LAPLACEOVA TRANSFORMACE

V této kapitole si čichneme k čarování.

Já o tom vím svoje.

A já ty kouzla našel.

Začneme s historií. Víte, jak se kdysi odmocňovalo?

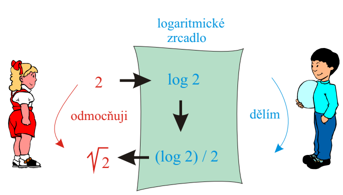
Když ještě jako nebyla počítadla?

Ano. Postup byl jednoduchý:

$$2 \mapsto \log 2 \mapsto (\log 2)/2 \mapsto \exp((\log 2)/2) = \sqrt{2}\,,$$

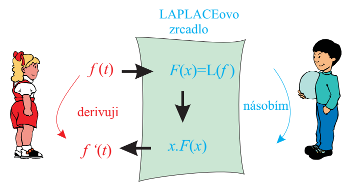
přičemž se pro hledání logaritmů a exponenciel používaly tištěné tabulky.

Šlo o komutativitu nasledujícího obrázku:



Podobně to funguje při integrování: hledáme primitivní funkci tak, že najdeme nejdřív Fourierovu řadu a tu zintegrujeme člen po členu.

No a my našli kouzelné zrcadlo, které mění derivování na násobení.



A samozřejmě integrace odpovídá dělení.

Diferenciální a integrální rovnice, třeste se !!!.

V této kapitole bude vyložena dosti odlišná teorie od těch předešlých.

Už jste se setkali se zobrazeními, která přiřazovala funkcím jiné funkce, např. funkci její derivaci nebo primitivní funkci, pokud existovaly.

Takovéto zobrazení se často nazývají *transformace*, protože transformují (mění) původní funkce na jiné, často vhodnější pro dané použití.

Transformace jsou např. derivace, integrace, Taylorovy polynomy, Fourierovy řady, Fourierův integrál a spousta jiných věcí.

Nyní bude probrán jeden důležitý případ tzv. *integrálních transformací*.

Obecně se integrální transformace funkce f definuje jako

$$T(f)(s) = \int_a^b f(t)k(s,t)\ \mathrm{d}t\,,$$

kde $k(s,t)$ je tzv. jádro transformace, (a,b) je vhodný určený interval. Tyto transformace jsou vhodné pro řešení diferenciálních, integrálních, integro–diferenciálních a dalších podobných rovnic.

Je zřejmé, že T je lineární zobrazení, tj. $T(\alpha f+\beta g) = \alpha T(f)+\beta T(g)$ pro libovolná reálná (popř. komplexní) čísla α, β.

Nyní bude probrána integrální transformace s jádrem e^{-st} na $(0,+\infty)$, později (v kapitole o Fourierově transformaci) integrální transformace s jádrem e^{-ist} na $(-\infty,+\infty)$ – tzv. Fourierova transformace.

Zatím se však bude jednat jen o **reálné funkce jedné reálné proměnné**.

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Laplaceova transformace je v podstatě exponenciální transformace.

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(0,+\infty)$. Pak se definuje její Laplaceova transformace $\mathcal{L}(f)$ následovně

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

Jak by se asi transformovala funkce $f(t) = t$?

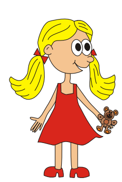
Ani nedýchám.

Neporadím, i já jsem někdy pohodlná.

Obecně nemusí uvedený integrál existovat pro žádná s nebo pro velmi málo těchto bodů.

Dále budou uvedeny podmínky na funkci f, které zaručí, že definiční obor funkce $\mathcal{L}(f)$ bude vhodný interval.

Jednou jsem měl sen, místo derivování se násobilo. Paráda. Pak jsem se ale probudil a nebylo to tak růžové.



Růžové šatičky jsou jenom moje.

Následující tvrzení uvádí velkou třídu funkcí, pro které je Laplaceova transformace definována na neomezených intervalech.

VĚTA. Nechť funkce f má na $(0, +\infty)$ následující vlastnosti:

1. existuje vlastní $\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)$ a v každém intervalu $(0, n)$ je f spojitá až na konečně mnoho bodů, ve kterých jsou skoky;

2. existují kladné konstanty K, a tak, že $|f(t)| \le Ke^{at}$ na nějakém intervalu $(p, +\infty)$.

