FOURIEROVY ŘADY

FOURIEROVY ŘADY

V prvním semestru se probíraly aproximace funkcí polynomy:

FOURIEROVY ŘADY

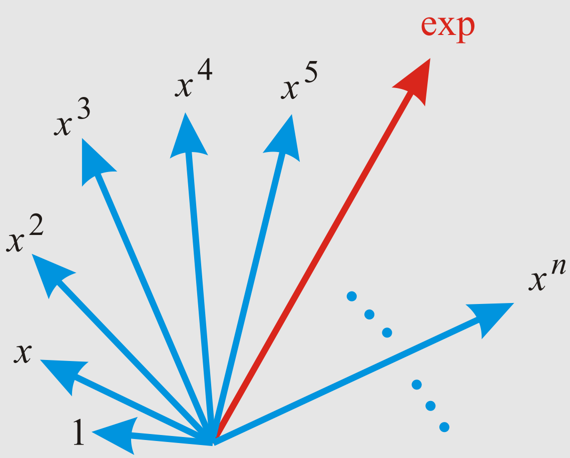
V prvním semestru se probíraly aproximace funkcí polynomy:

Funkce exp má známý zápis

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

pro nějaké c mezi 0 a x.

V podstatě jsme rozepsali funkci $\exp(x)$ jako prvek prostoru funkcí pomocí souřadnic 1, x, x^2, $\ldots$ s vhodnými koeficienty.



Koeficienty těchto polynomů se počítaly podle derivací funkce $\exp$ v počátku.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Koeficienty těchto polynomů se počítaly podle derivací funkce $\exp$ v počátku.

To je jako monarchie. Jedinec ovládne celou zemi.

Koeficienty těchto polynomů se počítaly podle derivací funkce $\exp$ v počátku.

To je jako monarchie. Jedinec ovládne celou zemi.

V důsledku toho je aproximace velmi pěkná v počátku, kdežto jinde je to slabší.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

BTW, na periodické funkce chodit s polynomy je komické.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

BTW, na periodické funkce chodit s polynomy je komické.

Vyrazíme proto na obecnou funkci s jednoduchými periodickými funkcemi.

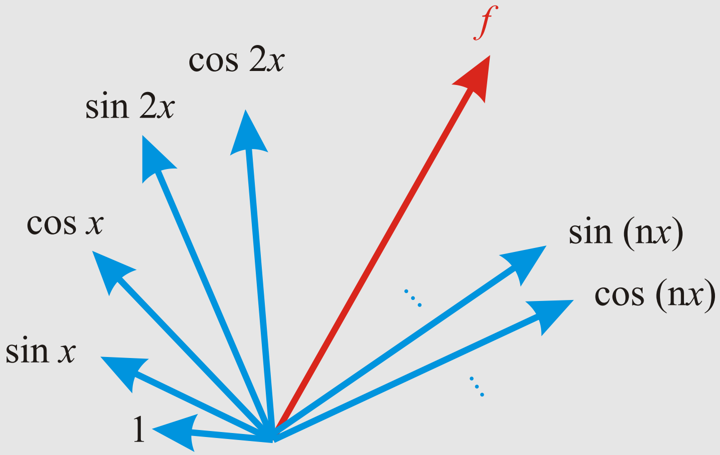
BTW, na periodické funkce chodit s polynomy je komické.

Vyrazíme proto na obecnou funkci s jednoduchými periodickými funkcemi.

A až tam dojdeme, zjistíme, že tam už fyzici byli už dávno.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V podstatě rozepíšeme funkci jako prvek prostoru funkcí pomocí souřadnic 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, $\sin(3x)$, $\cos(3x)$, $\ldots$ s vhodnými koeficienty.



Polynomy jsou velmi vhodné funkce pro aproximace, ale ne vždy je možné je použít anebo ne vždy mají potřebné vlastnosti.

Polynomy jsou velmi vhodné funkce pro aproximace, ale ne vždy je možné je použít anebo ne vždy mají potřebné vlastnosti.

⬇

Navíc se dobře aproximovaly jen funkce, mající všechny derivace.

⬇

Polynomy jsou velmi vhodné funkce pro aproximace, ale ne vždy je možné je použít anebo ne vždy mají potřebné vlastnosti.

⇓

Navíc se dobře aproximovaly jen funkce, mající všechny derivace.

⇓

Další funkce, které se ukázaly velmi vhodné pro aproximace jsou funkce sinus a kosinus. Pomocí nich lze aproximovat i nespojité funkce.

⇓

Polynomy jsou velmi vhodné funkce pro aproximace, ale ne vždy je možné je použít anebo ne vždy mají potřebné vlastnosti.

⬇

Navíc se dobře aproximovaly jen funkce, mající všechny derivace.

⬇

Další funkce, které se ukázaly velmi vhodné pro aproximace jsou funkce sinus a kosinus. Pomocí nich lze aproximovat i nespojité funkce.

⬇

Navíc jsou tyto funkce vhodné pro modelování periodických dějů a není tu požadavek, aby aproximované funkce měly derivace všech řádů.

⬇

Polynomy jsou velmi vhodné funkce pro aproximace, ale ne vždy je možné je použít anebo ne vždy mají potřebné vlastnosti.

Navíc se dobře aproximovaly jen funkce, mající všechny derivace.

Další funkce, které se ukázaly velmi vhodné pro aproximace jsou funkce sinus a kosinus. Pomocí nich lze aproximovat i nespojité funkce.

Navíc jsou tyto funkce vhodné pro modelování periodických dějů a není tu požadavek, aby aproximované funkce měly derivace všech řádů.

A vůbec, obešli byste se bez mp3?

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože sinus je lichá a kosinus sudá funkce, musí se pro aproximaci použít obě funkce současně.

Protože sinus je lichá a kosinus sudá funkce, musí se pro aproximaci použít obě funkce současně.

⬇

Je také známo, že mocniny obou funkcí se dají vždy vyjádřit pomocí lineárních kombinací funkcí $\sin(kx)$, $\cos(kx)$. Např. $\sin^2 x = 1/2 - (1/2)\cos(2x)$, $\cos^3 x = (3/4)\cos x + (1/4)\cos(3x)$.

⬇

Protože sinus je lichá a kosinus sudá funkce, musí se pro aproximaci použít obě funkce současně.

⬇

Je také známo, že mocniny obou funkcí se dají vždy vyjádřit pomocí lineárních kombinací funkcí $\sin(kx), \cos(kx)$. Např. $\sin^2 x = 1/2 - (1/2)\cos(2x)$, $\cos^3 x = (3/4)\cos x + (1/4)\cos(3x)$.

⬇

Používání funkcí $\sin(kx), \cos(kx)$ je vhodnější než používání funkcí $\sin^k x, \cos^k x$. Důvody jsou podložené i obecnou teorií, která je však nad rámec tohoto textu.

⬇

Protože sinus je lichá a kosinus sudá funkce, musí se pro aproximaci použít obě funkce současně.

⬇

Je také známo, že mocniny obou funkcí se dají vždy vyjádřit pomocí lineárních kombinací funkcí $\sin(kx), \cos(kx)$. Např. $\sin^2 x = 1/2 - (1/2)\cos(2x)$, $\cos^3 x = (3/4)\cos x + (1/4)\cos(3x)$.

⬇

Používání funkcí $\sin(kx), \cos(kx)$ je vhodnější než používání funkcí $\sin^k x, \cos^k x$. Důvody jsou podložené i obecnou teorií, která je však nad rámec tohoto textu.

⬇

Ale proti gustu žádný dišputát. Vemte si klíďopíďo jiné funkce. BTW, ono se to tak dělá.

DEFINICE. Funkce $\sum_{n=0}^{k}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrický polynom.

DEFINICE. Funkce $\sum_{n=0}^{k}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrický polynom.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrická řada.

DEFINICE. Funkce $\sum_{n=0}^{k}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrický polynom.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrická řada.

Koeficienty a_n, b_n i proměnná x lze brát komplexní, tento text se omezí jen na reálná čísla.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Funkce $\sum_{n=0}^{k}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrický polynom.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrická řada.

Koeficienty a_n, b_n i proměnná x lze brát komplexní, tento text se omezí jen na reálná čísla.

Úkolem této kapitoly je aproximovat funkce trigonometrickými polynomy.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože trigonometrický polynom má periodu 2π, není možné bez úpravy aproximovat funkce, které nemají tuto periodu.

Protože trigonometrický polynom má periodu 2π, není možné bez úpravy aproximovat funkce, které nemají tuto periodu.

Pro funkce s periodou 2π je jedno na jakém intervalu délky 2π se funkce zkoumá. V dalším textu je brán interval $[-\pi, \pi]$, který je symetrický kolem 0. Často se bere interval $[0, 2\pi]$.

Klíčová otázka: Jak lze najít koeficienty a_n, b_n pro funkci f na intervalu $(-\pi, \pi)$ tak, aby $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$?

BTW, co může znamenat uvedená rovnost?

Pro výpočet koeficientů a_n, b_n se využije tzv. ortogonality funkcí $\sin(nx), \cos(nx)$:

Pro výpočet koeficientů a_n, b_n se využije tzv. ortogonality funkcí $\sin(nx), \cos(nx)$:

Kreslil jsem sinus a kosinus mockrát, ale kolmosti jsem si nevšiml.

Pro výpočet koeficientů a_n, b_n se využije tzv. ortogonality funkcí $\sin(nx), \cos(nx)$:

Kreslil jsem sinus a kosinus mockrát, ale kolmosti jsem si nevšiml.

VĚTA. Platí následující rovnosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\,\mathrm{dx} = 0 \text{ pro libovolná } n, k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,\mathrm{dx} = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \neq k; \\ \pi, & \text{pro } n = k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,\mathrm{dx} = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \neq k; \\ \pi, & \text{pro } n = k \in \mathbb{N}; \\ 2\pi, & \text{pro } n = k = 0. \end{cases}$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud by vás trápilo nedokázané tvrzení, vězte, že první rovnost je jednoduchá z lichosti integrované funkce. Další jsou trigonometrické vzorečky, které se ovšem dají nahradit mechanickým použitím rovnosti $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Pokud by vás trápilo nedokázané tvrzení, vězte, že první rovnost je jednoduchá z lichosti integrované funkce. Další jsou trigonometrické vzorečky, které se ovšem dají nahradit mechanickým použitím rovnosti $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Pokud trápení trvá, z předchozího se pokuste vyjádřit $\sin x = \ldots$ a $\cos x = \ldots$ jako výraz s e^{ix}. Pak dosaďte do integrálů a počítejte...

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vrať me se zpět k rovnosti $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

Vraťme se zpět k rovnosti $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

⬇

Obě strany rovnosti se vynásobí $\sin(kx)$ (nebo $\cos(kx)$) a zintegrují se.

⬇

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vrať me se zpět k rovnosti $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

⬇

Obě strany rovnosti se vynásobí $\sin(kx)$ (nebo $\cos(kx)$) a zintegrují se.

⬇

Pokud řada konverguje stejnoměrně, lze přehodit integrál a součet a použít orthogonalitu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\sin kx\,\mathrm{dx} = \pi b_k\,, \qquad k = 1, 2, ...$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\cos kx\,\mathrm{dx} = \begin{cases} \pi a_k, & \text{pro } k \neq 0; \\ 2\pi a_0, & \text{pro } k = 0. \end{cases}$$

⬇

Vrať me se zpět k rovnosti $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

Obě strany rovnosti se vynásobí $\sin(kx)$ (nebo $\cos(kx)$) a zintegrují se.

Pokud řada konverguje stejnoměrně, lze přehodit integrál a součet a použít orthogonalitu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\sin kx\,\mathrm{dx} = \pi b_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\cos kx\,\mathrm{dx} = \begin{cases}\pi a_k, & \text{pro } k \neq 0;\\ 2\pi a_0, & \text{pro } k = 0.\end{cases}$$

Skoro nikdo nepřežil. Jako morová rána.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Výsledkem jsou hledané koeficienty. Vzhledem k odlišnosti u a_k pro $k = 0$ a $k \neq 0$ se trigonometrická řada v následující definici formálně upraví.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Výsledkem jsou hledané koeficienty. Vzhledem k odlišnosti u a_k pro $k = 0$ a $k \neq 0$ se trigonometrická řada v následující definici formálně upraví.

Uvedené integrály obecně nemusí existovat. Budou existovat pro spojité omezené funkce.

Výsledkem jsou hledané koeficienty. Vzhledem k odlišnosti u a_k pro $k = 0$ a $k \neq 0$ se trigonometrická řada v následující definici formálně upraví.

Uvedené integrály obecně nemusí existovat. Budou existovat pro spojité omezené funkce.

Pro použití Fourierových řad je však třeba pracovat i s nespojitými funkcemi. Obecná teorie připouští značné nespojitosti, tento text se omezí na jednodušší funkce, pro které stačí zobecněný Newtonův integrál a znalosti dosud probrané.

Funkce na $[-\pi, \pi]$ se nazývá po částech hladká, jestliže existuje rozdělení $-\pi = p_0 < p_1 < ... < p_n = \pi$ takové, že f má na každém intervalu $[p_{i-1}, p_i]$ spojitou derivaci.

Funkce na $[-\pi, \pi]$ se nazývá po částech hladká, jestliže existuje rozdělení $-\pi = p_0 < p_1 < ... < p_n = \pi$ takové, že f má na každém intervalu $[p_{i-1}, p_i]$ spojitou derivaci.

$\Downarrow$

Periodická funkce f s periodou 2π se nazývá po částech hladká, jestliže zúžení f na $[-\pi, \pi]$ (nebo jiný uzavřený interval délky 2π) je po částech hladké.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(-\pi, \pi)$.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(-\pi, \pi)$.

Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{dx} \text{ pro } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{dx} \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(-\pi, \pi)$.

Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,\mathrm{dx} \text{ pro } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{dx} \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

se nazývá Fourierova řada funkce f.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(-\pi, \pi)$.

Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{dx} \text{ pro } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{dx} \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

se nazývá Fourierova řada funkce f.

Fourierova řada existuje pro po částech hladké funkce.

Následující linearita je zřejmá.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující linearita je zřejmá.

