FOURIEROVY ŘADY

Funkce exp má známý zápis

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

pro nějaké c mezi 0 a x.

Polynomy jsou velmi vhodné funkce pro aproximace, ale ne vždy je možné je použít anebo ne vždy mají potřebné vlastnosti.

Navíc se dobře aproximovaly jen funkce, mající všechny derivace.

Další funkce, které se ukázaly velmi vhodné pro aproximace jsou funkce sinus a kosinus. Pomocí nich lze aproximovat i nespojité funkce.

Navíc jsou tyto funkce vhodné pro modelování periodických dějů a není tu požadavek, aby aproximované funkce měly derivace všech řádů.

Protože sinus je lichá a kosinus sudá funkce, musí se pro aproximaci použít obě funkce současně.

Je také známo, že mocniny obou funkcí se dají vždy vyjádřit pomocí lineárních kombinací funkcí $\sin(kx), \cos(kx)$. Např. $\sin^2 x = 1/2 - (1/2)\cos(2x), \cos^3 x = (3/4)\cos x + (1/4)\cos(3x)$.

Používání funkcí $\sin(kx), \cos(kx)$ je vhodnější než používání funkcí $\sin^k x, \cos^k x$. Důvody jsou podložené i obecnou teorií, která je však nad rámec tohoto textu.

DEFINICE. Funkce $\sum_{n=0}^{k}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrický polynom.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ se nazývá trigonometrická řada.

Koeficienty a_n, b_n i proměnná x lze brát komplexní, tento text se omezí jen na reálná čísla.

Protože trigonometrický polynom má periodu 2π, není možné bez úpravy aproximovat funkce, které nemají tuto periodu.

Pro funkce s periodou 2π je jedno na jakém intervalu délky 2π se funkce zkoumá. V dalším textu je brán interval $[-\pi, \pi]$, který je symetrický kolem 0. Často se bere interval $[0, 2\pi]$.

Pro výpočet koeficientů a_n, b_n se využije tzv. ortogonality funkcí $\sin(nx), \cos(nx)$:

VĚTA. Platí následující rovnosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\,\mathrm{dx} = 0 \text{ pro libovolná } n, k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,\mathrm{dx} = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \neq k; \\ \pi, & \text{pro } n = k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,\mathrm{dx} = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \neq k; \\ \pi, & \text{pro } n = k \in \mathbb{N}; \\ 2\pi, & \text{pro } n = k = 0. \end{cases}$$

Vraťme se zpět k rovnosti $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

Obě strany rovnosti se vynásobí $\sin(kx)$ (nebo $\cos(kx)$) a zintegrují se.

Pokud řada konverguje stejnoměrně, lze přehodit integrál a součet a použít orthogonalitu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \sin kx\,\mathrm{dx} = \pi b_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\cos kx\,\mathrm{dx} = \begin{cases} \pi a_k, & \text{pro } k\neq 0;\\ 2\pi a_0, & \text{pro } k=0.\end{cases}$$

Uvedené integrály obecně nemusí existovat. Budou existovat pro spojité omezené funkce.

Pro použití Fourierových řad je však třeba pracovat i s nespojitými funkcemi. Obecná teorie připouští značné nespojitosti, tento text se omezí na jednodušší funkce, pro které stačí zobecněný Newtonův integrál a znalosti dosud probrané.

Funkce na $[-\pi,\pi]$ se nazývá po částech hladká, jestliže existuje rozdělení $-\pi = p_0 < p_1 < \ldots < p_n = \pi$ takové, že f má na každém intervalu $[p_{i-1}, p_i]$ spojitou derivaci.

Periodická funkce f s periodou 2π se nazývá po částech hladká, jestliže zúžení f na $[-\pi,\pi]$ (nebo jiný uzavřený interval délky 2π) je po částech hladké.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(-\pi,\pi)$.

Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{dx} \text{ pro } n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx} \text{ pro } n = 1,2,\ldots$$

se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

se nazývá Fourierova řada funkce f.

Fourierova řada existuje pro po částech hladké funkce.

POZOROVÁNÍ. Jsou-li a_n, b_n (nebo a_n', b_n') Fourierovy koeficienty funkce f (resp. g), pak $\alpha a_n+\beta a_n', \alpha b_n+\beta b_n'$ jsou Fourierovy koeficienty funkce $\alpha f+\beta g$.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Cvičení 1

Učení 1

KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY

Pro aplikace není ani tak důležitá samotná konvergence Fourierovy řady, jako její konvergence k původní funkci.