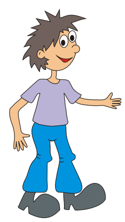
Potom je $\mathcal{L}(f)$ definována na $(a, +\infty)$ a $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.

Ty podmínky jsou průhledné: funkce přes kterou se integruje (v definici Laplaceovy transformace) musí být "pěkně stlačená k nule"- 2. a $\lim$ v 1. - a musí u ní existovat zobecněný Newtonův integrál - zbytek 1.

Důkaz. Na intervalu $[0, p]$ je f omezená a po částech spojitá, takže zobecněný Newtonův integrál $\int_0^p e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$ konverguje.

Pro $t \in [p, \infty)$ je $|e^{-st} f(t)| \le e^{-(s-a)t}$ a $\int_p^\infty e^{-(s-a)t}\ \mathrm{d}t = e^{(s-a)p}/(s-a)$ konverguje, jakmile $s - a > 0$. Navíc z poslední rovnosti plyne i $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$. $\diamond$

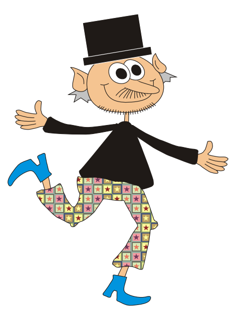
Pro jednoduchost se bude funkce f mající první vlastnost nazývat v této kapitole *po částech spojitá* a f mající druhou vlastnost *exponenciálně omezená*.



Definice průběžne zapisuji. Je to na román.

Pro použití Laplaceovy transformace je důležitá následující věta, která říká, že na spojitých funkcích je tato transformace prostá. Důkaz není jednoduchý a nebude tu uveden.

VĚTA. (Lerch) Jsou-li f, g spojité funkce na $[0, +\infty)$ a $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, pak $f = g$.



Na taková kouzla nemám.

BTW, to znamená, že to Laplaceovo zrcadlo není cinklé.

Poznámky 1:

1. Pro existenci integrálu $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$ nemusí být funkce f definována všude na $(0, +\infty)$.

Musí se připustit, že funkce není definována např. v konečně mnoha bodech, nebo ve spočetně mnoha bodech, které nemají hromadný bod v $\mathbb{R}$.

V těchto bodech lze funkci libovolně dodefinovat, aniž to má vliv na výsledný integrál.

Podle vlastností funkce se použije druh integrálu. V tomto textu budou podmínky na f takové, že lze použít (zobecněný) Newtonův integrál.

Mi to stačí.

2. Dá se ukázat, že $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$ platí, jakmile $\mathcal{L}(f)$ existuje v okolí $+\infty$ (i při použití K-integrálu).

To znamená, že např. konstantní nenulová funkce nemůže být Laplaceovým obrazem žádné funkce.

To si zapište k-krát, kde k je libovolná nenulová konstanta.

3. Lerchova věta platí obecněji: jestliže f, g jsou po částech spojité i exponenciálně omezené a $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ na nějakém intervalu (a, ∞), pak $f(t) = g(t)$ v bodech spojitosti obou funkcí.

To není jen kouzelné zrcadlo. Tady globálně permanentně lokálně straší.

To zrcadlo je zadarmo, ber.

4. Existují spojité funkce na $[0, \infty)$, které nejsou exponenciálně omezené a přesto je jejich Laplaceova transformace definována na $(0, \infty)$.

5. Diracova delta funkce není funkcí ve smyslu těchto textů. Je to zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$.

Je tedy nutné brát termín *Diracova delta funkce* jako termín nedělitelný na jednotlivá slova.

Zhruba se dá Diracova delta funkce chápat jako derivace $\operatorname{sgn} t$ nebo funkce rovné 0 na záporné ose a rovné 1 na nezáporné ose (ale tento pohled není definice a nemůže se automaticky používat).

Při použití tohoto zobrazení je nutné používat definici, nikoli funkci, která je 0 všude kromě jednoho bodu. Např. při formálním výpočtu Laplaceovy transformace byste dostali 0 a nikoli 1.

V praxi tato funkce idealizuje velkou změnu signálu na velmi krátkou dobu.

Je to něco jako jednotkový náboj v jediném bodě.