POZOROVÁNÍ. Jsou-li a_n, b_n (nebo a'_n, b'_n) Fourierovy koeficienty funkce f (resp. g), pak $\alpha a_n + \beta a'_n, \alpha b_n + \beta b'_n$ jsou Fourierovy koeficienty funkce $\alpha f + \beta g$.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující linearita je zřejmá.

POZOROVÁNÍ. Jsou-li a_n, b_n (nebo a'_n, b'_n) Fourierovy koeficienty funkce f (resp. g), pak $\alpha a_n + \beta a'_n, \alpha b_n + \beta b'_n$ jsou Fourierovy koeficienty funkce $\alpha f + \beta g$.

Více zatím nelze říci. Později budou uvedeny vztahy Fourierových koeficientů k derivaci a integraci funkcí.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

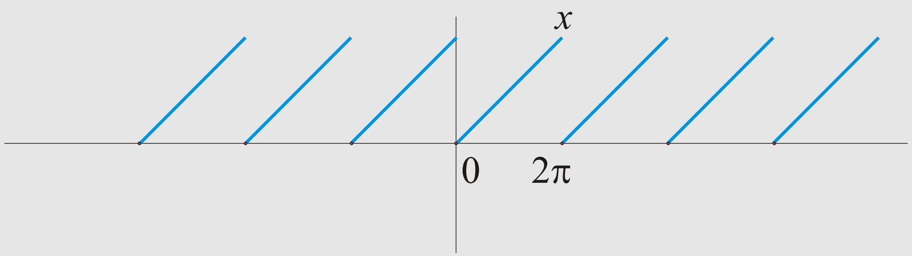
Má-li f periodu 2π, lze vzít v integrálech pro Fourierovy koeficienty libovolné jiné meze vzdálené od sebe 2π, např. $0, 2\pi$.

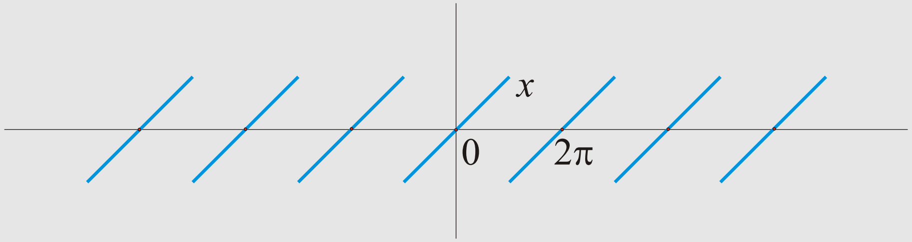
Poznámky 1 :

Má-li f periodu 2π, lze vzít v integrálech pro Fourierovy koeficienty libovolné jiné meze vzdálené od sebe 2π, např. $0, 2\pi$.

Často se aproximuje funkce, která není periodická. V tom případě se vezme nějaký interval délky 2π a v bodech mimo tento interval se funkce změní tak, aby vznikla funkce s periodou 2π rovná původní funkci na zvoleném intervalu.

Volbou intervalu tedy vytváříme z jedné funkce více různých 2π-periodických funkcí.





Také je možné nechat funkci s původními hodnotami na intervalu $(0, \pi)$, dodefinovat ji jako lichou (nebo sudou) na intervalu $(-\pi, 0)$ a pak periodicky prodloužit na $\mathbb{R}$.

Také je možné nechat funkci s původními hodnotami na intervalu $(0, \pi)$, dodefinovat ji jako lichou (nebo sudou) na intervalu $(-\pi, 0)$ a pak periodicky prodloužit na $\mathbb{R}$.

Příslušná Fourierova řada bude složená jen ze sinů nebo kosinů a dostává se tzv. sinová nebo kosinová Forierova řada dané funkce.

Z lineární algebry jsou známy pojmy *orthogonální (kolmé) vektory* v konečně - dimenzionálních prostorech a rozvoje prvků těchto prostorů pomocí orthogonální báze.

Z lineární algebry jsou známy pojmy *orthogonální (kolmé) vektory* v konečně - dimenzionálních prostorech a rozvoje prvků těchto prostorů pomocí orthogonální báze.

Tam n-tou souřadnici vektoru f získáte pomocí skalárního součinu $a_n = < f, e_n >$. Zde akorát roli skalárního součinu hraje integrál, roli bázových vekrorů funkce $\cos kx$ a $\sin kx$.

Z lineární algebry jsou známy pojmy *orthogonální (kolmé) vektory* v konečně - dimenzionálních prostorech a rozvoje prvků těchto prostorů pomocí orthogonální báze.

Tam n-tou souřadnici vektoru f získáte pomocí skalárního součinu $a_n = < f, e_n >$. Zde akorát roli skalárního součinu hraje integrál, roli bázových vekrorů funkce $\cos kx$ a $\sin kx$.

Fourierovy řady jsou zobecněním tohoto postupu na nekonečnou dimenzi. Protože se jedná o nekonečné operace, je potřeba konvergence a tedy např. pojem vzdálenosti.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z lineární algebry jsou známy pojmy *orthogonální (kolmé) vektory* v konečně - dimenzionálních prostorech a rozvoje prvků těchto prostorů pomocí orthogonální báze.

⬇

Tam n-tou souřadnici vektoru f získáte pomocí skalárního součinu $a_n = < f, e_n >$. Zde akorát roli skalárního součinu hraje integrál, roli bázových vekrorů funkce $\cos kx$ a $\sin kx$.

⬇

Fourierovy řady jsou zobecněním tohoto postupu na nekonečnou dimenzi. Protože se jedná o nekonečné operace, je potřeba konvergence a tedy např. pojem vzdálenosti.

⬇

Obecná teorie Fourierových řad se provádí v tzv. Hilbertových prostorech pomocí orthogonální báze.

⬇

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z lineární algebry jsou známy pojmy *orthogonální (kolmé) vektory* v konečně - dimenzionálních prostorech a rozvoje prvků těchto prostorů pomocí orthogonální báze.

Tam n-tou souřadnici vektoru f získáte pomocí skalárního součinu $a_n = < f, e_n >$. Zde akorát roli skalárního součinu hraje integrál, roli bázových vekrorů funkce $\cos kx$ a $\sin kx$.

Fourierovy řady jsou zobecněním tohoto postupu na nekonečnou dimenzi. Protože se jedná o nekonečné operace, je potřeba konvergence a tedy např. pojem vzdálenosti.

Obecná teorie Fourierových řad se provádí v tzv. Hilbertových prostorech pomocí orthogonální báze.

Tuto teorii není možné vyložit v tomto textu, náleží do funkcionální analýzy.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z lineární algebry jsou známy pojmy *orthogonální (kolmé) vektory* v konečně - dimenzionálních prostorech a rozvoje prvků těchto prostorů pomocí orthogonální báze.

Tam n-tou souřadnici vektoru f získáte pomocí skalárního součinu $a_n = < f, e_n >$. Zde akorát roli skalárního součinu hraje integrál, roli bázových vekrorů funkce $\cos kx$ a $\sin kx$.

Fourierovy řady jsou zobecněním tohoto postupu na nekonečnou dimenzi. Protože se jedná o nekonečné operace, je potřeba konvergence a tedy např. pojem vzdálenosti.

Obecná teorie Fourierových řad se provádí v tzv. Hilbertových prostorech pomocí orthogonální báze.

Tuto teorii není možné vyložit v tomto textu, náleží do funkcionální analýzy.

Je z ní mnohem lépe vidět různé souvislosti a vlastnosti.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z lineární algebry jsou známy pojmy *orthogonální (kolmé) vektory* v konečně - dimenzionálních prostorech a rozvoje prvků těchto prostorů pomocí orthogonální báze.

⬇

Tam n-tou souřadnici vektoru f získáte pomocí skalárního součinu $a_n = < f, e_n >$. Zde akorát roli skalárního součinu hraje integrál, roli bázových vekrorů funkce $\cos kx$ a $\sin kx$.

⬇

Fourierovy řady jsou zobecněním tohoto postupu na nekonečnou dimenzi. Protože se jedná o nekonečné operace, je potřeba konvergence a tedy např. pojem vzdálenosti.

⬇

Obecná teorie Fourierových řad se provádí v tzv. Hilbertových prostorech pomocí orthogonální báze.

⬇

Tuto teorii není možné vyložit v tomto textu, náleží do funkcionální analýzy.

⬇

Je z ní mnohem lépe vidět různé souvislosti a vlastnosti.

⬇

V závěrečných poznámkách budou uvedeny některé další příklady orthogonálních bází vhodných pro neperiodické funkce.

Konec poznámek 1.

Příklady 1 :

1. Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{pro } x \in (-\pi, 0); \\ 0, & \text{pro } x = 0 \text{ a } x = \pi; \\ 1, & \text{pro } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

dodefinované periodicky na $\mathbb{R}$.

2. Najděte Fourierovy řady následujících funkcí dodefinovaných periodicky na $\mathbb{R}$:

$$x \text{ na } [-\pi,\pi)\,, \quad x \text{ na } [0,2\pi)\,, \quad |x| \text{ na } [-\pi,\pi)\,, \quad |\sin x| \text{ na } [-\pi,\pi)\,.$$

3. Najděte Fourierovu sinovou i kosinovou řadu funkcí

$$\sin x \text{ na } [0,\pi)\,, \quad x \text{ na } [0,\pi)\,.$$

Konec příkladů 1.

Otázky 1 :

1. Je-li f lichá, jsou všechny koeficienty a_n rovny 0 a Fourierova řada bude složená jen z funkcí sinus.

2. Je-li f sudá, jsou všechny koeficienty b_n rovny 0 a Fourierova řada bude složená jen z funkcí kosinus.

3. Dokažte, že pokud je spojitá funkce f na $[-\pi, \pi]$ součtem stejnoměrně konvergentní řady $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, pak čísla a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Dokažte, že pokud je spojitá funkce f na $[-\pi, \pi]$ součtem stejnoměrně konvergentní řady $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, pak čísla a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

Toto tvrzení lze zobecnit i na po částech hladké funkce a bez předpokladu stejnoměrné konvergence.

3. Dokažte, že pokud je spojitá funkce f na $[-\pi,\pi]$ součtem stejnoměrně konvergentní řady $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$, pak čísla a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

⬇

Toto tvrzení lze zobecnit i na po částech hladké funkce a bez předpokladu stejnoměrné konvergence.

⬇

Na tomto místě se hodí podotknout, že ne každá konvergentní trigonometrická řada se spojitým součtem je Fourierovou řadou nějaké funkce.

Konec otázek 1.

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte Fourierovu řadu pro funkci f, která vznikne jako periodické rozšíření funkce signum z intervalu $(-\pi, \pi)$ na celé $\mathbb{R}$.

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte Fourierovu řadu pro funkci f, která vznikne jako periodické rozšíření funkce signum z intervalu $(-\pi, \pi)$ na celé $\mathbb{R}$.

Řešení. Všimněte si, že jde o lichou funkci, takže koeficienty

$$a_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

budou rovny nule.

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte Fourierovu řadu pro funkci f, která vznikne jako periodické rozšíření funkce signum z intervalu $(-\pi, \pi)$ na celé $\mathbb{R}$.

Řešení. Všimněte si, že jde o lichou funkci, takže koeficienty

$$a_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

budou rovny nule.

Nyní pojďme spočítat koeficienty b_n.

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte Fourierovu řadu pro funkci f, která vznikne jako periodické rozšíření funkce signum z intervalu $(-\pi, \pi)$ na celé $\mathbb{R}$.

Řešení. Všimněte si, že jde o lichou funkci, takže koeficienty

$$a_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

budou rovny nule.

Nyní pojďme spočítat koeficienty b_n.

Vyjdeme přímo z definice

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} x \sin nx \, \mathrm{d}x =$$

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte Fourierovu řadu pro funkci f, která vznikne jako periodické rozšíření funkce signum z intervalu $(-\pi, \pi)$ na celé $\mathbb{R}$.

Řešení. Všimněte si, že jde o lichou funkci, takže koeficienty

$$a_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

budou rovny nule.

Nyní pojďme spočítat koeficienty b_n.

Vyjdeme přímo z definice

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} x \sin nx \, \mathrm{d}x =$$

(nyní využijeme sudosti funkce - víte které?)

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte Fourierovu řadu pro funkci f, která vznikne jako periodické rozšíření funkce signum z intervalu $(-\pi, \pi)$ na celé $\mathbb{R}$.

Řešení. Všimněte si, že jde o lichou funkci, takže koeficienty

$$a_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

budou rovny nule.

Nyní pojďme spočítat koeficienty b_n.

Vyjdeme přímo z definice

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} x \sin nx \, \mathrm{d}x =$$

(nyní využijeme sudosti funkce - víte které?)

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{-2}{n\pi}((-1)^n - 1),$$

což je pro sudá n rovno nule a pro lichá rovno

$$\frac{4}{n\pi}.$$

což je pro sudá n rovno nule a pro lichá rovno

$$\frac{4}{n\pi}.$$

Hledaná Fourierova řada tedy bude

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

což je pro sudá n rovno nule a pro lichá rovno

$$\frac{4}{n\pi}.$$

Hledaná Fourierova řada tedy bude

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Neměly by Fourierovy řady počítat počítače?

což je pro sudá n rovno nule a pro lichá rovno

$$\frac{4}{n\pi}.$$

Hledaná Fourierova řada tedy bude

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Neměly by Fourierovy řady počítat počítače?

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ano, počítači.

Konec cvičení 1.

Učení 1 :

Jak mám rozšířit funkci z *otevřeného* intervalu na celou reálnou přímku? A jak se funkce definuje v krajních bodech? Dofefinuju to nulou a mám po starostech.

Učení 1 :

Jak mám rozšířit funkci z *otevřeného* intervalu na celou reálnou přímku? A jak se funkce definuje v krajních bodech? Dofefinuju to nulou a mám po starostech.

Některé věci se periodicky opakují. Třeba periodická funkce s limitou nula.

Pro každou lichou funkci jsou koeficienty a_n rovny nule. A pro sudou funkci jsou nenulové?

