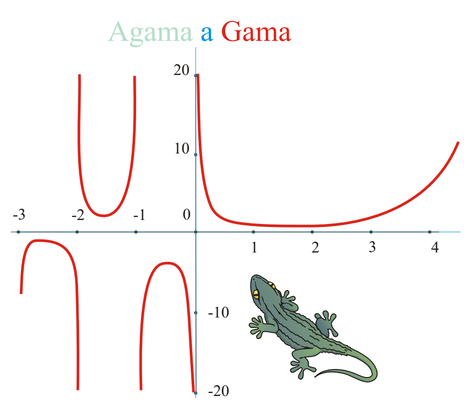
Z konvexity vyplývá, že *minimum funkce* Γ *leží v intervalu* $(1,2)$ a že $\lim\limits_{x\to\infty} \Gamma(x) = \infty$.

Dále je

$$\lim_{x\to 0_+} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \infty\,.$$

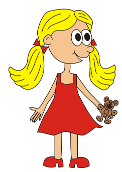
Pomocí vzorce $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$ lze dodefinovat funkci Γ na intervalu $(-1,0)$, potom na intervalu $(-2,-1)$, atd. až na $\mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,-3,\ldots\}$.

Nyní lze již zhruba nakreslit graf.

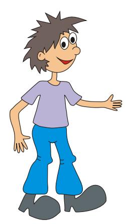


Beta funkce

Beta funkce má úzký vztah ke Gama funkci a proto je stejně důležitá.



Já mám úzký vztah k čokoládě.



Alfa, beta, gama, delta, to je celá abecelta.

DEFINICE. Funkce Beta je definována rovností

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t\,.$$

BTW, docela protivný integrál.

Pomocí substituce $t = u/(u+1)$ se dá funkce Beta vyjádřit integrálem přes neomezený interval:

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}\ \mathrm{d}u\,,$$

z které ale není vidět symetrický charakter, totiž že $B(x,y) = B(y,x)$.
Snadno se zjistí, že $B(x,y)$ je definována v prvním kvadrantu, tj. pro $x > 0, y > 0$.

Není nutné probírat vlastnosti funkce Beta vyplývající z definice, protože $B(x)$ se dá vyjádřit pomocí funkce Γ.

Napíše se součin $\Gamma(x)\Gamma(y)$ a do vzniklého dvojrozměrného integrálu se dá substituce $v = t + u, w = y/(x + y)$:

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-u} t^{x-1} u^{y-1} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty v e^{-v} (vw)^{x-1} v^{y-1} (1-w)^{y-1} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}w \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-v} v^{x+y-1} (w)^{x-1} (1-w)^{y-1} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}w = \Gamma(x+y) B(x,y)\,.\end{aligned}$$

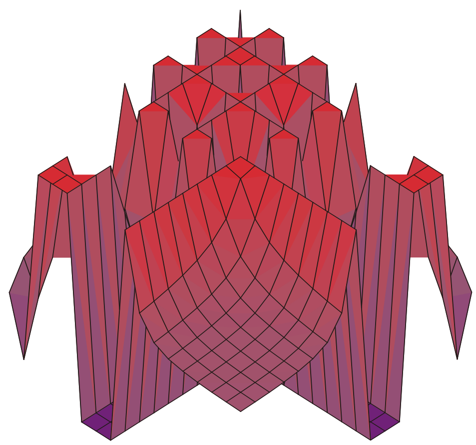
Odtud plyne hledaný vzorec

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

Když $\Gamma(x)$ rozšiřuje $(x-1)!$, $1/(B(x,y)(x+y-1)$ bude rozšiřovat kombinatorickou úlohu "kolika způsoby mohu rozdělit $x-1$ kuliček na $y-1$ hromádek …

Již si nehraju …

BTW, takhle vypadá nahoře a dole ořezaná Beta.



Jako v hororu "Krvavá Běta".