Naučíte se ji časem používat :-)

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Vypočtěte $\mathcal{L}(f)$ pro následující funkce f:

$$f = \text{konstanta } c\,, \quad f(t) = t\,, \quad f(t) = e^{at}\,, \quad f(t) = \sin(at)\,, \quad f(t) = \cos(at)\,.$$

Stanovte i intervaly, na nichž je $\mathcal{L}(f)$ definována.

2. Vypočtěte $\mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{t}})$ (můžete použít Gama funkci).

Tato funkce není po částech spojitá podle uvedené definice – proč?

3. Vypočtěte $\mathcal{L}(f)$ pro funkci $f(t) = [t]$ na $[0, \infty)$, kde $[t]$ znamená celou část čísla t.

4. Spočtěte Laplaceovu transformaci $\sin^2 t$ a $\cos^3 t$ rozepsáním těchto funkcí pomocí $\sin(2t), \cos(3t), \ldots$.

5. Spočtěte Laplaceovu transformaci funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \in [2kp, (2k+1)p); \\ 1, & \text{pro } t \in [(2k+1)p, (2k+2)p). \end{cases}$$

kde $p > 0, k = 0, 1, 2, \ldots$. Použijte sčítání řad.

6. Najděte Laplaceovu transformaci hyperbolického sinu a kosinu.

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

1. Ukažte, že $\mathcal{L}(1/t)$ není definována v žádném bodě.

2. Ukažte, že vlastnost *po částech spojitá* a *exponenciálně omezená* je zachovávána lineární kombinací a násobením.

3. Pomocí Gamma funkce napište vzorec pro $\mathcal{L}(t^p)$ pro $p > -1$.

Určete hodnoty výsledku pro přirozená čísla p.

4. Vezměte funkci (pro $a > 0$)

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{pro } 0 \le t \le a; \\ 0, & \text{pro } t > a. \end{cases}$$

Spočtěte Laplaceovu transformaci této funkce.

Limita $\lim\limits_{a \to 0_+} f_a$ je zobrazení, které má hodnotu nekonečnou v 0 a 0 jinde. Nazývá se *Diracova delta funkce* a značí se $\delta_0(t)$.

V tomto případě lze přehodit limitu a integrál definující Laplaceovu transformaci funkcí f_a.

Výsledkem je $\mathcal{L}(\delta_0(t)) = 1$.

To je ta má, jediná :-)

SUPER!!!

5. Ukažte způsobem použitým v Příkladě 5, že je-li f periodická funkce na $[0,\infty)$ s periodou p, pak

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\int_0^p e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t}{1-e^{-ps}}\,.$$

Konec otázek 1.

VLASTNOSTI LAPLACEOVY TRANSFORMACE

V úvodu bylo již řečeno, že každá integrální transformace, tedy i Laplaceova, je lineární.

Z příkladů je zřejmé, že Laplaceova transformace nezachovává násobení (např. Laplaceův obraz konstantní funkce s hodnotou 1 je $1/s$, ale $1\cdot 1 = 1$, $(1/s)\cdot(1/s) \neq 1/s$).

Nicméně, na násobení se převádí jiná binární operace, tzv. konvoluce – o tom později.

Nyní nás čeká řada formulek.

V následujících vzorcích lze předpokládat, že uvedené funkce jsou po částech spojité a exponenciálně omezené.

Posunutí

Posunutí funkce f doprava o $a > 0$ je funkce $f(t-a)$. Pokud funkce f je definována pro $t > 0$, je posunutá funkce definována pro $t > a$.

Protože pro Laplaceovu transformaci musí být funkce definována pro všechna kladná t, dodefinovává se funkce na intervalu $(0,a]$ hodnotou 0. Přitom se výhodně používá následující skoková funkce.