Pro každou lichou funkci jsou koeficienty a_n rovny nule. A pro sudou funkci jsou nenulové?

Jenom některé a jenom někdy. BTW 0 je sudá.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 1.

KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY

KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY

Pro aplikace není ani tak důležitá samotná konvergence Fourierovy řady, jako její konvergence k původní funkci.

KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY

Pro aplikace není ani tak důležitá samotná konvergence Fourierovy řady, jako její konvergence k původní funkci.

Je to problém obtížný, ale důležitý. Pro tento text stačí uvést jednodušší výsledky.

KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY

Pro aplikace není ani tak důležitá samotná konvergence Fourierovy řady, jako její konvergence k původní funkci.

Je to problém obtížný, ale důležitý. Pro tento text stačí uvést jednodušší výsledky.

V důkazech bude potřeba následující tvrzení:

KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY

Pro aplikace není ani tak důležitá samotná konvergence Fourierovy řady, jako její konvergence k původní funkci.

Je to problém obtížný, ale důležitý. Pro tento text stačí uvést jednodušší výsledky.

V důkazech bude potřeba následující tvrzení:

LEMMA. Nechť f je po částech hladká v $[-\pi, \pi]$. Pak Fourierovy koeficienty funkce f konvergují k 0.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Integrál přes $[0, 2\pi]$ je součtem konečně mnoha integrálů přes menší uzavřené intervaly, kde f je spojitá a má na nich spojitou derivaci; nechť (a, b) je jeden z takových intervalů.

Důkaz. Integrál přes $[0, 2\pi]$ je součtem konečně mnoha integrálů přes menší uzavřené intervaly, kde f je spojitá a má na nich spojitou derivaci; nechť (a, b) je jeden z takových intervalů.

Stačí ukázat, že $\int_a^b f(x) \cos(nx) \,\mathrm{dx} \to 0$ s rostoucím n (důkaz pro koeficienty a_n je obdobný).

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Integrál přes $[0, 2\pi]$ je součtem konečně mnoha integrálů přes menší uzavřené intervaly, kde f je spojitá a má na nich spojitou derivaci; nechť (a, b) je jeden z takových intervalů.

Stačí ukázat, že $\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{dx} \to 0$ s rostoucím n (důkaz pro koeficienty a_n je obdobný).

Poslední integrál se zintegruje po částech:

$$\int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{n}[f(x)\cos(nx)]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\,\mathrm{dx}\,.$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Integrál přes $[0, 2\pi]$ je součtem konečně mnoha integrálů přes menší uzavřené intervaly, kde f je spojitá a má na nich spojitou derivaci; nechť (a, b) je jeden z takových intervalů.

Stačí ukázat, že $\int_a^b f(x) \cos(nx)\,\mathrm{dx} \to 0$ s rostoucím n (důkaz pro koeficienty a_n je obdobný).

Poslední integrál se zintegruje po částech:

$$\int_a^b f(x) \sin(nx)\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{n}[f(x) \cos(nx)]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x) \cos nx\,\mathrm{dx}\,.$$

Z předpokladů o funkci f nyní vyplývá, že $|\int_a^b f(x) \sin(nx)\,\mathrm{dx}| \leq K/n$ pro nějakou konstantu K, což dokazuje tvrzení. ◇

V následujícím textu se bude kvůli stručnějším zápisům značit

$$f(a_+) = \lim_{x \to a_+} f(x)\,, \quad f(a_-) = \lim_{x \to a_-} f(x) \quad \widehat{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))\,.$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V následujícím textu se bude kvůli stručnějším zápisům značit

$$f(a_+) = \lim_{x\to a_+} f(x)\,, \quad f(a_-) = \lim_{x\to a_-} f(x) \quad \widehat{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))\,.$$

Kvituji s povděkem.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V následujícím textu se bude kvůli stručnějším zápisům značit

$$f(a_+) = \lim_{x\to a_+} f(x)\,, \quad f(a_-) = \lim_{x\to a_-} f(x) \quad \widehat{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))\,.$$

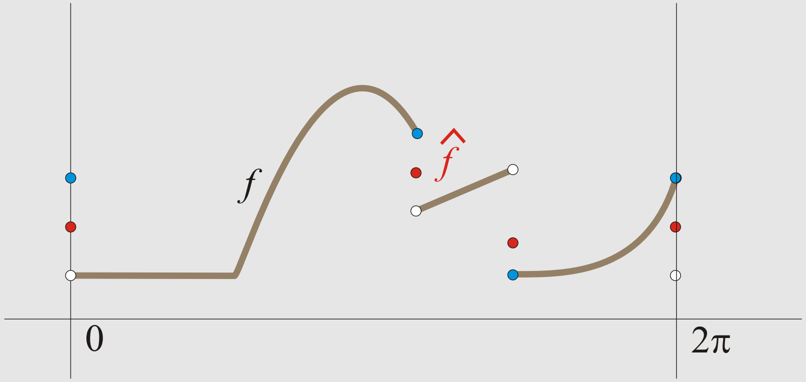
Kvituji s povděkem.

Protože f je buď periodická nebo se periodicky dodefinovává, znamená $f(-\pi_-)$ totéž co $f(\pi_-)$, apod. $f(-\pi_+) = f(\pi_+)$.

Pro po částech hladké funkce f je $\widehat{f}$ definovaná všude a souhlasí s f právě v bodech spojitosti f.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro po částech hladké funkce f je $\widehat{f}$ definovaná všude a souhlasí s f právě v bodech spojitosti f.



VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $[-\pi,\pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje k funkci $\widehat{f}$ v každém bodě $p \in [-\pi,\pi]$ (a tedy k $f(p)$ v bodech spojitosti funkce f).

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje k funkci $\widehat{f}$ v každém bodě $p \in [-\pi, \pi]$ (a tedy k $f(p)$ v bodech spojitosti funkce f).

Konvergence je stejnoměrná na intervalu ležícím uvnitř intervalu, kde má f spojitou derivaci.

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje k funkci $\widehat{f}$ v každém bodě $p \in [-\pi, \pi]$ (a tedy k $f(p)$ v bodech spojitosti funkce f).

Konvergence je stejnoměrná na intervalu ležícím uvnitř intervalu, kde má f spojitou derivaci.

Co víc si můžeme přát?

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje k funkci $\widehat{f}$ v každém bodě $p \in [-\pi, \pi]$ (a tedy k $f(p)$ v bodech spojitosti funkce f).

⬇

Konvergence je stejnoměrná na intervalu ležícím uvnitř intervalu, kde má f spojitou derivaci.

⬇

Co víc si můžeme přát?

⬇

Jinak to ani nemohlo dopadnout.

Důkaz. Má se dokázat, že $\widehat{f}(p) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(np) + b_n \sin(np))$, tj, že

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Má se dokázat, že $\widehat{f}(p) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(np) + b_n \sin(np))$, **tj, že**

Teď se nelekněte toho skoku, je za ním kus úmorného počítání a je celý rozebrán v otázkách

Důkaz. Má se dokázat, že $\widehat{f}(p) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(np) + b_n \sin(np))$, tj, že

Teď se nelekněte toho skoku, je za ním kus úmorného počítání a je celý rozebrán v otázkách

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+p) - \widehat{f}(p)) \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} \,\mathrm{dx} = 0\,.$$

Důkaz. Má se dokázat, že $\widehat{f}(p) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(np) + b_n \sin(np))$, tj, že

⬇

Teď se nelekněte toho skoku, je za ním kus úmorného počítání a je celý rozebrán v otázkách

⬇

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+p) - \widehat{f}(p)) \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} \,\mathrm{dx} = 0\,.$$

⬇

Rozepíše-li se $\sin(n+1/2)x$ podle součtového vzorce, má funkce v posledním integrálu tvar

$$(f(x+p) - \widehat{f}(p)) \cos(nx) + 2\cos(x/2) \frac{f(x+p) - \widehat{f}(p)}{x} \frac{x/2}{\sin(x/2)} \sin(nx)$$

a její integrál je tedy součet kosinového Fourierova koeficientu funkce $f(x+p) - \widehat{f}(p)$ a sinového Fourierova koeficientu uvedené další funkce.

⬇

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Má se dokázat, že $\widehat{f}(p) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(np) + b_n \sin(np))$, tj, že

Teď se nelekněte toho skoku, je za ním kus úmorného počítání a je celý rozebrán v otázkách

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+p) - \widehat{f}(p)) \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} \,\mathrm{dx} = 0\,.$$

Rozepíše-li se $\sin(n+1/2)x$ podle součtového vzorce, má funkce v posledním integrálu tvar

$$(f(x+p) - \widehat{f}(p))\cos(nx) + 2\cos(x/2)\frac{f(x+p) - \widehat{f}(p)}{x}\frac{x/2}{\sin(x/2)}\sin(nx)$$

a její integrál je tedy součet kosinového Fourierova koeficientu funkce $f(x+p) - \widehat{f}(p)$ a sinového Fourierova koeficientu uvedené další funkce.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obě tyto funkce jsou po částech hladké (pro druhou funkci je tu potřeba existence derivace $f'(p)$ zprava a zleva).

Obě tyto funkce jsou po částech hladké (pro druhou funkci je tu potřeba existence derivace $f'(p)$ zprava a zleva).

Podle předchozího lemmatu tyto koeficienty konvergují k 0, což dokončuje důkaz prvního tvrzení věty.

Obě tyto funkce jsou po částech hladké (pro druhou funkci je tu potřeba existence derivace $f'(p)$ zprava a zleva).

Podle předchozího lemmatu tyto koeficienty konvergují k 0, což dokončuje důkaz prvního tvrzení věty.

Důkaz lemmatu o konvergenci Fourierových koeficientů k 0 ukazuje, že právě dokazovaná konvergence je stejnoměrná vzhledem k $p \in [a, b]$ – použije se tu fakt, že f' je spojitá na $[a, b]$.

Obě tyto funkce jsou po částech hladké (pro druhou funkci je tu potřeba existence derivace $f'(p)$ zprava a zleva).

⬇

Podle předchozího lemmatu tyto koeficienty konvergují k 0, což dokončuje důkaz prvního tvrzení věty.

⬇

Důkaz lemmatu o konvergenci Fourierových koeficientů k 0 ukazuje, že právě dokazovaná konvergence je stejnoměrná vzhledem k $p \in [a, b]$ – použije se tu fakt, že f' je spojitá na $[a, b]$.

⬇

Odtud plyne poslední tvrzení věty o stejnoměrné konvergenci. $\diamond$

Ať je vztah mezi f a její Fourierovou řadou jakýkoli, platí následující rovnost

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ať je vztah mezi f a její Fourierovou řadou jakýkoli, platí následující rovnost

VĚTA. (Parseval) Nechť f je definovaná na $[-\pi, \pi]$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx}$ konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\,,$$

kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

Ať je vztah mezi f a její Fourierovou řadou jakýkoli, platí následující rovnost

VĚTA. (Parseval) Nechť f je definovaná na $[-\pi,\pi]$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx}$ konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\,,$$

kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

Opět platí paralela s normovaným vektorovým prostorem. Je to obdoba vatahu pro normu vektoru v euklidovském prostoru.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je to prostě Pythagorova věta. Kdo nevěří?

Je to prostě Pythagorova věta. Kdo nevěří?

Koukám, že je to navíc stroj na sčítání (některých) řad. Alespoň nějaká radost …

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Důkaz bude proveden jen pro stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady k f.

Důkaz. Důkaz bude proveden jen pro stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady k f.

⇓

Pak lze zaměnit pořadí součtu a integrálu:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) f(x)\,\mathrm{dx} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\Big)\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{dx} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\,\mathrm{dx} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx}\Big) \\
&= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\,.
\end{aligned}$$

◇

Důsledkem Parsevalovy rovnosti je její zobecnění:

Důsledkem Parsevalovy rovnosti je její zobecnění:

VĚTA. (Parseval) Nechť f,g jsou definované na $(0,2\pi)$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx}$, $\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\,\mathrm{dx}$ konvergují. Pak

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a_0a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_na_n' + b_nb_n')\,,$$

kde a_n, b_n (nebo a_n', b_n') jsou Fourierovy koeficienty funkce f (resp. g).

Důkaz. Parsevalova rovnost pro $f \pm g$ dává

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) \pm g(x))^2\,\mathrm{dx} = \frac{(a_0 \pm a_0')^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}((a_n \pm a_n')^2 + (b_n \pm b_n')^2)\,.$$

Důkaz. Parsevalova rovnost pro $f \pm g$ dává

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) \pm g(x))^2\,\mathrm{dx} = \frac{(a_0 \pm a_0')^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}((a_n \pm a_n')^2 + (b_n \pm b_n')^2)\,.$$

Zobecněná Parsevalova rovnost nyní plyne ze vzorce $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ odečtením uvedených dvou Parsevalových rovností. $\diamond$

Poznámky 2 :

Konvergence.

Poznámky 2 :

Konvergence.

Vět o konvergenci Fourierových řad je mnoho.

Poznámky 2 :

Konvergence.

⬇

Vět o konvergenci Fourierových řad je mnoho.

⬇

Je nutné se zmínit, že existuje spojitá funkce s periodou 2π, jejíž Fourierova řada nekonverguje v nekonečně mnoha bodech na intervalu $(-\pi, \pi)$ – tyto body jsou navíc hustě rozloženy v intervalu.

⬇

Poznámky 2 :

Konvergence.

Vět o konvergenci Fourierových řad je mnoho.

Je nutné se zmínit, že existuje spojitá funkce s periodou 2π, jejíž Fourierova řada nekonverguje v nekonečně mnoha bodech na intervalu $(-\pi, \pi)$ – tyto body jsou navíc hustě rozloženy v intervalu.

Další hodně používané tvrzení o konvergenci je následující: *Je-li f po částech monotónní v $(-\pi, \pi)$ a má tam jen konečně mnoho bodů nespojitosti, konverguje její Fourierova řada k funkci $\widehat{f}$.*

Poznámky 2 :

Konvergence.

⬇

Vět o konvergenci Fourierových řad je mnoho.