Je to problém obtížný, ale důležitý. Pro tento text stačí uvést jednodušší výsledky.

LEMMA. Nechť f je po částech hladká v $[-\pi,\pi]$. Pak Fourierovy koeficienty funkce f konvergují k 0.

V následujícím textu se bude kvůli stručnějším zápisům značit

$$f(a_+) = \lim_{x\to a_+} f(x)\,,\quad f(a_-) = \lim_{x\to a_-} f(x)\quad \widehat{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x_+)+f(x_-))\,.$$

Protože f je buď periodická nebo se periodicky dodefinovává, znamená $f(-\pi_-)$ totéž co $f(\pi_-)$, apod. $f(-\pi_+) = f(\pi_+)$.

Pro po částech hladké funkce f je $\widehat{f}$ definovaná všude a souhlasí s f právě v bodech spojitosti f.

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje k funkci $\widehat{f}$ v každém bodě $p \in [-\pi, \pi]$ (a tedy k $f(p)$ v bodech spojitosti funkce f).

Konvergence je stejnoměrná na intervalu ležícím uvnitř intervalu, kde má f spojitou derivaci.

VĚTA. (Parseval) Nechť f je definovaná na $[-\pi, \pi]$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx}$ konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\,,$$

kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

VĚTA. (Parseval) Nechť f, g jsou definované na $(0, 2\pi)$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{dx}$, $\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\,\mathrm{dx}$ konvergují. Pak

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a_0 a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n a_n' + b_n b_n')\,,$$

kde a_n, b_n (nebo a_n', b_n') jsou Fourierovy koeficienty funkce f (resp. g).

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

DERIVACE A INTEGRACE FOURIEROVÝCH ŘAD

VĚTA. Nechť $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ je Fourierova řada funkce f na $[-\pi, \pi]$, pro kterou konverguje $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,\mathrm{dx}$.

Pak pro libovolný interval $(a, b) \subset [0, 2\pi]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \frac{a_0}{2}\,\mathrm{dx} + \sum_{n=1}^{\infty}(\int_a^b (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\,\mathrm{dx}\,,$$

a uvedená řada integrálů konverguje stejnoměrně.

Uvedené vyjádření primitivní funkce $F(x)$ není ovšem Fourierovou řadou pokud $a_0 \neq 0$:

$$F(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin(nx) - b_n(\cos(nx) - 1)}{n}\,.$$

Aby se dostala Fourierova řada, musí se funkce x nahradit její Fourierovou řadou (viz *Příklady*).

Pokud se zvolí periodické rozšíření funkce x z $[-\pi, \pi)$ a dosadí se do předchozího vzorce, dostane se (řady konvergují absolutně a lze je tedy vhodně přehazovat)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos(nx) + (a_n - (-1)^n a_0)\sin(nx)}{n}\,.$$

Důsledkem rovnosti je absolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n$, jakmile konverguje $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,\mathrm{dx}$.

Derivace Fourierovy řady nemusí být Fourierovou řadou žádné funkce (viz *Příklady*).

VĚTA. Nechť f je po částech hladká funkce na $[-\pi,\pi]$, jejíž derivace je absolutně integrovatelná a a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f. Pak Fourierovy koeficienty a'_n, b'_n funkce f' se dají vyjádřit následovně:

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} f(2\pi) - f(0)\,, \quad a_n = (-1)^n a'_0 + n b_n\,, \quad b'_n = -n a_n\,.$$

DŮSLEDEK. Nechť f je spojitá funkce s periodou 2π, po částech hladká, jejíž derivace je absolutně integrovatelná. Pak Fourierova řada pro f' se získá z Fourierovy řady pro f derivací člen po členu a je rovna

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos(nx) - a_n \sin(nx))\,.$$

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3

Učení 3

PERIODY JINÉ DÉLKY NEŽ 2π

Předchozí úvahy se snadno přenesou na periodické funkce s periodou $2l$.

Místo funkcí $\cos(nx), \sin(nx)$ stačí vzít funkce $\cos(\pi nx/l), \sin(\pi nx/l)$, které mají periodu $2l$.

Fourierovy koeficienty jsou pak definovány jako

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\pi nx/l)\,\mathrm{dx}\,, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\pi nx/l)\,\mathrm{dx}\,.$$

Fourierova řada funkce f je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(\pi nx/l) + b_n\sin(\pi nx/l)\Big)\,.$$

Příklady 4 Otázky 4

Cvičení 4

* FOURIERŮV INTEGRÁL

Dají se rozvinout ve vhodné řady Fourierova typu i funkce neperiodické, aniž by se upravovaly?