Pro skokovou funkci

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < a; \\ 1, & \text{pro } t > a \end{cases}$$

(v bodě $t = a$ se může dodefinovat jakkoli, většinou hodnotou 0) se jednoduše spočítá její Laplaceova transformace:

$$\mathcal{L}(u_a)(s) = \int_a^\infty e^{-st}\ \mathrm{d}t = \frac{e^{-as}}{s}\,.$$

Funkce g definovaná na $(a,+\infty)$ (pro $a \geq 0$) a dodefinovaná hodnotou 0 na $[0,a]$ se bude jednoduše značit $u_a g$. Takže

$$u_a(t)f(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \leq a; \\ f(t-a), & \text{pro } t > a. \end{cases}$$

Laplaceova transformace posunuté funkce a posunutá Laplaceova transformace (oboje posunutí o $a > 0$) se spočítá snadno:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_a(t)f(t-a))(s) &= e^{-as}\mathcal{L}(f(t))(s)\\ \mathcal{L}(f(t))(s-a) &= \mathcal{L}(e^{at}f(t))(s)\,.\end{aligned}$$

Pokud se používá $a > 0$, je vše OK. Pokud se zkusí $a < 0$, bude mela. POZOR!!!

Perioda

Pokud zkoumáme periodickou funkci $f(t+p) = f(t)$, $p > 0$, označíme jeden kousek, který se dále opakuje

$$f_0(t) = u(t)f(t) - u(t-p)f(t)\,.$$

Pak

$$\mathcal{L}f_0 = \mathcal{L}f - e^{-ps}\mathcal{L}f\,,$$

odkud vidíme

$$\mathcal{L}f = \frac{\mathcal{L}f_0}{1-e^{-ps}}\,,\ \mathcal{L}f_0 = \int_0^p e^{-st}f(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

Tak můžeme spočítat Laplace od kladných vlnek funkce sinus: $\max(\sin(t), 0)$.

Zvětšení

Zvětšením (nebo zmenšením) funkce f se míní funkce $f(at)$ pro $a > 0$.

Jsou to pořád jenom lineární transformace ale vzorečků jak máku.

Následující výpočty jsou velmi jednoduché (druhá rovnost plyne z první):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(at))(s) &= \frac{1}{a}\mathcal{L}(f(t)\left(\frac{s}{a}\right) \\ \mathcal{L}(f(t))\left(\frac{s}{a}\right) &= a\mathcal{L}(f(at))(s)\,. \end{aligned}$$

Derivace

Vztah derivace a Laplaceovy transformace je podstatný pro použití na řešení diferenciálních rovnic, protože Laplaceova transformace převádí derivaci na násobení s s původním Laplaceovým obrazem.

To, co jsme si slíbili, je tady.

Rovnosti se dokáží snadno pomocí integrace po částech.
Pro první vzorec se musí předpokládat, že funkce f je spojitá i exponenciálně omezená, a f' po částech spojitá.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t))(s) &= s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}(f(t))(s) &= \mathcal{L}(-tf(t))(s)\,. \end{aligned}$$

Ono to opravdu zcela snadno prošlo.

Indukcí se dokáží rovnosti pro derivace vyšších řádů:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) &= s^n\mathcal{L}(f(t))(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathcal{L}(f(t))(s) &= \mathcal{L}((-1)^n t^n f(t))(s)\,. \end{aligned}$$

Sledujete stále, kde je s a kde je t? A ono na tom opravdu záleží.

Integrace

Vzorce na integraci Laplaceovy transformace se získají z předchozích vzorců pro derivace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(\int_0^t f(t)\ \mathrm{d}t\Big)(s) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s) \\
\int_s^\infty \mathcal{L}(f(t))(\sigma)\ \mathrm{d}\sigma &= \mathcal{L}\Big(\frac{f(t)}{t}\Big)(s)\,.
\end{aligned}$$

Konvoluce

Konvoluce je cosi jako stočení dvou věcí dohromady.

Jednou jsem si sedl na konvoluci a nešlo to narovnat.

Jak již bylo zmíněno, Laplaceova transformace nepřevádí násobení funkcí na násobení obrazů.
Existuje však důležitá jiná binární operace na funkcích, která se Laplaceovou transformací převádí na násobení.

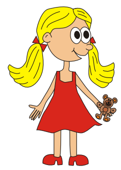
DEFINICE. Konvoluce na $(0,\infty)$ dvou funkcí f, g je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau\,.$$

Zřejmě $(f * g)$ existuje, pokud jsou obě funkce f, g po částech spojité na $(0,\infty)$.

Vlastnosti konvoluce jsou probrány v *Otázkách*.

Konvoluce je když: zdroj rámusu o síle $f(\tau)$ v čase τ se vzdaluje a vy jej vnímáte s intenzitou závislou na vzdálenosti $g(t-\tau)$, uvedená konvoluce je pak celkový zaznamenaný rámus během intervalu $[0,t]$.