⬇

Je nutné se zmínit, že existuje spojitá funkce s periodou 2π, jejíž Fourierova řada nekonverguje v nekonečně mnoha bodech na intervalu $(-\pi, \pi)$ – tyto body jsou navíc hustě rozloženy v intervalu.

⬇

Další hodně používané tvrzení o konvergenci je následující: *Je-li f po částech monotónní v $(-\pi, \pi)$ a má tam jen konečně mnoho bodů nespojitosti, konverguje její Fourierova řada k funkci $\widehat{f}$.*

⬇

V tomto tvrzení není třeba předpokládat existenci derivací. Ostatní tvrzení o konvergenci jsou složitější. Některá tvrzení dávají podmínky pro konvergenci v jednom zada-

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ném bodě.

Aproximace funkcí.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aproximace funkcí.

Lemma o konvergenci Fourierových koeficientů k 0 platí pro obecnější funkce než po částech hladké.

Aproximace funkcí.

⬇

Lemma o konvergenci Fourierových koeficientů k 0 platí pro obecnější funkce než po částech hladké.

⬇

Musí se předpokládat, ža $|f|$ je integrovatelná Pak stačí, když existuje po částech hladká funkce g na $[-\pi,\pi]$ tak, že $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{dx}<\varepsilon$, pro dané kladné ε. Platí

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx}\Big| &\le \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{dx} + \Big|\int_a^b g(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx}\Big| \\ &\le \varepsilon + \Big|\int_a^b g(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx}\Big|. \end{aligned}$$

⬇

Aproximace funkcí.

Lemma o konvergenci Fourierových koeficientů k 0 platí pro obecnější funkce než po částech hladké.

Musí se předpokládat, ža $|f|$ je integrovatelná Pak stačí, když existuje po částech hladká funkce g na $[-\pi, \pi]$ tak, že $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{dx} < \varepsilon$, pro dané kladné ε. Platí

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^b f(x) \sin(nx) \,\mathrm{dx} \Big| &\le \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{dx} + \Big| \int_a^b g(x) \sin(nx) \,\mathrm{dx} \Big| \\ &\le \varepsilon + \Big| \int_a^b g(x) \sin(nx) \,\mathrm{dx} \Big| . \end{aligned}$$

Tím se převede problém na po částech hladké funkce.

Aproximace funkcí.

Lemma o konvergenci Fourierových koeficientů k 0 platí pro obecnější funkce než po částech hladké.

Musí se předpokládat, ža $|f|$ je integrovatelná Pak stačí, když existuje po částech hladká funkce g na $[-\pi,\pi]$ tak, že $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{dx} < \varepsilon$, pro dané kladné ε. Platí

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx}\Big| &\le \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{dx} + \Big|\int_a^b g(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx}\Big| \\ &\le \varepsilon + \Big|\int_a^b g(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx}\Big| .\end{aligned}$$

Tím se převede problém na po částech hladké funkce.

Lemma vyplývá i z tzv. Besselovy nerovnosti

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx} \ge \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\,,$$

která se dá dokázat minimalizací integrálu čtverce rozdílu f a trigonometrických polynomů (anebo vyplyne snadno z obecné teorie v Hilbertových prostorech).

Parsevalova rovnost. Důkaz uvedeného tvrzení je složitější a proto byl uveden důkaz jen pro speciální případ.

Parsevalova rovnost. Důkaz uvedeného tvrzení je složitější a proto byl uveden důkaz jen pro speciální případ.

Parsevalova rovnost je totiž ekvivalentní tzv. úplnosti trigonometrického systému, což např. znamená (je více ekvivalentních formulací), že každá spojitá funkce f lze aproximovat trigonometrickými polynomy T v tom smyslu, že $\int_{-\pi}^{\pi}(f-T)^2$ je libovolně malý pro vhodná T.

Parsevalova rovnost. Důkaz uvedeného tvrzení je složitější a proto byl uveden důkaz jen pro speciální případ.

Parsevalova rovnost je totiž ekvivalentní tzv. úplnosti trigonometrického systému, což např. znamená (je více ekvivalentních formulací), že každá spojitá funkce f lze aproximovat trigonometrickými polynomy T v tom smyslu, že $\int_{-\pi}^{\pi}(f-T)^2$ je libovolně malý pro vhodná T.

Důkaz úplnosti není jednoduchý.

Parsevalova rovnost funguje jako Pythagorova věta. Pomocí ní se počítá například v kvádru xyz tělesová úhlopříčka $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Parsevalova rovnost funguje jako Pythagorova věta. Pomocí ní se počítá například v kvádru xyz tělesová úhlopříčka $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

To jde pokud máme opravdu tři kolmé směry x, y a z. Pokud by jeden směr chyběl, byla by z toho Pythagorova nerovnost $u^2 \geq x^2 + y^2$.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Parsevalova rovnost funguje jako Pythagorova věta. Pomocí ní se počítá například v kvádru xyz tělesová úhlopříčka $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

To jde pokud máme opravdu tři kolmé směry x, y a z. Pokud by jeden směr chyběl, byla by z toho Pythagorova nerovnost $u^2 \geq x^2 + y^2$.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A to je ta "úplnost". Trigonometrickým polynomům nic "nechybí". Pokud bychom ten systém zmenšili (například vyhodili kvůli pověrčivosti $\sin(13x)$), neplatila by Parsevalova rovnost.

Jó, takový úplný ortogonální systém, ten se dá vyvažovat zlatem.

Konec poznámek 2.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

1. Nakreslete, k čemu konvergují Fourierovy řady z předchozích *Příkladů*.

2. Dosazením vhodných čísel za x do předchozích Fourierových řad sečtěte různé číselné řady, např.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,, \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,, \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

2. Dosazením vhodných čísel za x do předchozích Fourierových řad sečtěte různé číselné řady, např.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

To je někdy jako hledání jehly v kupce sena. Pište si spočtené Fourierovy řady na zeď a budete rádi, že je tam máte.

3. Při použití Parsevalovy rovnosti pro součet číselných řad není třeba ověřovat žádné podmínky konvergence.

3. Při použití Parsevalovy rovnosti pro součet číselných řad není třeba ověřovat žádné podmínky konvergence.

Použijte např. Parsevalovu rovnost pro funkci $|x|$ a dostanete součet $\sum \frac{1}{(2n+1)^4}$.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Při použití Parsevalovy rovnosti pro součet číselných řad není třeba ověřovat žádné podmínky konvergence.

Použijte např. Parsevalovu rovnost pro funkci $|x|$ a dostanete součet $\sum \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Vyzkoušejte i pro další Fourierovy řady z minulých příkladů.

3. Při použití Parsevalovy rovnosti pro součet číselných řad není třeba ověřovat žádné podmínky konvergence.

⬇

Použijte např. Parsevalovu rovnost pro funkci $|x|$ a dostanete součet $\sum \frac{1}{(2n+1)^4}$.

⬇

Vyzkoušejte i pro další Fourierovy řady z minulých příkladů.

⬇

Dosazením vhodných hodnot do Parsevalovy rovnosti dostanete součty různých číselných řad.

⬇

3. Při použití Parsevalovy rovnosti pro součet číselných řad není třeba ověřovat žádné podmínky konvergence.

Použijte např. Parsevalovu rovnost pro funkci $|x|$ a dostanete součet $\sum \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Vyzkoušejte i pro další Fourierovy řady z minulých příkladů.

Dosazením vhodných hodnot do Parsevalovy rovnosti dostanete součty různých číselných řad.

Zkuste např. sečíst $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$.

4. Ukažte, že

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad \text{na } [0, 2\pi) .$$

4. Ukažte, že

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \qquad \text{na } [0, 2\pi)\,.$$

Když se ale zadaří, máte Parsevalovu rovnost a tak, je to PARÁDA.

Konec příkladů 2.

Otázky 2 :

1. Ukažte, že trigonometrická řada $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ konverguje absolutně a stejnoměrně pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ konverguje.

2. Ukažte, že pro spojitou a po částech hladkou funkci f konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$, kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f. (Důkaz je snadný při použití integrace Fourierovy řady z další části textu.)

3. Dosazením definic Fourierových koeficientů do k-tého částečného součtu Fourierovy řady dostanete (ověřte)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cos(2(t-x)) + \ldots + \cos(k(t-x))\Big)\, \mathrm{d}t\,.$$

3. Dosazením definic Fourierových koeficientů do k-tého částečného součtu Fourierovy řady dostanete (ověřte)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2}+\cos(t-x)+\cos(2(t-x))+\ldots+\cos(k(t-x))\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Součet kosinů se rovná

$$\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin(t-x)/2}$$

(dokažte tuto rovnost např. pomocí vzorce $2\cos(ny)\sin(y/2)=\sin(n+1/2)y-\sin(n-1/2)y$.)

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Dosazením definic Fourierových koeficientů do k-tého částečného součtu Fourierovy řady dostanete (ověřte)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cos(2(t-x)) + \ldots + \cos(k(t-x))\Big)\ \mathrm{d}t\,.$$

⬇

Součet kosinů se rovná

$$\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin(t-x)/2}$$

(dokažte tuto rovnost např. pomocí vzorce $2\cos(ny)\sin(y/2) = \sin(n+1/2)y - \sin(n-1/2)y$.)

⬇

Nebo by to opět šlo použitím $\cos x = (e^{ix}+e^{-ix})/2$ a $\sin x = (e^{ix}-e^{-ix})/2i$

⬇

3. Dosazením definic Fourierových koeficientů do k-tého částečného součtu Fourierovy řady dostanete (ověřte)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2}+\cos(t-x)+\cos(2(t-x))+\ldots+\cos(k(t-x))\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

⬇

Součet kosinů se rovná

$$\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin(t-x)/2}$$

(dokažte tuto rovnost např. pomocí vzorce $2\cos(ny)\sin(y/2)=\sin(n+1/2)y-\sin(n-1/2)y$.)

⬇

Nebo by to opět šlo použitím $\cos x=(e^{ix}+e^{-ix})/2$ a $\sin x=(e^{ix}-e^{-ix})/2i$

⬇

Po malé úpravě dostáváte tzv. Dirichletovu rovnost použitou v důkazu věty o konver-

genci, totiž že k-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f se rovná

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2}\,\mathrm{d}t\,.$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

genci, totiž že k-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f se rovná

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Mezi námi, dokázat to jde jako po másle. Kdo na to však mohl přijít, to nevím.

genci, totiž že k-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f se rovná

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2}\ \mathrm{d}t\,.$$

Mezi námi, dokázat to jde jako po másle. Kdo na to však mohl přijít, to nevím.

Odhaduji to na kouzelníka první kategorie.

3. Nechť a je reálné necelé číslo. Ukažte, že Fourierova řada funkce $\cos(ax)$ na intervalu $(-\pi,\pi)$ je rovna

$$\frac{\sin(\pi a}{\pi a} + \frac{(-1)^n 2a\sin(\pi a)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{a^2-n^2}\,.$$

3. Nechť a je reálné necelé číslo. Ukažte, že Fourierova řada funkce $\cos(ax)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ je rovna

$$\frac{\sin(\pi a}{\pi a} + \frac{(-1)^n 2a \sin(\pi a)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{a^2 - n^2}\,.$$

Dosazením $x = 0$ dostanete rovnost

$$\frac{\pi}{\sin \pi a} = \frac{1}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a}{n^2 - a^2}\,.$$

3. Nechť a je reálné necelé číslo. Ukažte, že Fourierova řada funkce $\cos(ax)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ je rovna

$$\frac{\sin(\pi a}{\pi a} + \frac{(-1)^n 2a \sin(\pi a)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{a^2 - n^2} \, .$$

Dosazením $x = 0$ dostanete rovnost

$$\frac{\pi}{\sin \pi a} = \frac{1}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a}{n^2 - a^2} \, .$$

Dosazením do vyjádření funkce $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ se získá důležitý vzorec

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \, .$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Nechť a je reálné necelé číslo. Ukažte, že Fourierova řada funkce $\cos(ax)$ na intervalu $(-\pi,\pi)$ je rovna

$$\frac{\sin(\pi a}{\pi a} + \frac{(-1)^n 2a\sin(\pi a)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{a^2-n^2}\,.$$

Dosazením $x=0$ dostanete rovnost

$$\frac{\pi}{\sin \pi a} = \frac{1}{a} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{n^2-a^2}\,.$$

Dosazením do vyjádření funkce $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ se získá důležitý vzorec

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\,.$$

Když to budu umět, budu si říkat Šaman.

Konec otázek 2.

DERIVACE A INTEGRACE FOURIEROVÝCH ŘAD

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DERIVACE A INTEGRACE FOURIEROVÝCH ŘAD

Integrace Fourierových řad je jednodušší než derivace a dává zajímavý výsledek, bez ohledu na to, zda Fourierova řada k dané funkci konverguje nebo nikoli.

DERIVACE A INTEGRACE FOURIEROVÝCH ŘAD

Integrace Fourierových řad je jednodušší než derivace a dává zajímavý výsledek, bez ohledu na to, zda Fourierova řada k dané funkci konverguje nebo nikoli.

VĚTA. Nechť $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ je Fourierova řada funkce f na $[-\pi, \pi]$, pro kterou konverguje $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, \mathrm{dx}$.

DERIVACE A INTEGRACE FOURIEROVÝCH ŘAD

Integrace Fourierových řad je jednodušší než derivace a dává zajímavý výsledek, bez ohledu na to, zda Fourierova řada k dané funkci konverguje nebo nikoli.

VĚTA. Nechť $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ je Fourierova řada funkce f na $[-\pi, \pi]$, pro kterou konverguje $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \,\mathrm{dx}$.

Pak pro libovolný interval $(a, b) \subset [0, 2\pi]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \frac{a_0}{2}\,\mathrm{dx} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_a^b (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\,\mathrm{dx}\,,$$

a uvedená řada integrálů konverguje stejnoměrně.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukážeme, že funkci lze "rozebrat na částečky", ty zintegrovat (najít jejich primitivní funkce) a po jejich složení získat integrál původní funkce.

Ukážeme, že funkci lze "rozebrat na částečky", ty zintegrovat (najít jejich primitivní funkce) a po jejich složení získat integrál původní funkce.