Jestliže se v předchozím vzorci dá $y = 1 - x$ pro $x \in (0, 1)$, dostane se po substitucích $u = (1 - t)^{-1}$ do prvního integrálu a $v = u^{(} - 1)$ do předposledního integrálu

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1-t)^x}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^1 \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u + \int_1^\infty \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \frac{v^{-x}}{1+v}\,\mathrm{d}v\,.$$

Zlomek $\frac{1}{1+u}$ je součet geometrické řady s kvocientem $-u$, která se dá integrovat člen po členu (řada konverguje stejnoměrně na $[0, 1]$ podle Abelovy věty):

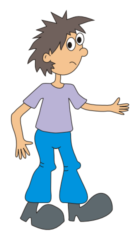
$$\int_0^1 \left(\frac{u^{x-1}}{1+u} \quad + \quad \frac{u^{-x}}{1+u}\right) \,\mathrm{d}u \int_0^1 \left(u^{x-1} + u^{-x}\right) \sum_0^\infty (-1)^n u^n \,\mathrm{d}u =$$

$$= \quad \sum_0^\infty (-1)^n \int_0^1 \left(u^{n+x-1} + u^{n-x}\right) \,\mathrm{d}u \sum_0^\infty (-1)^n \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n-x+1}\right) =$$

$$= \quad \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^\infty \frac{2x}{n^2 - x^2}\,.$$

Poslední řada bude sečtena v kapitole o Fourierových řadách (rozvoj funkce $\cos(xt)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$) a dostane se důležitý vzorec

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \qquad \text{pro } x \in (0,1)\,.$$



Napotvoru zase nic hezkého.

A co bude dál? Už jste určitě slyšeli, že faktoriál se chová exponenciálně ...

Stirlingův vzorec

Gama i Beta funkce lze vyjádřit mnoha způsoby, např. jako součet nekonečné řady, součin nekonečné posloupnosti, limity posloupností, ...

Všechna tato přesná vyjádření jsou nekonečné procesy, které se až na výjimky nedají přesně v jednotlivých bodech spočítat.

Proto je někdy výhodnější nahradit uvedené charakterizace jednodušším vzorcem, který aproximuje danou funkci.

Následující postup můžete sami sledovat (až na poslední krok):

$$\Gamma(x+1) \quad = \quad \int_0^\infty e^{-t} t^x \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{x\log t - t} \,\mathrm{d}t \overset{u=t-x}{=} \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-x}^\infty e^{x\log(1+u/x) - u/x} \,\mathrm{d}u$$

$$\overset{v=u/\sqrt{x}}{=} \quad \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{x\log(1+v/\sqrt{x}) - v/\sqrt{x}} \,\mathrm{d}v \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

kde v posledním kroku byla použita rovnost $\lim\limits_{x\to\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{x\log(1+v/\sqrt{x})-v/\sqrt{x}}\, \mathrm{d}v = \sqrt{2\pi}$.

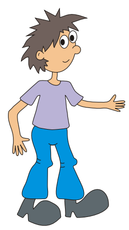
Vztah $f(x) \approx g(x)$ tedy znamená, že $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.

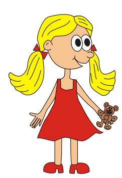
Tím se dostává aproximační Stirlingův vzorec

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

a jeho verze pro faktoriál

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$





Poznámky 2:

Funkce Gama se také nazývá *Eulerův integrál 2.druhu* a funkce Beta *Eulerův integrál 1.druhu*.

Uvědomte si, že Stirlingův vzorec neříká nic o rozdílu mezi $\Gamma(x+1)$ a $\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$.

Tento rozdíl se zvětšuje pro zvětšující se x a konverguje k ∞. Proto se musí dávat velký pozor při nahrazování např. faktoriálu $n!$ funkcí $S(n) = \sqrt{2n\pi}n^n/e^n$.

Následující tabulka ukazuje některé hodnoty a rozdíly těchto dvou funkcí (u $n > 6$ bez desetinných míst u $S(n)$ a $n! - S(n)$)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800
$S(n)$	0,922	1,919	5,836	23,506	118,019	710,078	4980	39902	359536	3598695
$\frac{n!}{S(n)}$	1,084	1,042	1,028	1,021	1,017	1,014	1,012	1,010	1,009	1,008
$n! - S(n)$	0,922	0,081	0,164	0,494	1,980	9,922	59	417	3343	30104

Podíl $n!/S(n)$ se zvýšením o řád pro n zhruba o řád sníží. Pro $n = 1000$ je podíl roven asi 1,000083336, kdežto rozdíl je větší než 10^{2563}.

Pro přesnější vyjádření Gama funkce (nebo faktoriálu) existují modifikace Stirlingova vzorce. Platí např. rovnosti

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{a_x}{12x}} = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5}\dots\right)} = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + \frac{b_x}{6x}\right),$$

kde $0 < a_x < 1, 0 < b_x < 1$.