Ukazuje se, že jsou dvě základní možnosti. Buď lze použít jinou soustavu funkcí než trigonometrické funkce (o tom je zmínka v *Poznámkách* nebo se místo řad použije integrál.

Protože tento druhý způsob se bude hodit v pozdějších kapitolách, bude nyní vyložen.

V této části je f funkce definovaná na $\mathbb{R}$, je po částech hladká a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. (Pojem *po částech hladká funkce* bude nyní interpretován tak, že je to funkce po částech hladká (v dříve definovaném smyslu) v každém omezeném intervalu.)

Připomeňte si, že $\widehat{f}$ je funkce definovaná rovností $\widehat{f}(x) = \big(f(x_-) + f(x_+)\big)/2$.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ lze f vyjádřit pomocí Fourierovy řady na intervalu $[-k, k]$ (za Fourierovy koeficienty jsou tu dosazeny jejich vyjádření pomocí definice):

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\cos(\pi nt/k)\cos(\pi nx/k)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\sin(\pi nt/k)\sin(\pi nx/k)\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\Big(\cos(\pi nt/k)\cos(\pi nx/k) + \sin(\pi nt/k)\sin(\pi nx/k)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{-k}^{k} f(t)\cos\big(\frac{\pi n}{k}(x-t)\big)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Uvedená rovnost platí na libovolně velkých intervalech $[-k, k]$ a lze se pokusit pravou stranu zlimitit pro $k \to \infty$.

Z předpokladu konečnosti integrálu $\int_{\mathbb{R}} f$ vyplývá, že $\lim_k \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Položí se $g(u) = \int_{-k}^{k} f(t)\cos(u(x-t))\,\mathrm{d}t$; potom je zbývající výraz roven

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{k}g\Big(\frac{n\pi}{k}\Big),$$

což připomíná Riemannovy součty funkce g a dá se tedy očekávat, že jejich limita bude rovna $(1/\pi)\int_0^{\infty} g(u)\,\mathrm{d}u$.

To se dá opravdu dokázat: pro $\varepsilon > 0$ se najde n_0 tak, že pro $n > n_0$ je rozdíl mezi uvedeným integrálem a předchozím součtem roven nejvýše ε.

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. Potom platí rovnost

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(u(x-t))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,.$$

Integrál na pravé straně se nazývá Fourierův integrál funkce f.

Jestliže se $\cos(u(x-t))$ rozepíše pomocí součtového vzorce, dostane se obdoba Fourierových řad:

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. Potom

$$\widehat{f}(x) = \int_0^{\infty}(A(u)\cos(ux) + B(u)\sin(ux))\,\mathrm{d}u$$

kde

$$A(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ux)\,\mathrm{d}x\,,\qquad B(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ux)\,\mathrm{d}x\,.$$

K Fourierovému integrálu se tento text opět vrátí v kapitole o Fourierově transformaci.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

STANDARDY z kapitoly

FOURIEROVY ŘADY

DEFINICE. Funkce $\sum_{n=0}^{k}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ se nazývá trigonometrický polynom.
Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ se nazývá trigonometrická řada.

Koeficienty a_n, b_n i proměnná x lze brát komplexní, tento text se omezí jen na reálná čísla.

Pro výpočet koeficientů a_n, b_n se využije tzv. ortogonality funkcí $\sin(nx), \cos(nx)$:

VĚTA. Platí následující rovnosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(kx)\,\mathrm{dx}=0 \text{ pro libovolná } n,k=0,1,2,\ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)\,\mathrm{dx}=\begin{cases}0, & \text{pro } n\neq k;\\ \pi, & \text{pro } n=k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(kx)\,\mathrm{dx}=\begin{cases}0, & \text{pro } n\neq k;\\ \pi, & \text{pro } n=k\in\mathbb{N};\\ 2\pi, & \text{pro } n=k=0.\end{cases}$$

Vraťme se zpět k rovnosti $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$.
Obě strany rovnosti se vynásobí $\sin(kx)$ (nebo $\cos(kx)$) a zintegrují se.
Pokud řada konverguje stejnoměrně, lze přehodit integrál a součet a použít orthogonalitu:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)\,\mathrm{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\sin kx\,\mathrm{dx}=\pi b_k\,,\qquad k=1,2,\ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)\,\mathrm{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\cos kx\,\mathrm{dx}=\begin{cases}\pi a_k, & \text{pro } k\neq 0;\\ 2\pi a_0, & \text{pro } k=0.\end{cases}$$

Funkce na $[-\pi,\pi]$ se nazývá po částech hladká, jestliže existuje rozdělení $-\pi=p_0<p_1<\ldots<p_n=\pi$ takové, že f má na každém intervalu $[p_{i-1},p_i]$ spojitou derivaci.