Důkaz. Funkce f má (zobecněnou) primitivní funkci $F(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$, která je spojitá a po částech hladká.

Ukážeme, že funkci lze "rozebrat na částečky", ty zintegrovat (najít jejich primitivní funkce) a po jejich složení získat integrál původní funkce.

Důkaz. Funkce f má (zobecněnou) primitivní funkci $F(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{dx}$, která je spojitá a po částech hladká.

Funkce $F(x) - a_0x/2$ má navíc periodu 2π (ověřte). Podle věty o konvergenci konverguje Fourierova řada funkce $F(x) - a_0x/2$ stejnoměrně k $F(x) - a_0x/2$.

Ukážeme, že funkci lze "rozebrat na částečky", ty zintegrovat (najít jejich primitivní funkce) a po jejich složení získat integrál původní funkce.

Důkaz. Funkce f má (zobecněnou) primitivní funkci $F(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{dx}$, která je spojitá a po částech hladká.

Funkce $F(x) - a_0x/2$ má navíc periodu 2π (ověřte). Podle věty o konvergenci konverguje Fourierova řada funkce $F(x) - a_0x/2$ stejnoměrně k $F(x) - a_0x/2$.

Označí-li se příslušné Fourierovy koeficienty funkce $F(x) - a_0x/2$ po řadě A_n, B_n, pak snadný výpočet dá pro $n > 0$

$$A_n = -\frac{b_n}{n}, \quad B_n = \frac{a_n}{n}.$$

Ukážeme, že funkci lze "rozebrat na částečky", ty zintegrovat (najít jejich primitivní funkce) a po jejich složení získat integrál původní funkce.

Důkaz. Funkce f má (zobecněnou) primitivní funkci $F(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{dx}$, která je spojitá a po částech hladká.

Funkce $F(x) - a_0x/2$ má navíc periodu 2π (ověřte). Podle věty o konvergenci konverguje Fourierova řada funkce $F(x) - a_0x/2$ stejnoměrně k $F(x) - a_0x/2$.

Označí-li se příslušné Fourierovy koeficienty funkce $F(x) - a_0x/2$ po řadě A_n, B_n, pak snadný výpočet dá pro $n > 0$

$$A_n = -\frac{b_n}{n}\,, \quad B_n = \frac{a_n}{n}\,.$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

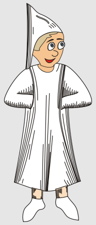
Odtud vyplývá

$$F(x) = \int_0^x \frac{a_0}{2}\,\mathrm{dx} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\,\mathrm{dx}\,,$$

což dává tvrzení věty. $\diamond$

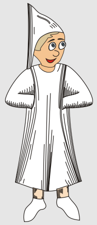
Uvedené vyjádření primitivní funkce $F(x)$ není ovšem Fourierovou řadou pokud $a_0 \neq 0$:

Uvedené vyjádření primitivní funkce $F(x)$ není ovšem Fourierovou řadou pokud $a_0 \neq 0$:



Něco nám tam nehraje, co …

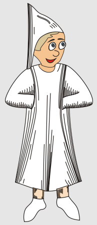
Uvedené vyjádření primitivní funkce $F(x)$ není ovšem Fourierovou řadou pokud $a_0 \neq 0$:



Něco nám tam nehraje, co …

$$F(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin(nx) - b_n(\cos(nx) - 1)}{n}\,.$$

Uvedené vyjádření primitivní funkce $F(x)$ není ovšem Fourierovou řadou pokud $a_0 \neq 0$:



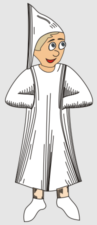
Něco nám tam nehraje, co …

$$F(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin(nx) - b_n(\cos(nx) - 1)}{n} \,.$$

Aby se dostala Fourierova řada, musí se funkce x nahradit její Fourierovou řadou (viz *Příklady*).

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedené vyjádření primitivní funkce $F(x)$ není ovšem Fourierovou řadou pokud $a_0 \neq 0$:



Něco nám tam nehraje, co ...

$$F(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin(nx) - b_n(\cos(nx) - 1)}{n} \,.$$

Aby se dostala Fourierova řada, musí se funkce x nahradit její Fourierovou řadou (viz *Příklady*).

Pokud se zvolí periodické rozšíření funkce x z $[-\pi, \pi)$ a dosadí se do předchozího

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

vzorce, dostane se (řady konvergují absolutně a lze je tedy vhodně přehazovat)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos(nx) + (a_n - (-1)^n a_0)\sin(nx)}{n} .$$

vzorce, dostane se (řady konvergují absolutně a lze je tedy vhodně přehazovat)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos(nx) + (a_n - (-1)^n a_0) \sin(nx)}{n} .$$

Důsledkem rovnosti je absolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n$, jakmile konverguje $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \,\mathrm{dx}$.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Derivace Fourierovy řady nemusí být Fourierovou řadou žádné funkce (viz *Příklady*).

Derivace Fourierovy řady nemusí být Fourierovou řadou žádné funkce (viz *Příklady*).

Derivace Fourierovy řady nemusí být Fourierovou řadou žádné funkce (viz *Příklady*).

Fourierovy koeficienty funkce f' lze ale snadno odvodit z Fourierových koeficientů funkce f použitím předchozí části o integraci.

Derivace Fourierovy řady nemusí být Fourierovou řadou žádné funkce (viz *Příklady*).

Fourierovy koeficienty funkce f' lze ale snadno odvodit z Fourierových koeficientů funkce f použitím předchozí části o integraci.

VĚTA. Nechť f je po částech hladká funkce na $[-\pi,\pi]$, jejíž derivace je absolutně integrovatelná a a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f. Pak Fourierovy koeficienty a'_n, b'_n funkce f' se dají vyjádřit následovně:

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} f(2\pi) - f(0)\,, \quad a_n = (-1)^n a'_0 + n b_n\,, \quad b'_n = -n a_n\,.$$

Derivace Fourierovy řady nemusí být Fourierovou řadou žádné funkce (viz *Příklady*).

Fourierovy koeficienty funkce f' lze ale snadno odvodit z Fourierových koeficientů funkce f použitím předchozí části o integraci.

VĚTA. Nechť f je po částech hladká funkce na $[-\pi, \pi]$, jejíž derivace je absolutně integrovatelná a a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f. Pak Fourierovy koeficienty a'_n, b'_n funkce f' se dají vyjádřit následovně:

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} f(2\pi) - f(0)\,, \quad a_n = (-1)^n a'_0 + n b_n\,, \quad b'_n = -n a_n\,.$$

DŮSLEDEK. Nechť f je spojitá funkce s periodou 2π, po částech hladká, jejíž derivace je absolutně integrovatelná. Pak Fourierova řada pro f' se získá z Fourierovy řady pro f

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

derivací člen po členu a je rovna

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos(nx) - a_n \sin(nx)) \,.$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Jestliže $\int_{-\pi}^{\pi} f^2$ konverguje, dá se Fourierova řada vždycky integrovat člen po členu a součtem je integrál z f přes stejný interval.

Poznámky 3 :

Jestliže $\int_{-\pi}^{\pi} f^2$ konverguje, dá se Fourierova řada vždycky integrovat člen po členu a součtem je integrál z f přes stejný interval.

$\Downarrow$

Toto tvrzení dává velkou třídu řad, které nekonvergují stejnoměrně a přesto se dají integrovat člen po členu.

$\Downarrow$

Poznámky 3 :

Jestliže $\int_{-\pi}^{\pi} f^2$ konverguje, dá se Fourierova řada vždycky integrovat člen po členu a součtem je integrál z f přes stejný interval.

⬇

Toto tvrzení dává velkou třídu řad, které nekonvergují stejnoměrně a přesto se dají integrovat člen po členu.

⬇

Za předpokladů první věty se dá Fourierova řada derivovat člen po členu, i když příslušná Fourierova řada derivace nekonverguje stejnoměrně.

⬇

Poznámky 3 :

Jestliže $\int_{-\pi}^{\pi} f^2$ konverguje, dá se Fourierova řada vždycky integrovat člen po členu a součtem je integrál z f přes stejný interval.

$\Downarrow$

Toto tvrzení dává velkou třídu řad, které nekonvergují stejnoměrně a přesto se dají integrovat člen po členu.

$\Downarrow$

Za předpokladů první věty se dá Fourierova řada derivovat člen po členu, i když příslušná Fourierova řada derivace nekonverguje stejnoměrně.

$\Downarrow$

Obě věty o integrování a derivování se hodí v případě, kdy funkce f známa není, ale je známa její Fourierova řada.

Uvědomte si, že se dostanou jiné vzorce pro integraci a derivaci Fourierovy řady, vezme-li se interval $[0, 2\pi]$ místo $[-\pi, \pi]$.

Uvědomte si, že se dostanou jiné vzorce pro integraci a derivaci Fourierovy řady, vezme-li se interval $[0, 2\pi]$ místo $[-\pi, \pi]$.

Proč? Pozor na to!!!

Někdy je složité určit koeficient A_0 u primitivní funkce k Fourierově řadě pomocí integrace funkce (ta třeba není známa) nebo jako součet nekonečné řady. Pak lze napsat primitivní funkci s obecnou konstantou C a vhodným dosazením nebo limitou ji určit (viz *Příklady*).

Někdy je složité určit koeficient A_0 u primitivní funkce k Fourierově řadě pomocí integrace funkce (ta třeba není známa) nebo jako součet nekonečné řady. Pak lze napsat primitivní funkci s obecnou konstantou C a vhodným dosazením nebo limitou ji určit (viz *Příklady*).

Zde se vyplatí přemýšlet.

Konec poznámek 3.

Příklady 3 :

1. Použijte věty o integraci a derivaci Fourierových řad na rozvoj funkce $|x|$.

2. Vezměte Fourierovu řadu pro x^2 na $[-\pi, \pi]$ a člen po členu ji zintegrujte (jako neurčitý integrál).

2. Vezměte Fourierovu řadu pro x^2 na $[-\pi, \pi]$ a člen po členu ji zintegrujte (jako neurčitý integrál).

⬇

Dostanete $x^2/2 = \pi^3/3 - 4(\sin x - \sin(2x)/2^3 + \sin(3x)/3^3 - ...) + C.$

⬇

2. Vezměte Fourierovu řadu pro x^2 na $[-\pi, \pi]$ a člen po členu ji zintegrujte (jako neurčitý integrál).

Dostanete $x^2/2 = \pi^3/3 - 4(\sin x - \sin(2x)/2^3 + \sin(3x)/3^3 - ...) + C$.

Dosazením $x = 0$ dostanete hodnotu konstanty.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Vezměte Fourierovu řadu pro x^2 na $[-\pi, \pi]$ a člen po členu ji zintegrujte (jako neurčitý integrál).

Dostanete $x^2/2 = \pi^3/3 - 4(\sin x - \sin(2x)/2^3 + \sin(3x)/3^3 - ...) + C$.

Dosazením $x = 0$ dostanete hodnotu konstanty.

Až na konstantu.

A teď tajný trik:

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A teď tajný trik:

3*. Máte Fourierovu řadu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin(nx)}{n^2-1}$ neznámé funkce f.

A teď tajný trik:

3*. Máte Fourierovu řadu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin(nx)}{n^2-1}$ neznámé funkce f.

Derivováním ověřte, že f vyhovuje diferenciální rovnici $f'' + f = -\sin x$.

A teď tajný trik:

3*. Máte Fourierovu řadu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin(nx)}{n^2-1}$ neznámé funkce f.

Derivováním ověřte, že f vyhovuje diferenciální rovnici $f'' + f = -\sin x$.

Vyřešte ji a určete neurčité konstanty pomocí vhodných hodnot f a f'. [$f(x) = \sin x/4 + x\cos x/2$]

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A teď tajný trik:

3*. Máte Fourierovu řadu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin(nx)}{n^2-1}$ neznámé funkce f.

Derivováním ověřte, že f vyhovuje diferenciální rovnici $f'' + f = -\sin x$.

Vyřešte ji a určete neurčité konstanty pomocí vhodných hodnot f a f'. $[f(x) = \sin x/4 + x \cos x/2]$

:-)

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec příkladů 3.

Otázky 3 :

1. Ukažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \sin(nx)/\log n$ konverguje na $\mathbb{R}$, ale není Fourierovou řadou žádné absolutně integrovatelné funkce. (Použijte toho, že pro Fourierovy řady konverguje $\sum b_n/n$.)

2. Ukažte, že derivace Fourierovy řady funkce x na $[-\pi, \pi]$ nekonverguje v žádném bodě.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte, že derivace Fourierovy řady funkce x na $[-\pi, \pi]$ nekonverguje v žádném bodě.

Jaký předpoklad věty o derivaci Fourierových řad není splněn?

3. Dokažte, že koeficient a_0' z věty o derivování Fourierových řad se dá vyjádřit limitou $\lim_n((-1)^{n+1}nb_n)$. (Tato limita může být někdy jednodušší na výpočet než uvedený rozdíl limit funkce f v krajních bodech, zvláště, pokud f není známa.)

4. Zformulujte obě věty pro integrování a derivování Fourierových řad na intervalu $[0, 2\pi]$ místo $[-\pi, \pi]$. $\ddot{}$

4. Dokažte, že má-li funkce f spojitou k-tou derivaci absolutně integrovatelnou a a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f, pak

$$\lim_n n^k a_n = 0\,, \quad \lim_n n^k a_n = 0\,.$$

Konec otázek 3.

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

Řešení. Již máme spočteno, že

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

Řešení. Již máme spočteno, že

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Integrujme nyní tuto řadu $\int_0^x \, \mathrm{d}t$.

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

⬇

Řešení. Již máme spočteno, že

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

⬇

Integrujme nyní tuto řadu $\int_0^x \, \mathrm{d}t$.

⬇

Potom

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\pi^2 x = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx.$$

⬇

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

Řešení. Již máme spočteno, že

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Integrujme nyní tuto řadu $\int_0^x \, \mathrm{d}t$.