To jsou již opravdu jemnosti.

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Pomocí vzorce pro $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ spočtěte $\Gamma(1/2)$ a odtud $\Gamma(3/2), \Gamma(5/2)$ a také integrál $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

BTW, základní výsledek pro statistiky.

2. Pomocí substituce $u = e^{-t}$ v integrálu definujícím $\Gamma(x)$ ukažte, že

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\log\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{x-1} \mathrm{d}u\,.$$

Použitím rovnosti $\log\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_n n(1 - \sqrt[n]{u})$ lze snadno ukázat vyjádření Gama funkce pomocí limity:

$$\Gamma(x) = \lim_n n^x \frac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}\,.$$

3. Vyjádřete integrál $\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} x \cos^{b-1} x\,\mathrm{d}x$ pomocí Gama funkcí. Pro jaká a, b výsledek platí? [použijte substituci $t = \cos^2 x$, vyjde $\frac{\Gamma(a/2)\Gamma(b/2)}{2\Gamma((a+b)/2)}$]

4. Pomocí předchozího výsledku vypočtěte $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ a $\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^5\, x \, \mathrm{d}x$.

5. Předchozím způsobem napište pomocí Gama funkce vzorec pro $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

6. Jestliže do integrálu pro $\Gamma(a)$ dáte substituci $u = tx$, kde nová proměnná je u, dostanete po úpravě výraz

$$\frac{1}{x^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-ux} u^{a-1} \, \mathrm{d}u \, .$$

Toto vyjádření funkce $1/x^a$ lze dosadit do různých integrálů, kde se pak dá přehodit pořadí integrace a původní integrál tak spočítat.
Použijte tento postup na výpočet tzv. Fresnelových integrálů $\int_0^\infty \sin(x^2) \, \mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \cos(x^2) \, \mathrm{d}x$.
Po substituci $x^2 = t$ dosaď te za $1/\sqrt{t}$ předchozí vyjádření pomocí $\Gamma(1/2)$ a po přehození pořadí integrace vše snadno spočítáte (s výhodou použijte výpočet pomocí Beta funkce). Vyjde $\sqrt{\pi/8}$.

7. Stirlingův vzorec lze použít při výpočtu limit, kde se vyskytuje faktoriál. Např.

$$\lim \sqrt[n^2]{n!} = \lim \left(\sqrt{2n\pi} \frac{n^n}{e^n} e^{\frac{a_n}{12n}}\right)^{\frac{1}{n^2}} = 1 \, .$$

Spočtěte podobným způsobem $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. [e]

8. Odhadněte pomocí Stirlingova vzorce, jakého řádu je 100!. [158]

Kdyby na mne někdo zakřičel: "100!", myslel bych si něco o neřádech a zlodějích.

Konec příkladů 2.

Cvičení 2:

Příklad. Vypočítejme integrál

$$\int_0^1 x^4 e^{-x} \, \mathrm{d}x \, .$$

Řešení. Jde o $\Gamma(5) = 4! = 24$.

Příklad. Vypočítejme integrál

$$\int_0^\infty x^3 e^{-2x} \, \mathrm{d}x \, .$$

Řešení. Substituce $y = 2x$ převede na funkci Γ.

Příklad. Vypočítejme

$$\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} \, .$$

Řešení. Použijeme $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, takže v čitateli máme $\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$.

Tohle se mockrát hodí, Γ se v argumentu posune o jedničku velmi snadno. Jde to používat víckrát za sebou.

Příklad. Pomocí vzorečku

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \qquad \text{pro } x \in (0,1)$$

spočtěte $\Gamma(1/2)$.

Řešení. Zvolíme $x = 1/2$ a dostaneme $\sqrt{\pi}$.

Příklad. Spočtěte

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

substitucí $x = z^2$.

Řešení. Objeví se známý integrál

$$\int_0^\infty e^{-z^2} \, \mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

a spočteme výsledek $\sqrt{\pi}$.

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^3} \, \mathrm{d}x$$

substitucí $y = x^3$.

Řešení. Objeví se známá $\Gamma(1/2)$ a výsledek $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$.

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\log x}} \, \mathrm{d}x$$

substitucí $-\log x = t$.

Řešení. Objeví se známá $\Gamma(1/2)$.

Takhle se definovala funkce Gamma poprvé. Zkuste to i pro jiné exponenty než $\frac{1}{2}$.