Periodická funkce f s periodou 2π se nazývá po částech hladká, jestliže zúžení f na $[-\pi,\pi]$ (nebo jiný uzavřený interval délky 2π) je po částech hladké.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(-\pi,\pi)$.
Čísla

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{dx} \text{ pro } n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx} \text{ pro } n=1,2,\ldots$$

se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.
Řada

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

se nazývá Fourierova řada funkce f.

Fourierova řada existuje pro po částech hladké funkce.

Příklad. Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{pro } x\in(-\pi,0);\\ 0, & \text{pro } x=0 \text{ a } x=\pi;\\ 1, & \text{pro } x\in(0,\pi).\end{cases}$$

dodefinované periodicky na $\mathbb{R}$.

Příklad. Najděte Fourierovy řady následujících funkcí dodefinovaných periodicky na $\mathbb{R}$:

$$x \text{ na } [-\pi, \pi)\,, \quad x \text{ na } [0, 2\pi)\,, \quad |x| \text{ na } [-\pi, \pi)\,, \quad |\sin x| \text{ na } [-\pi, \pi)\,.$$

Příklad. Najděte Fourierovu sinovou i kosinovou řadu funkcí

$$\sin x \text{ na } [0, \pi)\,, \quad x \text{ na } [0, \pi)\,.$$

Příklad. Je-li f lichá, jsou všechny koeficienty a_n rovny 0 a Fourierova řada bude složená jen z funkcí sinus.

Příklad. Je-li f sudá, jsou všechny koeficienty b_n rovny 0 a Fourierova řada bude složená jen z funkcí kosinus.

KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY

LEMMA. Nechť f je po částech hladká v $[-\pi, \pi]$. Pak Fourierovy koeficienty funkce f konvergují k 0.

V následujícím textu se bude kvůli stručnějším zápisům značit

$$f(a_+) = \lim_{x \to a_+} f(x)\,, \quad f(a_-) = \lim_{x \to a_-} f(x) \quad \widehat{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))\,.$$

Protože f je buď periodická nebo se periodicky dodefinovává, znamená $f(-\pi_-)$ totéž co $f(\pi_-)$, apod. $f(-\pi_+) = f(\pi_+)$.

Pro po částech hladké funkce f je $\widehat{f}$ definovaná všude a souhlasí s f právě v bodech spojitosti f.

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje k funkci $\widehat{f}$ v každém bodě $p \in [-\pi, \pi]$ (a tedy k $f(p)$ v bodech spojitosti funkce f).

Konvergence je stejnoměrná na intervalu ležícím uvnitř intervalu, kde má f spojitou derivaci.

VĚTA. (Parseval) Nechť f je definovaná na $[-\pi, \pi]$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\,,$$

kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

VĚTA. Je-li f po částech monotónní v $(-\pi, \pi)$ a má tam jen konečně mnoho bodů nespojitosti, konverguje její Fourierova řada k funkci $\widehat{f}$.

DERIVACE A INTEGRACE FOURIEROVÝCH ŘAD

VĚTA. Nechť $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ je Fourierova řada funkce f na $[-\pi, \pi]$, pro kterou konverguje $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Pak pro libovolný interval $(a, b) \subset [0, 2\pi]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} (\int_a^b (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\,\mathrm{d}x\,,$$

a uvedená řada integrálů konverguje stejnoměrně.

Uvedené vyjádření primitivní funkce $F(x)$ není ovšem Fourierovou řadou pokud $a_0 \neq 0$:

$$F(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin(nx) - b_n(\cos(nx) - 1)}{n}\,.$$

Aby se dostala Fourierova řada, musí se funkce x nahradit její Fourierovou řadou.

Příklad. Najděte rozvoj funkce $x \mapsto x^3$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Využijte znalost rozvoje $x \mapsto x$ a $x \mapsto x^2$ a integrace Fourierových řad.

Řešení. Již máme spočteno, že

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Integrujme nyní tuto řadu $\int_0^x \, \mathrm{d}t$.

Potom

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\pi^2 x = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx.$$

Teď použijeme rozvoj

$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

Z předchozích rovností již snadno dostaneme

$$x^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1} 2\pi^2}{n} + \frac{(-1)^n 12}{n^3} \right) \sin nx.$$

Tato řada konverguje bodově na $(-\pi, \pi)$.