Potom

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\pi^2 x = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx.$$

Teď použijeme rozvoj

$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z předchozích rovností již snadno dostaneme

$$x^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1} 2\pi^2}{n} + \frac{(-1)^n 12}{n^3} \right) \sin nx .$$

Z předchozích rovností již snadno dostaneme

$$x^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1} 2\pi^2}{n} + \frac{(-1)^n 12}{n^3} \right) \sin nx.$$

Tato řada konverguje bodově na $(-\pi, \pi)$.

Konec cvičení 3.

Učení 3 :

Proč řada funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ konverguje bodově a nekonverguje stejnoměrně? Vždyť řada může konvergovat stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$, to jsem již zažil.

Proč řada funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ konverguje bodově a nekonverguje stejnoměrně? Vždyť řada může konvergovat stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$, to jsem již zažil.

A kdo všechno má spojitou limitu? TO se nemusí vždy podařit. U bodů nespojitosti je takový hezký rozkmit. To se musí vidět!

Konec učení 3.

PERIODY JINÉ DÉLKY NEŽ 2π

PERIODY JINÉ DÉLKY NEŽ 2π

Předchozí úvahy se snadno přenesou na periodické funkce s periodou $2l$.

PERIODY JINÉ DÉLKY NEŽ 2π

Předchozí úvahy se snadno přenesou na periodické funkce s periodou $2l$.

Místo funkcí $\cos(nx), \sin(nx)$ stačí vzít funkce $\cos(\pi nx/l), \sin(\pi nx/l)$, které mají periodu $2l$.

PERIODY JINÉ DÉLKY NEŽ 2π

Předchozí úvahy se snadno přenesou na periodické funkce s periodou $2l$.

Místo funkcí $\cos(nx), \sin(nx)$ stačí vzít funkce $\cos(\pi nx/l), \sin(\pi nx/l)$, které mají periodu $2l$.

Fourierovy koeficienty jsou pak definovány jako

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\pi nx/l)\,\mathrm{dx}\,, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\pi nx/l)\,\mathrm{dx}\,.$$

PERIODY JINÉ DÉLKY NEŽ 2π

Předchozí úvahy se snadno přenesou na periodické funkce s periodou $2l$.

Místo funkcí $\cos(nx), \sin(nx)$ stačí vzít funkce $\cos(\pi nx/l), \sin(\pi nx/l)$, které mají periodu $2l$.

Fourierovy koeficienty jsou pak definovány jako

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\pi nx/l)\,\mathrm{dx}\,, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\pi nx/l)\,\mathrm{dx}\,.$$

Fourierova řada funkce f je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(\pi nx/l) + b_n\sin(\pi nx/l)\Big)\,.$$

PERIODY JINÉ DÉLKY NEŽ 2π

Předchozí úvahy se snadno přenesou na periodické funkce s periodou $2l$.

Místo funkcí $\cos(nx), \sin(nx)$ stačí vzít funkce $\cos(\pi nx/l), \sin(\pi nx/l)$, které mají periodu $2l$.

Fourierovy koeficienty jsou pak definovány jako

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\pi nx/l)\,\mathrm{dx}\,, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\pi nx/l)\,\mathrm{dx}\,.$$

Fourierova řada funkce f je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(\pi nx/l) + b_n\sin(\pi nx/l)\Big)\,.$$

Příslušná teorie a tvrzení z předchozí části se jen formálně upraví.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příslušná teorie a tvrzení z předchozí části se jen formálně upraví.

IMHO je to limonádka.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

1. Napište Fourierovu řadu pro následující funkci s periodou 6:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } 0 \leq x < 2; \\ 1, & \text{pro } 2 \leq x < 4; \\ 0, & \text{pro } 4 \leq x < 6. \end{cases}$$

2. Napište Fourierovu řadu funkce x na intervalu $[-2, 2]$ a určete její součet.

Konec příkladů 4.

Otázky 4 :

1. Zformulujte příslušné věty o konvergenci Fourierových řad s periodou $2l$.

2. Zformulujte příslušné věty o integraci a derivaci Fourierových řad s s periodou $2l$.

3. Jak se změní formulace, budete-li brát místo intervalu $[-l, l]$ interval $[0, 2l]$?

Konec otázek 4.

Cvičení 4 :

Příklad. Najděte Fourierovu řadu pro funkci

$$f(x) = x\cos x \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dále vyšetřete konvergenci této řady.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Najděte Fourierovu řadu pro funkci

$$f(x) = x\cos x \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dále vyšetřete konvergenci této řady.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že perioda je pouze π a budeme proto hledat rozvoj pomocí funkcí

$$1,\ \cos 2nx,\ \sin 2nx.$$

Cvičení 4 :

Příklad. Najděte Fourierovu řadu pro funkci

$$f(x) = x\cos x \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dále vyšetřete konvergenci této řady.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že perioda je pouze π a budeme proto hledat rozvoj pomocí funkcí

$$1,\ \cos 2nx,\ \sin 2nx.$$

Vidíme, že jde o lichou funkci, takže koeficienty

$$a_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

budou rovny nule.

Cvičení 4 :

Příklad. Najděte Fourierovu řadu pro funkci

$$f(x) = x\cos x \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dále vyšetřete konvergenci této řady.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že perioda je pouze π a budeme proto hledat rozvoj pomocí funkcí

$$1,\ \cos 2nx,\ \sin 2nx.$$

Vidíme, že jde o lichou funkci, takže koeficienty

$$a_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

budou rovny nule.

Nyní pojďme spočítat koeficienty b_n. Vyjdeme přímo z definice

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \sin 2nx \,\mathrm{d}x =$$

Cvičení 4 :

Příklad. Najděte Fourierovu řadu pro funkci

$$f(x) = x\cos x \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dále vyšetřete konvergenci této řady.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že perioda je pouze π a budeme proto hledat rozvoj pomocí funkcí

$$1,\ \cos 2nx,\ \sin 2nx.$$

Vidíme, že jde o lichou funkci, takže koeficienty

$$a_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

budou rovny nule.

Nyní pojďme spočítat koeficienty b_n. Vyjdeme přímo z definice

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \sin 2nx \,\mathrm{d}x =$$

(nyní použijeme vzorce pro goniometrické funkce)

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{(-1)^n(-8n)}{(4n^2-1)^2},$$

(nyní použijeme vzorce pro goniometrické funkce)

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{(-1)^n(-8n)}{(4n^2-1)^2},$$

kde jsme použili pouze integraci per partes.

(nyní použijeme vzorce pro goniometrické funkce)

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{(-1)^n(-8n)}{(4n^2-1)^2},$$

kde jsme použili pouze integraci per partes.

Hledaná Fourierova řada tedy bude

$$8\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx.$$

(nyní použijeme vzorce pro goniometrické funkce)

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{(-1)^n(-8n)}{(4n^2-1)^2},$$

kde jsme použili pouze integraci per partes.

Hledaná Fourierova řada tedy bude

$$8 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(4n^2-1)^2} \sin 2nx.$$

Podle věty o konvergentní majorantě (najdete nějakou?) dostáváme stejnoměrnou konvergenci na celé reálné přímce.

Konec cvičení 4.

* FOURIERŮV INTEGRÁL

* FOURIERŮV INTEGRÁL

Teď do toho vneseme pořádně jasno svitem z hvězd.

* FOURIERŮV INTEGRÁL

Teď do toho vneseme pořádně jasno svitem z hvězd.

Dají se rozvinout ve vhodné řady Fourierova typu i funkce neperiodické, aniž by se upravovaly?

* FOURIERŮV INTEGRÁL

Teď do toho vneseme pořádně jasno svitem z hvězd.

Dají se rozvinout ve vhodné řady Fourierova typu i funkce neperiodické, aniž by se upravovaly?

Ukazuje se, že jsou dvě základní možnosti. Buď lze použít jinou soustavu funkcí než trigonometrické funkce (o tom je zmínka v *Poznámkách* nebo se místo řad použije integrál.

* FOURIERŮV INTEGRÁL

Teď do toho vneseme pořádně jasno svitem z hvězd.

Dají se rozvinout ve vhodné řady Fourierova typu i funkce neperiodické, aniž by se upravovaly?

Ukazuje se, že jsou dvě základní možnosti. Buď lze použít jinou soustavu funkcí než trigonometrické funkce (o tom je zmínka v *Poznámkách* nebo se místo řad použije integrál.

Protože tento druhý způsob se bude hodit v pozdějších kapitolách, bude nyní vyložen.

Fourierova řada dané funkce je rozložení funkce do jejích vnitřních frekvencí.

Fourierova řada dané funkce je rozložení funkce do jejích vnitřních frekvencí.

Používáme přitom frekvence 1, 2, 3 a podobné. Co když ale má funkce iracionální frekvence?

Fourierova řada dané funkce je rozložení funkce do jejích vnitřních frekvencí.

Používáme přitom frekvence 1, 2, 3 a podobné. Co když ale má funkce iracionální frekvence?

Žádný problém. Rozložíme ji do spojitého spektre vlastních frekvencí. A je to. Bude se místo řady psát integrálem.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Již vidím rozzářená očička ;-)

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V této části je f funkce definovaná na $\mathbb{R}$, je po částech hladká a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. (Pojem *po částech hladká funkce* bude nyní interpretován tak, že je to funkce po částech hladká (v dříve definovaném smyslu) v každém omezeném intervalu.)

V této části je f funkce definovaná na $\mathbb{R}$, je po částech hladká a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. (Pojem *po částech hladká funkce* bude nyní interpretován tak, že je to funkce po částech hladká (v dříve definovaném smyslu) v každém omezeném intervalu.)

Připomeňte si, že $\widehat{f}$ je funkce definovaná rovností $\widehat{f}(x) = \big(f(x_-) + f(x_+)\big)/2$.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ lze f vyjádřit pomocí Fourierovy řady na intervalu $[-k, k]$ (za Fourierovy koeficienty jsou tu dosazeny jejich vyjádření pomocí definice):

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x) &= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\cos(\pi nt/k)\cos(\pi nx/k)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\sin(\pi nt/k)\sin(\pi nx/k)\,\mathrm{d}t\Big) \\ &= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\Big(\cos(\pi nt/k)\cos(\pi nx/k) + \sin(\pi nt/k)\sin(\pi nx/k)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\cos\big(\frac{\pi n}{k}(x-t)\big)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ lze f vyjádřit pomocí Fourierovy řady na intervalu $[-k,k]$ (za Fourierovy koeficienty jsou tu dosazeny jejich vyjádření pomocí definice):

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\cos(\pi nt/k)\cos(\pi nx/k)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\sin(\pi nt/k)\sin(\pi nx/k)\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\Big(\cos(\pi nt/k)\cos(\pi nx/k) + \sin(\pi nt/k)\sin(\pi nx/k)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\cos\Big(\frac{\pi n}{k}(x-t)\Big)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

⬇

Uvedená rovnost platí na libovolně velkých intervalech $[-k,k]$ a lze se pokusit pravou stranu zlimitit pro $k \to \infty$.

⬇

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ lze f vyjádřit pomocí Fourierovy řady na intervalu $[-k, k]$ (za Fourierovy koeficienty jsou tu dosazeny jejich vyjádření pomocí definice):

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\cos(\pi nt/k)\cos(\pi nx/k)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\sin(\pi nt/k)\sin(\pi nx/k)\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\Big(\cos(\pi nt/k)\cos(\pi nx/k) + \sin(\pi nt/k)\sin(\pi nx/k)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\cos\Big(\frac{\pi n}{k}(x-t)\Big)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Uvedená rovnost platí na libovolně velkých intervalech $[-k, k]$ a lze se pokusit pravou stranu zlimitit pro $k \to \infty$.

Z předpokladu konečnosti integrálu $\int_{\mathbb{R}} f$ vyplývá, že $\lim_k \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Limita zbývajícího výrazu se odhadne tímto způsobem:

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita zbývajícího výrazu se odhadne tímto způsobem:

Položí se $g(u) = \int_{-k}^{k} f(t)\cos(u(x-t))\,\mathrm{d}t$; potom je zbývající výraz roven

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{k}g\left(\frac{n\pi}{k}\right),$$

což připomíná Riemannovy součty funkce g a dá se tedy očekávat, že jejich limita bude rovna $(1/\pi)\int_0^\infty g(u)\,\mathrm{d}u$.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita zbývajícího výrazu se odhadne tímto způsobem:

Položí se $g(u) = \int_{-k}^{k} f(t)\cos(u(x-t))\,\mathrm{d}t$; potom je zbývající výraz roven

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{k}g\left(\frac{n\pi}{k}\right),$$

což připomíná Riemannovy součty funkce g a dá se tedy očekávat, že jejich limita bude rovna $(1/\pi)\int_0^\infty g(u)\,\mathrm{d}u$.

To se dá opravdu dokázat: pro $\varepsilon > 0$ se najde n_0 tak, že pro $n > n_0$ je rozdíl mezi uvedeným integrálem a předchozím součtem roven nejvýše ε.

Uvedený postup tedy dává následující tvrzení:

Uvedený postup tedy dává následující tvrzení:

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. Potom platí rovnost

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(u(x-t))\ dt\ du\,.$$

Uvedený postup tedy dává následující tvrzení:

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. Potom platí rovnost

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(u(x-t))\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u\,.$$

Integrál na pravé straně se nazývá Fourierův integrál funkce f.

Jestliže se $\cos(u(x-t))$ rozepíše pomocí součtového vzorce, dostane se obdoba Fourierových řad:

Jestliže se $\cos(u(x-t))$ rozepíše pomocí součtového vzorce, dostane se obdoba Fourierových řad:

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. Potom

$$\widehat{f}(x) = \int_0^\infty (A(u)\cos(ux) + B(u)\sin(ux))\, \mathrm{d}u$$

kde

$$A(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ux)\,\mathrm{dx}\,, \quad B(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ux)\,\mathrm{dx}\,.$$

Jestliže se $\cos(u(x-t))$ rozepíše pomocí součtového vzorce, dostane se obdoba Fourierových řad:

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. Potom

$$\widehat{f}(x) = \int_0^\infty (A(u)\cos(ux) + B(u)\sin(ux))\, \mathrm{d}u$$

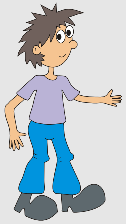
kde

$$A(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ux)\,\mathrm{dx}\,, \quad B(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ux)\,\mathrm{dx}\,.$$

K Fourierovému integrálu se tento text opět vrátí v kapitole o Fourierově transformaci.