Já už si s bubínkem nehraju.

VĚTA. Pro po částech spojité a exponenciálně omezené funkce f, g na $(0,\infty)$ platí $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$.

Důkaz. Pravá strana dokazované rovnosti se rozepíše pomocí definice transformace a ve vzniklém dvojnásobném integrálu se dá substituce $t + r = p$

$$\mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-s(t+r)} f(t)g(r)\ \mathrm{d}r \Big)\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-sp} f(t)g(p-t)\ \mathrm{d}p \Big)\ \mathrm{d}t\,,$$

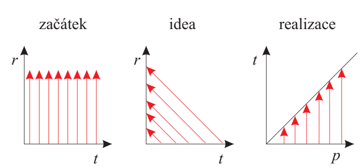
kde místo $g(p-t)$ by se správně mělo psát $u_v(t)g(p-t)$.

Podmínky na funkce f, g stačí k přehození pořadí integrace:

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-sp} f(t)g(p-t)\ \mathrm{d}p \Big)\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-sp} \Big(\int_0^p f(t)g(p-t)\ \mathrm{d}t \Big)\ \mathrm{d}p = \mathcal{L}((f*g)(p))(s)\,.$$

$\diamond$

Důkaz si lze pěkně představit geometricky. Vycházíme z integrace přes 1. kvadrant roviny z funkce $e^{-s(r+t)} f(t)g(s)$. Integraci můžeme díky větě o substituci provádět po "úhlopříčkách". A integrace přes jednu úhlopříčku kde $r + t = p$ nám právě dá konvoluci $f * g$ v bodě p pronásobenou e^{-sp}.



INVERZNÍ LAPLACEOVA TRANSFORMACE

V definici Laplaceovy transformace možné chápat proměnnou t jako komplexní číslo a $\mathcal{L}(f)$ je tedy komplexní funkce komplexní proměnné.

Pokud je f exponenciálně omezená, tj. $|f(t)| \leq ke^{bt}$ pro nějaká reálná čísla k, b, lze ukázat, že funkce $\mathcal{L}(f)(z)$ je holomorfní pro $\Re(z) > b$.

Použijeme-li větu o inverzní Fourierově transformaci, dostane následující tvrzení (podrobnosti v kapitole o Fourierově transformaci).

VĚTA. Nechť f je po částech hladká komplexní funkce reálné proměnné, která je rovna 0 pro $t < 0$ a $|f(t)| \leq ke^{bt}$ pro nějaká reálná čísla k, b a pro $t > 0$. Potom $\mathcal{L}(f)(z)$ je holomorfní funkce na polorovině $\Re(z) > b$ a pro libovolné $c > b$ je

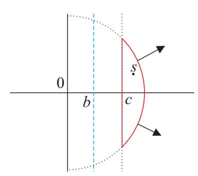
$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\infty \mathrm{i}}^{c+\infty \mathrm{i}} \mathcal{L}(f)(u) e^{tz} \, \mathrm{d}z \,.$$

Uvedená integrace je po přímce kolmé k reálné v bodě c.

A ten klobouk nad f, co se píše takhle $\widehat{f}(t)$, je zase to Fourierovské průměrování.

Uvedeme ideu alternativního důkazu.

Důkaz. Nalezneme b a zvolíme $c > b$. Pro s mající $\Re s > c$ sestrojíme křivku, skládající se z části polokružnice o středu 0 a z části přímky kolmé k reálné ose v bodě c tak, aby s ležel uvnitř.



Použijeme Cauchyův vzorec a dostaneme

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{F(z)}{z - s} \, \mathrm{d}z \,.$$

Při zvětšování poloměru uvažované kružnice jde integrál přes části polokružnice k nule díky exponenciální omezenosti f. Přes svislou část integrál konverguje k integrálu přes celou přímku.

Tedy dostáváme (pořád jde o komplexní křivkový integrál)

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(z)}{z - s} \, \mathrm{d}z \,.$$

Spočteme $f(t) = \mathcal{L}_{-1}\{F(s)\}$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}_{-1}\{F(s)\} = \\
&= \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{F(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z\right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)\mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{z-s}\right\}\mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z\,,
\end{aligned}
$$

neboť

$$\mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{z-s}\right\} = e^{zt}\,.$$

$\diamond$

To $\mathcal{L}_{-1}$ je koumes.