Příklad. Vypočítejme integrál

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n} \, \mathrm{d}x \, .$$

Řešení. Zase to převedeme na Γ. Začneme samozřejmě exponentem u e, aby se dostalo e^{-y}.

Příklad. Definujme operátor derivování

$$D^n x^m = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$$

pomocí funkce Γ a zkusmo spočtěte půltou derivaci funkce x^2.

Řešení. Jde o tvar

$$D^n x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

a

$$D^{1/2} x^2 = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{3/2} .$$

Dvakrát poloviční derivace se u x^2 rovná celé derivaci. OK.

Příklad. Spočtěte

$$\int_a^\infty e^{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x$$

vyjádřením exponentu ve tvaru

$$2ax - x^2 = -(x-a)^2 + a^2$$

a převedením na známé integrály.

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

substitucí

$$x^2 = \tan\alpha .$$

Příklad. Ověřte

$$\Gamma(x) = \Gamma'(x+1) - \Gamma'(x)$$

derivováním rekurentního vztahu

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) .$$

Příklad. Vyjádřete integrál

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t\,\mathrm{d}t$$

pomocí Beta funkce. Uvažujte $m, n > 1$.

Řešení. V integrálu provedeme substituci

$$x = \sin t.$$

A pročpak asi?

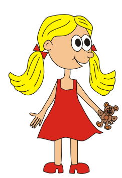
Potom

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t \, \mathrm{d}t = \int_0^1 x^m (1 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} \, \mathrm{d}x.$$

Po další substituci $y = x^2$ dostáváme

$$\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{m}{2}} (1-y)^{\frac{n-1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{m-1}{2}} (1-y)^{\frac{n-1}{2}} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Tušil jsem to!



Nic netušil, řekl mi to.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci následujícího integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} \, \mathrm{d}x$$

v závislosti na parametrech m, n a vyjádřete integrál pomocí Beta funkce.

Řešení. V integrálu provedeme substituci $t = x^n$.

Netuším proč.

Taky ne.

Potom

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{|n|} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-1}{n}}}{1+t} t^{\frac{1}{n}-1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{|n|} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\, \mathrm{d}t,$$

pokud $n \neq 0$.

Rozdělením integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{1} \frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\, \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\, \mathrm{d}t$$

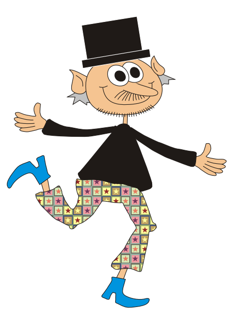
určíme, že integrál konverguje pro

$$0 < \frac{m}{n} < 1.$$

(Uvědomte si, kdy konvergují integrály na pravé straně předchozí rovnosti.)

Celkem tedy můžeme pro tato m, n psát

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{|n|} \mathrm{B}\left(\frac{m}{n}, 1 - \frac{m}{n}\right).$$



Některá kouzla nikomu neprozradím.

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$$

pomocí funkce Beta a Gama.

Konec cvičení 2.

STANDARDY z kapitoly

INTEGRÁLY S PARAMETREM

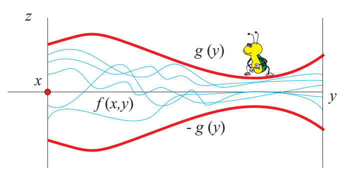
Spojitost funkce $g(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ proměnné x znamená vlastně prohození limity a integrálu

$$\lim_{x\to p} \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \lim_{x\to p} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrálu na levé straně se říká integrál s parametrem x a výsledkem jeho integrace je funkce proměnné x.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na součinu $M \times I$, kde $M \subset \mathbb{R}$ a I je interval v $\mathbb{R}$. Funkce $g(y)$ se nazývá integrovatelná majoranta funkce f, jestliže

- $|f(x,y)| \le g(y)$ pro všechna $x \in M, y \in I$;
- $\int_I g(y)\,\mathrm{d}y$ konverguje.



POZOROVÁNÍ. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I konvergující stejnoměrně. Pokud existuje libovolně velký index n pro který konverguje integrál $\int_I f_n$, potom má posloupnost $\{f_n\}$ integrovatelnou majorantu na I.

Následující věta zobecňuje větu o záměně limity a stejnoměrné konvergence.