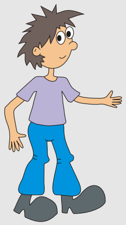
Cítíte tam ty spojité frekvence?

Cítíte tam ty spojité frekvence?



Ani nevím, jestli mám radši řady nebo integrály. Až to zjistím, to bude veselo.

Cítíte tam ty spojité frekvence?



Ani nevím, jestli mám radši řady nebo integrály. Až to zjistím, to bude veselo.

Rozsvítíme si na to.

Poznámky 5 :

Tyto závěrečné poznámky budou věnovány jiným ortogonálním systémům.

Poznámky 5 :

Tyto závěrečné poznámky budou věnovány jiným ortogonálním systémům.

Ortogonalita posloupnosti $\{g_n\}$ funkcí na intervalu I znamená, že $\int_I g_n g_m = 0$ pro $n \neq m$ a je $\int_I g_n g_m$ roven nějakému nenulovému číslu p_n pro $n = m$.

Poznámky 5 :

Tyto závěrečné poznámky budou věnovány jiným ortogonálním systémům.

Ortogonalita posloupnosti $\{g_n\}$ funkcí na intervalu I znamená, že $\int_I g_n g_m = 0$ pro $n \neq m$ a je $\int_I g_n g_m$ roven nějakému nenulovému číslu p_n pro $n = m$.

Pak lze definovat Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k systému $\{g_n\}$ jako

$$c_n = \frac{1}{p_n} \int_I f(x) g_n(x) \, \mathrm{dx} \, .$$

Poznámky 5 :

Tyto závěrečné poznámky budou věnovány jiným ortogonálním systémům.

Ortogonalita posloupnosti $\{g_n\}$ funkcí na intervalu I znamená, že $\int_I g_n g_m = 0$ pro $n \neq m$ a je $\int_I g_n g_m$ roven nějakému nenulovému číslu p_n pro $n = m$.

Pak lze definovat Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k systému $\{g_n\}$ jako

$$c_n = \frac{1}{p_n} \int_I f(x) g_n(x) \, \mathrm{dx} \, .$$

Fourierova řada je potom řada $\sum_n c_n g_n(x)$.

Vhodnými funkcemi pro takové systémy jsou jistě polynomy.

Vhodnými funkcemi pro takové systémy jsou jistě polynomy.

⬇

Jak najít ortogonální systémy složené z polynomů?

⬇

Vhodnými funkcemi pro takové systémy jsou jistě polynomy.

⇓

Jak najít ortogonální systémy složené z polynomů?

⇓

Cestu ukazuje tzv. *Gramova-Schmidtova ortogonalizace*.

⇓

Vhodnými funkcemi pro takové systémy jsou jistě polynomy.

⬇

Jak najít ortogonální systémy složené z polynomů?

⬇

Cestu ukazuje tzv. *Gramova-Schmidtova ortogonalizace*.

⬇

Vezmou se funkce $1, x, x^2, x^3, \ldots$, např. na intervalu $(-1, 1)$. První funkce $g_1 = 1$ se nechá beze změny. Pak se hledá lineární kombinace g_1 a druhé funkce, tedy x, kolmé ke g_1: $0 = \int_{-1}^{1}(1(c_1.1 + x)\,\mathrm{dx} = 2c_1 + 0$ a tedy $c_1 = 0$. Položí se $g_2(x) = x$. Podobně dále: lineární kombinace g_1, g_2, x^2 musí být kolmá na funkce $1, x$: $0 = \int_{-1}^{1}(c_1 + c_2 x + x^2)\,\mathrm{dx}, 0 = \int_{-1}^{1}(c_1 x + c_2 x^2 + x^3)\,\mathrm{dx}$, což dává $c_1 = -1/3, c_2 = 0$. Atd.

⬇

Vhodnými funkcemi pro takové systémy jsou jistě polynomy.

⬇

Jak najít ortogonální systémy složené z polynomů?

⬇

Cestu ukazuje tzv. *Gramova-Schmidtova ortogonalizace*.

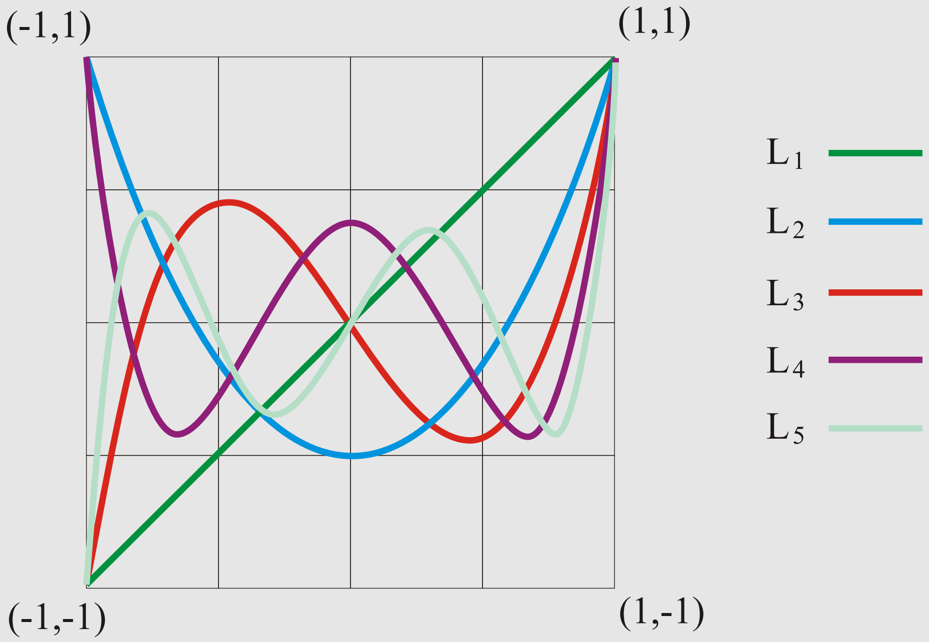
⬇

Vezmou se funkce $1, x, x^2, x^3, ...$, např. na intervalu $(-1, 1)$. První funkce $g_1 = 1$ se nechá beze změny. Pak se hledá lineární kombinace g_1 a druhé funkce, tedy x, kolmé ke g_1: $0 = \int_{-1}^{1}(1(c_1.1 + x)\,\mathrm{dx} = 2c_1 + 0$ a tedy $c_1 = 0$. Položí se $g_2(x) = x$. Podobně dále: lineární kombinace g_1, g_2, x^2 musí být kolmá na funkce $1, x$: $0 = \int_{-1}^{1}(c_1 + c_2 x + x^2)\,\mathrm{dx}, 0 = \int_{-1}^{1}(c_1 x + c_2 x^2 + x^3)\,\mathrm{dx}$, což dává $c_1 = -1/3, c_2 = 0$. Atd.

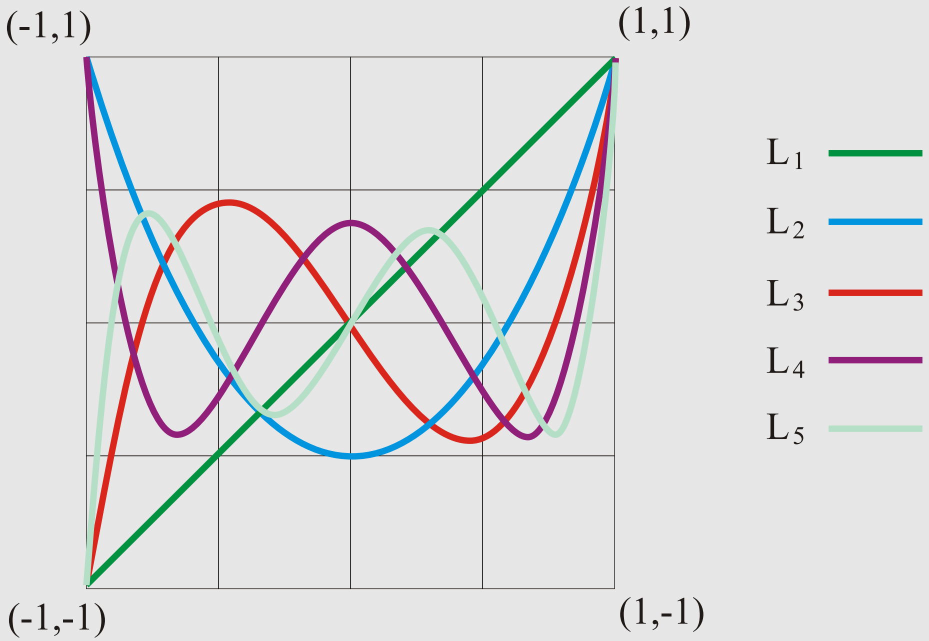
⬇

Dostane se ortogonální posloupnost

$$1, x, \frac{-1 + 3x^2}{2}, \frac{5x^3 - 3x}{2}, \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}, ...$$



LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



To jsou tzv. *Legendreovy polynomy*.

Legendreovy polynomy vypadají hezky.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Legendreovy polynomy vypadají hezky.

Dají se popsat i mnoha jinými způsoby, např. rekurentním vzorcem, nebo jako derivace jisté funkce, jako řešení diferenciální rovnice. Pomocí Legendreových polynomů se dají rozvinout v řady funkce na intervalu $(-1, 1)$.

Na neomezených intervalech nemohou být polynomy na sebe kolmé (kromě triviálních nezajímavých případů).

Na neomezených intervalech nemohou být polynomy na sebe kolmé (kromě triviálních nezajímavých případů).

⇓

Proto se k nim přidává tzv. váha.

⇓

Na neomezených intervalech nemohou být polynomy na sebe kolmé (kromě triviálních nezajímavých případů).

⬇

Proto se k nim přidává tzv. váha.

⬇

Např. na intervalu $(0, \infty)$ je vahou funkce e^{-x} a tedy kolmost funkcí g, h znamená, že $\int_0^\infty e^{-x} g(x) h(x)\, \mathrm{dx} = 0$.

⬇

Na neomezených intervalech nemohou být polynomy na sebe kolmé (kromě triviálních nezajímavých případů).

⇓

Proto se k nim přidává tzv. váha.

⇓

Např. na intervalu $(0, \infty)$ je vahou funkce e^{-x} a tedy kolmost funkcí g, h znamená, že $\int_0^\infty e^{-x} g(x) h(x)\,\mathrm{dx} = 0$.

⇓

Váha se musí použít i při definici Fourierových koeficientů. Výše uvedenou Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací se dostanou tzv. *Laguerrovy polynomy*:

$$1, 1-x, x^2-4x+2, -x^3+9x^2-18x+6, \ldots$$

Na intervalu $(-\infty, \infty)$ se bere váha e^{-x^2}. Dostanou se tzv. *Hermiteovy polynomy*:

$$1, 2x, 4x^2 - 2, 8x^3 - 12x, ...$$

Na intervalu $(-\infty, \infty)$ se bere váha e^{-x^2}. Dostanou se tzv. *Hermiteovy polynomy*:

$$1, 2x, 4x^2 - 2, 8x^3 - 12x, \dots$$

Všimtěte si, že pro všechny typy ortogonálních systémů jsou nerozlišitelné funkce lišící na konečné množině bodů. (Jejich $\widehat{f}$ je stejná, pokud jsou tyto po částech hladké a $\widehat{f}$ je definovaná.)

Na intervalu $(-\infty, \infty)$ se bere váha e^{-x^2}. Dostanou se tzv. *Hermiteovy polynomy*:

$$1, 2x, 4x^2 - 2, 8x^3 - 12x, \ldots$$

Všimtěte si, že pro všechny typy ortogonálních systémů jsou nerozlišitelné funkce lišící na konečné množině bodů. (Jejich $\widehat{f}$ je stejná, pokud jsou tyto po částech hladké a $\widehat{f}$ je definovaná.)

Při použití obecnějšího Lebesgueva integrálu, můžeme říct, že jsou nerozlišitelné všechny funkce lišící se na "množině míry nula".

Konec poznámek 5.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

1. Napište Fourierův integrál ve tvaru uvedeném v poslední větě pro funkci s hodnotami 1 na intervalu $[-a, a]$ a 0 jinde. Do výsledku dosaďte $x = 0$.

2. Napište Fourierův integrál ve tvaru uvedeném v poslední větě pro funkci $e^{-a|x|}$ pro $a > 0$.

3. Vypočtěte prvních 5 koeficientů Fourierovy řady vzhledem k Legendreovým polynomům pro funkci rovnou 0 na $(-1, 0]$ a 1 na $(0, 1)$.

Konec příkladů 5.

Otázky 5 :

1. Obdobným způsobem jako u Fourierových řad dokažte Parsevalovu rovnost pro Fourierův integrál (pro absolutně integrovatelné funkce):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^{\infty} (A^2(u) + B^2(u))\,\mathrm{d}u\,.$$

2. Uveďte tvary Fourierova integrálu pro liché nebo sudé funkce.

Konec otázek 5.

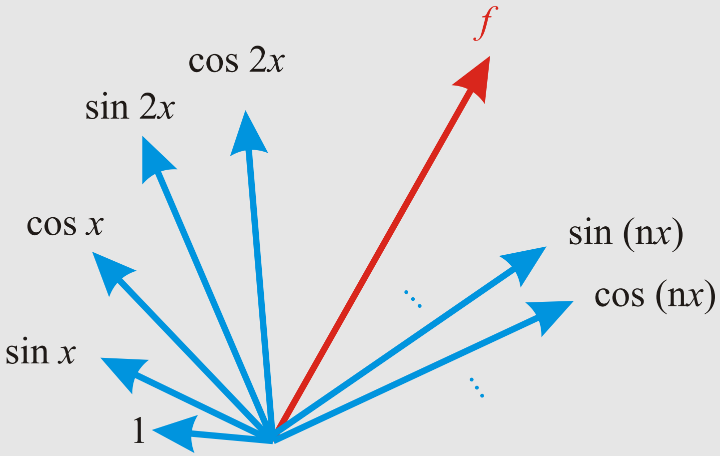
STANDARDY z kapitoly

FOURIEROVY ŘADY

STANDARDY z kapitoly

FOURIEROVY ŘADY

V podstatě rozepíšeme funkci jako prvek prostoru funkcí pomocí souřadnic 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, $\sin(3x)$, $\cos(3x)$, ... s vhodnými koeficienty.



f
cos $2x$
sin $2x$
cos x
sin (nx)
cos (nx)
sin x
1

DEFINICE. Funkce $\sum_{n=0}^{k}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrický polynom.