VĚTA. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na intervalu I konvergující bodově k funkci f. Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ má integrovatelnou majorantu na I, pak

$$\lim \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud pravá strana existuje.

DŮSLEDEK.

1. Nechť f je spojitá funkce definovaná na intervalu $I \times J$ v rovině a $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ existuje pro každé $x \in I$. Má-li $f(x,y)$ integrovatelnou majorantu $g(y)$ na $I \times J$, pak funkce $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ je na I spojitá.
2. Nechť f je omezená spojitá funkce definovaná na omezeném intervalu $I \times J$ v rovině. Pak $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ je na I spojitá.

Důkaz. Nechť $x \in I$ a $\{x_n\}$ je posloupnost v I konvergující k x.
Označí se $f_n(y) = f(x_n, y)$, takže $\lim f_n(y) = f(x,y)$ pro každé $y \in J$.
Integrovatelná majoranta g pro f je zároveň integrovatelnou majorantou pro posloupnost $\{f_n\}$ a podmínky věty jsou splněny.
Platí tedy

$$\lim \int_J f(x_n, y)\,\mathrm{dy} = \lim \int_J f_n(y)\,\mathrm{dy} = \int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}\,,$$

což se mělo dokázat v prvním tvrzení. Druhé tvrzení je důsledkem prvního tvrzení (integrovatelná majoranta je konstanta). ◇

Protože derivace je definována pomocí limity, dá se uvedená věta použít i na výpočet derivací integrálu s parametrem. Výsledkem je tvrzení o záměně derivace a integrálu.

VĚTA. Nechť f je spojitá funkce definovaná na intervalu $I \times J$ v rovině a $\int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}$ existuje pro každé $x \in I$. Má-li $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ integrovatelnou majorantu $g(y)$ na $I \times J$, pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \int_J f(x,y)\,\mathrm{dy} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{dy}$$

na I.

Důkaz. Výsledek vyplývá z následujících rovností:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \int_J f(x,y)\,\mathrm{dy} &= \lim_{x_n \to x} \frac{\int_J f(x_n,y)\,\mathrm{dy} - \int_J f(x,y)\,\mathrm{dy}}{x_n - x} \\
&= \lim_{x_n \to x} \int_J \frac{f(x_n,y) - f(x,y)}{x_n - x}\,\mathrm{dy} \\
&= \int_J \lim_{x_n \to x} \frac{f(x_n,y) - f(x,y)}{x_n - x}\,\mathrm{dy} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{dy}\,.
\end{aligned}$$

Předposlední rovnost vyplývá z věty, protože g je integrovatelná majoranta pro uvedený zlomek (díky $x' \in [x_n, x]$):

$$\left|\frac{f(x_n,y) - f(x,y)}{x_n - x}\right| = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x',y)(x_n - x)}{x_n - x}\right| \le g(y)\,.$$

◇

Příklad. Použitím věty o záměně limity a integrálu ukažte, že

$$\lim_n \int_0^1 x^n\,\mathrm{dx} = 0\,, \lim_n \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{dx} = 0$$

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{dx} = 1\,,\ \lim_{x\to\infty} \int_0^\infty e^{-xy}\sin y\,\mathrm{dy} = 0\,.$$

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x$$

pro $a, b > 0$.

Řešení. Využijeme tvaru integrované funkce

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\log x}\right]_a^b \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

$$\int_0^1 \left(\int_a^b x^y\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$$

Potom již snadno dostáváme

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^y\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{1+y}\, \mathrm{d}y = \log \frac{1+b}{1+a}.$$

Tomu se říká integrace podle parametru.

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}\, \mathrm{d}x$$

pro $a, b > 0$.

Řešení. Derivujeme podle parametru a, majorantu $\frac{1}{1+p^2x^2}$ najdeme pro $a \in [p, \infty)$ pro $p > 0$. Po integrování hledáme integrační konstantu $C(b)$, použijeme $a = b$ a dostaneme výsledek

$$\frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b}\,.$$

Tomu se říká derivace podle parametru.

GAMA A BETA FUNKCE

$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n \,\mathrm{d}t.$

Gama funkce

DEFINICE. Funkce Gama je definována rovností

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \,\mathrm{d}t\,.$$

1. Definiční obor.

Pro která x konverguje $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \,\mathrm{d}t$?

Na intervalu $(0,1)$ má e^{-t} hodnoty mezi e^{-1} a 1; funkce $e^{-t}t^{x-1}$ se tedy z hlediska konvergence integrálu chová jako t^{x-1} (tj., $t^{x-1}/3 < e^{-t}t^{x-1} < t^{x-1}$ pro každé $t \in (0,1)$. Integrál $\int_0^1 t^{x-1} \,\mathrm{d}t$ konverguje právě když $x > 0$.

Navíc se pro $x > a > 0$ získala integrovatelná majoranta t^{a-1} funkce $e^{-t}t^{x-1}$ na $(0,1)$.

Stačí se nyní omezit na $x > 1$. Pro dané $x > 1$ existuje $p > 0$ tak, že $e^{-t}t^{x-1} \le e^{-t/2}$ pro $t > p$ (ukažte to). Na $[1,p]$ je funkce $e^{-t}t^{x-1}$ proměnné t spojitá a omezená, takže $ke^{-t/2}$ je (pro nějakou konstantu k) integrovatelná majoranta funkce $e^{-t}t^{x-1}$ na $(1,\infty)$.

Definičním oborem funkce Γ je interval $(0,\infty)$; na celém definičním intervalu je $\Gamma(x) > 0$.

Funkce Gama má derivace všech řádů a je tedy spojitá.

Protože $\Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log^2 t \,\mathrm{d}t$, je druhá derivace kladná a tudíž

funkce Gama je ryze konvexní.

Nyní se použije integrace po částech na $\Gamma(x+1)$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x \,\mathrm{d}t = [-e^{-t}t^x]_{t=0}^\infty + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} \,\mathrm{d}t\,.$$

První výraz na pravé straně se rovná 0 pro $x > 0$. Výsledkem je rovnost

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{pro } x > 0\,.$$

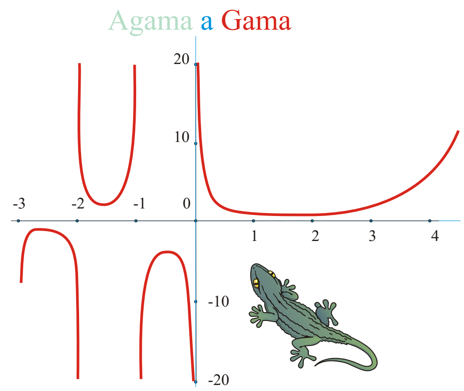
Snadno se vypočte $\Gamma(1) = 1$, takže $\Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2.1, \ldots$ a indukcí $\Gamma(n+1) = n!$.

Z konvexity vyplývá, že *minimum funkce* Γ *leží v intervalu* $(1,2)$ a že $\lim\limits_{x\to\infty} \Gamma(x) = \infty$.

Dále je

$$\lim_{x\to 0_+} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \infty\,.$$

Pomocí vzorce $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$ lze dodefinovat funkci Γ na intervalu $(-1,0)$, potom na intervalu $(-2,-1)$, atd. až na $\mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,-3,...\}$.



Beta funkce

DEFINICE. Funkce Beta je definována rovností

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t\,.$$

Snadno se zjistí, že $B(x,y)$ je definována v prvním kvadrantu, tj. pro $x>0, y>0$.

Pomocí substituce $t = u/(u+1)$ se dá funkce Beta vyjádřit integrálem přes neomezený interval:

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}\ \mathrm{d}u\,,$$

z které ale není vidět symetrický charakter, totiž že $B(x,y) = B(y,x)$.

Ten tvar se někdy hodí.

Není nutné probírat vlastnosti funkce Beta vyplývající z definice, protože $B(x)$ se dá vyjádřit pomocí funkce Γ.

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} .$$

Užitečný vzorec

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \qquad \text{pro } x \in (0,1) .$$

Stirlingův vzorec

Vztah $f(x) \approx g(x)$ znamená, že $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.

Platí aproximační Stirlingův vzorec

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

a jeho verze pro faktoriál

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Pro přesnější vyjádření Gama funkce (nebo faktoriálu) existují modifikace Stirlingova vzorce. Platí např. rovnosti

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{a_x}{12x}} = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1+\frac{b_x}{6x}\right),$$

kde $0 < a_x < 1, 0 < b_x < 1$.