DEFINICE. Funkce $\sum_{n=0}^{k}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrický polynom.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrická řada.

DEFINICE. Funkce $\sum_{n=0}^{k}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ se nazývá trigonometrický polynom.

⬇

Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ se nazývá trigonometrická řada.

⬇

Koeficienty a_n, b_n i proměnná x lze brát komplexní, tento text se omezí jen na reálná čísla.

⬇

DEFINICE. Funkce $\sum_{n=0}^{k}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrický polynom.

⬇

Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrická řada.

⬇

Koeficienty a_n, b_n i proměnná x lze brát komplexní, tento text se omezí jen na reálná čísla.

⬇

Úkolem této kapitoly je aproximovat funkce trigonometrickými polynomy.

Pro výpočet koeficientů a_n, b_n se využije tzv. ortogonality funkcí $\sin(nx), \cos(nx)$:

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro výpočet koeficientů a_n, b_n se využije tzv. ortogonality funkcí $\sin(nx), \cos(nx)$:

VĚTA. Platí následující rovnosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\,\mathrm{dx} = 0 \text{ pro libovolná } n, k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,\mathrm{dx} = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \neq k; \\ \pi, & \text{pro } n = k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,\mathrm{dx} = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \neq k; \\ \pi, & \text{pro } n = k \in \mathbb{N}; \\ 2\pi, & \text{pro } n = k = 0. \end{cases}$$

Vrať me se zpět k rovnosti $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

Vraťme se zpět k rovnosti $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

⬇

Obě strany rovnosti se vynásobí $\sin(kx)$ (nebo $\cos(kx)$) a zintegrují se.

⬇

Vrať me se zpět k rovnosti $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

Obě strany rovnosti se vynásobí $\sin(kx)$ (nebo $\cos(kx)$) a zintegrují se.

Pokud řada konverguje stejnoměrně, lze přehodit integrál a součet a použít orthogonalitu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\sin kx\,\mathrm{dx} = \pi b_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\cos kx\,\mathrm{dx} = \begin{cases} \pi a_k, & \text{pro } k \neq 0; \\ 2\pi a_0, & \text{pro } k = 0. \end{cases}$$

Funkce na $[-\pi, \pi]$ se nazývá po částech hladká, jestliže existuje rozdělení $-\pi = p_0 < p_1 < ... < p_n = \pi$ takové, že f má na každém intervalu $[p_{i-1}, p_i]$ spojitou derivaci.

Funkce na $[-\pi, \pi]$ se nazývá po částech hladká, jestliže existuje rozdělení $-\pi = p_0 < p_1 < ... < p_n = \pi$ takové, že f má na každém intervalu $[p_{i-1}, p_i]$ spojitou derivaci.

Periodická funkce f s periodou 2π se nazývá po částech hladká, jestliže zúžení f na $[-\pi, \pi]$ (nebo jiný uzavřený interval délky 2π) je po částech hladké.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(-\pi, \pi)$.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(-\pi, \pi)$.

Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{dx} \text{ pro } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{dx} \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(-\pi, \pi)$.

Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{dx} \text{ pro } n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{dx} \text{ pro } n = 1, 2, ...$$

se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

se nazývá Fourierova řada funkce f.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(-\pi, \pi)$.

Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \,\mathrm{dx} \text{ pro } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \,\mathrm{dx} \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

se nazývá Fourierova řada funkce f.

Fourierova řada existuje pro po částech hladké funkce.

Příklad. Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{pro } x \in (-\pi, 0); \\ 0, & \text{pro } x = 0 \text{ a } x = \pi; \\ 1, & \text{pro } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

dodefinované periodicky na $\mathbb{R}$.

Příklad. Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{pro } x\in(-\pi,0);\\ 0, & \text{pro } x=0 \text{ a } x=\pi;\\ 1, & \text{pro } x\in(0,\pi).\end{cases}$$

dodefinované periodicky na $\mathbb{R}$.

Příklad. Najděte Fourierovy řady následujících funkcí dodefinovaných periodicky na $\mathbb{R}$:

$$x \text{ na } [-\pi,\pi)\,,\quad x \text{ na } [0,2\pi)\,,\quad |x| \text{ na } [-\pi,\pi)\,,\quad |\sin x| \text{ na } [-\pi,\pi)\,.$$

Příklad. Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{pro } x \in (-\pi, 0); \\ 0, & \text{pro } x = 0 \text{ a } x = \pi; \\ 1, & \text{pro } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

dodefinované periodicky na $\mathbb{R}$.

Příklad. Najděte Fourierovy řady následujících funkcí dodefinovaných periodicky na $\mathbb{R}$:

$$x \text{ na } [-\pi, \pi)\,, \quad x \text{ na } [0, 2\pi)\,, \quad |x| \text{ na } [-\pi, \pi)\,, \quad |\sin x| \text{ na } [-\pi, \pi)\,.$$

Příklad. Najděte Fourierovu sinovou i kosinovou řadu funkcí

$$\sin x \text{ na } [0, \pi)\,, \quad x \text{ na } [0, \pi)\,.$$

Příklad. Je-li f lichá, jsou všechny koeficienty a_n rovny 0 a Fourierova řada bude složená jen z funkcí sinus.

Příklad. Je-li f lichá, jsou všechny koeficienty a_n rovny 0 a Fourierova řada bude složená jen z funkcí sinus.

Příklad. Je-li f sudá, jsou všechny koeficienty b_n rovny 0 a Fourierova řada bude složená jen z funkcí kosinus.

KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY

KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY

LEMMA. Nechť f je po částech hladká v $[-\pi, \pi]$. Pak Fourierovy koeficienty funkce f konvergují k 0.

Důkaz. Integrál přes $[0, 2\pi]$ je součtem konečně mnoha integrálů přes menší uzavřené intervaly, kde f je spojitá a má na nich spojitou derivaci; nechť (a, b) je jeden z takových intervalů.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Integrál přes $[0, 2\pi]$ je součtem konečně mnoha integrálů přes menší uzavřené intervaly, kde f je spojitá a má na nich spojitou derivaci; nechť (a, b) je jeden z takových intervalů.

Stačí ukázat, že $\int_a^b f(x) \cos(nx)\,\mathrm{dx} \to 0$ s rostoucím n (důkaz pro koeficienty a_n je obdobný).

Důkaz. Integrál přes $[0, 2\pi]$ je součtem konečně mnoha integrálů přes menší uzavřené intervaly, kde f je spojitá a má na nich spojitou derivaci; nechť (a, b) je jeden z takových intervalů.

Stačí ukázat, že $\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{dx} \to 0$ s rostoucím n (důkaz pro koeficienty a_n je obdobný).

Poslední integrál se zintegruje po částech:

$$\int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{n}[f(x)\cos(nx)]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\,\mathrm{dx}\,.$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Integrál přes $[0, 2\pi]$ je součtem konečně mnoha integrálů přes menší uzavřené intervaly, kde f je spojitá a má na nich spojitou derivaci; nechť (a, b) je jeden z takových intervalů.

Stačí ukázat, že $\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{dx} \to 0$ s rostoucím n (důkaz pro koeficienty a_n je obdobný).

Poslední integrál se zintegruje po částech:

$$\int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{n}[f(x)\cos(nx)]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\,\mathrm{dx}\,.$$

Z předpokladů o funkci f nyní vyplývá, že $|\int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx}| \leq K/n$ pro nějakou konstantu K, což dokazuje tvrzení. $\diamond$

V následujícím textu se bude kvůli stručnějším zápisům značit

$$f(a_+) = \lim_{x \to a_+} f(x)\,, \quad f(a_-) = \lim_{x \to a_-} f(x) \quad \widehat{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))\,.$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

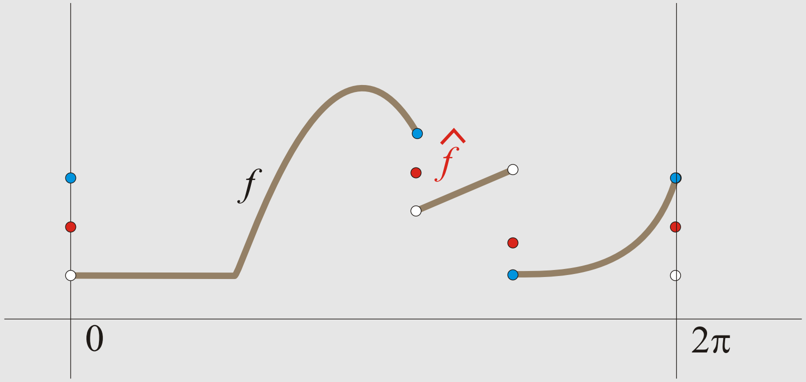
V následujícím textu se bude kvůli stručnějším zápisům značit

$$f(a_+) = \lim_{x \to a_+} f(x)\,, \quad f(a_-) = \lim_{x \to a_-} f(x) \quad \widehat{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))\,.$$

Protože f je buď periodická nebo se periodicky dodefinovává, znamená $f(-\pi_-)$ totéž co $f(\pi_-)$, apod. $f(-\pi_+) = f(\pi_+)$.

Pro po částech hladké funkce f je $\widehat{f}$ definovaná všude a souhlasí s f právě v bodech spojitosti f.

Pro po částech hladké funkce f je $\widehat{f}$ definovaná všude a souhlasí s f právě v bodech spojitosti f.



VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje k funkci $\widehat{f}$ v každém bodě $p \in [-\pi, \pi]$ (a tedy k $f(p)$ v bodech spojitosti funkce f).

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $[-\pi,\pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje k funkci $\widehat{f}$ v každém bodě $p \in [-\pi,\pi]$ (a tedy k $f(p)$ v bodech spojitosti funkce f).

Konvergence je stejnoměrná na intervalu ležícím uvnitř intervalu, kde má f spojitou derivaci.

VĚTA. (Parseval) Nechť f je definovaná na $[-\pi, \pi]$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx}$ konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\,,$$

kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

VĚTA. (Parseval) Nechť f je definovaná na $[-\pi, \pi]$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx}$ konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\,,$$

kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

Je to prostě Pythagorova věta.

VĚTA. Je-li f po částech monotónní v $(-\pi, \pi)$ a má tam jen konečně mnoho bodů nespojitosti, konverguje její Fourierova řada k funkci $\widehat{f}$.

VĚTA. Je-li f po částech monotónní v $(-\pi, \pi)$ a má tam jen konečně mnoho bodů nespojitosti, konverguje její Fourierova řada k funkci $\widehat{f}$.

Super věta.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DERIVACE A INTEGRACE FOURIEROVÝCH ŘAD

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DERIVACE A INTEGRACE FOURIEROVÝCH ŘAD

VĚTA. Nechť $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ je Fourierova řada funkce f na $[-\pi, \pi]$, pro kterou konverguje $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,\mathrm{dx}$.

DERIVACE A INTEGRACE FOURIEROVÝCH ŘAD

VĚTA. Nechť $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ je Fourierova řada funkce f na $[-\pi, \pi]$, pro kterou konverguje $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \,\mathrm{dx}$.

Pak pro libovolný interval $(a, b) \subset [0, 2\pi]$ platí

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{dx} = \int_a^b \frac{a_0}{2} \,\mathrm{dx} + \sum_{n=1}^{\infty} (\int_a^b (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \,\mathrm{dx}\,,$$

a uvedená řada integrálů konverguje stejnoměrně.

Uvedené vyjádření primitivní funkce $F(x)$ není ovšem Fourierovou řadou pokud $a_0 \neq 0$:

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedené vyjádření primitivní funkce $F(x)$ není ovšem Fourierovou řadou pokud $a_0 \neq 0$:

Něco nám tam nehraje, pře- káží to x:

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedené vyjádření primitivní funkce $F(x)$ není ovšem Fourierovou řadou pokud $a_0 \neq 0$:

Něco nám tam nehraje, překáží to x:

$$F(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin(nx) - b_n(\cos(nx) - 1)}{n}.$$

Uvedené vyjádření primitivní funkce $F(x)$ není ovšem Fourierovou řadou pokud $a_0 \neq 0$:

Něco nám tam nehraje, překáží to x:

$$F(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin(nx) - b_n(\cos(nx) - 1)}{n}.$$

Aby se dostala Fourierova řada, musí se funkce x nahradit její Fourierovou řadou.

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

Řešení. Již máme spočteno, že

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

Řešení. Již máme spočteno, že

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Integrujme nyní tuto řadu $\int_0^x \, dt$.

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

Řešení. Již máme spočteno, že

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Integrujme nyní tuto řadu $\int_0^x \, \mathrm{d}t$.

Potom

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\pi^2 x = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx.$$

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

Řešení. Již máme spočteno, že

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Integrujme nyní tuto řadu $\int_0^x \, \mathrm{d}t$.

Potom

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\pi^2 x = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx.$$

Teď použijeme rozvoj

$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

⬇

Řešení. Již máme spočteno, že

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

⬇

Integrujme nyní tuto řadu $\int_0^x \, \mathrm{d}t$.

⬇

Potom

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\pi^2 x = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx.$$

⬇

Teď použijeme rozvoj

$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

⬇

Z předchozích rovností již snadno dostaneme

$$x^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1} 2\pi^2}{n} + \frac{(-1)^n 12}{n^3} \right) \sin nx .$$

LEKCE27-FOR
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z předchozích rovností již snadno dostaneme

$$x^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1} 2\pi^2}{n} + \frac{(-1)^n 12}{n^3} \right) \sin nx.$$

⬇

Tato řada konverguje bodově na $(-\pi, \pi)$.