Příklad. Pomocí vzorce pro $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ spočtěte $\Gamma(1/2)$ a odtud $\Gamma(3/2), \Gamma(5/2)$ a také integrál $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Příklad. Pomocí substituce $u = e^{-t}$ v integrálu definujícím $\Gamma(x)$ ukažte, že

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\log\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{x-1} \mathrm{d}u .$$

Příklad. Pomocí Stirlingova vzorce spočtěte

$$\lim \sqrt[n^2]{n!} .$$

Řešení.

$$\lim \sqrt[n^2]{n!} = \lim \left(\sqrt{2n\pi}\frac{n^n}{e^n}e^{\frac{a_n}{12n}}\right)^{\frac{1}{n^2}} = 1 .$$

Příklad. Odhadněte pomocí Stirlingova vzorce, jakého řádu je 100!.

Řešení. Vyjde 158.

Příklad. Vypočítejme integrál

$$\int_0^1 x^4 e^{-x}\,\mathrm{d}x .$$

Řešení. Jde o $\Gamma(5) = 4! = 24$.

Příklad. Vypočítejme integrál

$$\int_0^\infty x^3 e^{-2x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Substituce $y = 2x$ převede na funkci Γ.

Příklad. Vypočítejme

$$\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)}\,.$$

Řešení. Použijeme $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, takže v čitateli máme $\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$.

Tohle se mockrát hodí, Γ se v argumentu posune o jedničku velmi snadno. Jde to používat víckrát za sebou.

Příklad. Pomocí vzorečku

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \qquad \text{pro } x \in (0,1)$$

spočtěte $\Gamma(1/2)$.

Řešení. Zvolíme $x = 1/2$ a dostaneme $\sqrt{\pi}$.

Příklad. Spočtěte

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

substitucí $x = z^2$.

Řešení. Objeví se známý integrál

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\, \mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

a spočteme výsledek $\sqrt{\pi}$.

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^3}\, \mathrm{d}x$$

substitucí $y = x^3$.

Řešení. Objeví se známá $\Gamma(1/2)$ a výsledek $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$.

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\log x}}\, \mathrm{d}x$$

substitucí $-\log x = t$.

Řešení. Objeví se známá $\Gamma(1/2)$.

Takhle se definovala funkce Gamma poprvé. Zkuste to i pro jiné exponenty než $\frac{1}{2}$.

Příklad. Vypočítejme integrál
$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}\,\mathrm{d}x\,.$$
Řešení. Zase to převedeme na Γ. Začneme samozřejmě exponentem u e, aby se dostalo e^{-y}.

Příklad. Spočtěte
$$\int_a^\infty e^{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x$$
vyjádřením exponentu ve tvaru
$$2ax - x^2 = -(x-a)^2 + a^2$$
a převedením na známé integrály.

Příklad. Vyjádřete integrál
$$\int_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t\,\mathrm{d}t$$
pomocí Beta funkce. Uvažujte $m, n > 1$.
Řešení. V integrálu provedeme substituci
$$x = \sin t.$$
Potom
$$\int_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x^m (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$
Po další substituci $y = x^2$ dostáváme
$$\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{m}{2}}(1-y)^{\frac{n-1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{m-1}{2}}(1-y)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$
Příklad. Rozhodněte o konvergenci následujícího integrálu
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$
v závislosti na parametrech m, n a vyjádřete integrál pomocí Beta funkce.
Řešení. V integrálu provedeme substituci $t = x^n$.
Potom
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|n|}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-1}{n}}}{1+t} t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|n|}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\,\mathrm{d}t,$$
pokud $n \neq 0$.

Rozdělením integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1} \frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

určíme, že integrál konverguje pro

$$0 < \frac{m}{n} < 1.$$

(Uvědomte si, kdy konvergují integrály na pravé straně předchozí rovnosti.)
Celkem tedy můžeme pro tato m, n psát

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|n|}\mathrm{B}\left(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\right).$$

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

pomocí funkce Beta a Gama.

TAHAK z kapitoly

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t\,,\ \ \Gamma''(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log^2 t\ \mathrm{d}t$$

$$\Gamma(n+1)=n!\,,\ \ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\,,\ \ \Gamma(x)=\Gamma(x+1)/x$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\qquad \text{pro } x\in(0,1)$$

$$\Gamma(x+1)\approx\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{a_x}{12x}}=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\left(\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}\cdots\right)}=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1+\frac{b_x}{6x}\right),$$

kde $0<a_x<1, 0<b_x<1$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t$$

$$B(x,y)=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}\ \mathrm{d}u$$

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$