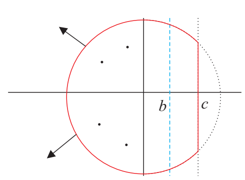
Nyní je možné počítat inverzní Laplaceovu transformaci pomocí uvedeného vzorce. Nicméně, přímý výpočet tohoto integrálu může být komplikovaný.

V některých případech je možné s výhodou použít reziduovou větu. Integrace po uvedené přímce se spočte limitou integrálů přes zvětšující se intervaly, které se doplní (většinou polokružnicí) na uzavřenou křivku.

Následující věta popisuje velkou třídu funkcí, pro které je možné takto inverzní Laplaceovu transformaci spočítat.

VĚTA. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C}\setminus\{z_1,...,z_n\}$ a existují $k,p>0$ tak, že $|g(z)|\le k|z|^{-p}$ pro $x\in\mathbb{C}\setminus\{z_1,...,z_n\}$. Potom pro $c>\max\{\Re(z_1),...,\Re(z_n)\}$ je

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-\infty\mathrm{i}}^{c+\infty\mathrm{i}} g(z)e^{tz}\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{tz})\,.$$



Rezidua se prostě nemohou nepoužívat, když jsou tak roztomilá.

Důkaz. Nechť C je křivka skládající se z úsečky $C_1 = \{c+\mathrm{i}t; t \in [-R,R]\}$ a z polokružnice $C_2 = \{c+R e^{\mathrm{i}t}; t \in [\pi/2, 3\pi/2]\}$. Zvolí se $R > 0$ tak, že všechny singulární body $z_1, ..., z_n$ leží uvnitř C.

Podle reziduové věty je

$$\int_{C_1} g(z)e^{xz}\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} g(z)e^{xz}\,\mathrm{d}z = \int_C g(z)e^{xz}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{xz})\,.$$

Poslední výraz nezávisí na R a limita prvního integrálu pro $R \to \infty$ je počítaný integrál $\int_{c-\infty\mathrm{i}}^{c+\infty\mathrm{i}} g(z)e^{xz}\,\mathrm{d}z$. Stačí tedy ukázat

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} g(z)e^{xz}\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} g(c+Re^{\mathrm{i}t})e^{x(c+R(\cos t+\mathrm{i}\sin t))} R\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Pro posledně integrovanou funkci platí pro $R > c$ odhad (dokažte)

$$\left|g(c+Re^{\mathrm{i}t})e^{x(c+R(\cos t+\mathrm{i}\sin t))} R\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}\right| \le \frac{Rke^{xc\,p}}{R-c}\, e^{xR\cos t}\,.$$

Integrál z poslední exponenciály lze odhadnout následovně:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{xR\cos t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} e^{-xR\sin t}\,\mathrm{d}t \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-xR2t/\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{xR}(1-e^{-xR})\,.$$

takže výsledný odhad je

$$\left|\int_{C_2} g(z)e^{xz}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{\pi k e^{cx}}{x(R-c)^p}\left(1-e^{-xR}\right)$$

a poslední výraz konverguje k 0 pro $R \to \infty$. ◇

Přeformulováním předchozí věty se dostává tvrzení o výpočtu inverzní Laplaceovy transformace:

DŮSLEDEK. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ a existují $k, p > 0$ tak, že $|g(z)| \le k|z|^{-p}$ pro dostatečně velká $|z|$. Potom

$$\mathcal{L}_{-1}(g(z))(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{tz})\,.$$

Poznámky 2:

Výsledkem lineární kombinace funkcí u_a pro různá a je schodovitá funkce mající jen konečně mnoho hodnot, které nabývá na intervalech (nebo jejich sjednocení).

Takové funkce (i s nekonečně mnoha hodnotami, které se nabývají na hezky rozložených intervalech) se vyskytují v teorii informace, při studiu signálů, při náhlých změnách elektrického proudu apod.

Všimněte si, že ve vzorcích pro integraci je v prvním vzorci integrál od 0, kdežto ve druhém vzorci integrál do ∞.

Dovedete vysvětlit, proč je to takto vhodné? Zkuste vzít ve druhém integrálu meze od 0 do s.

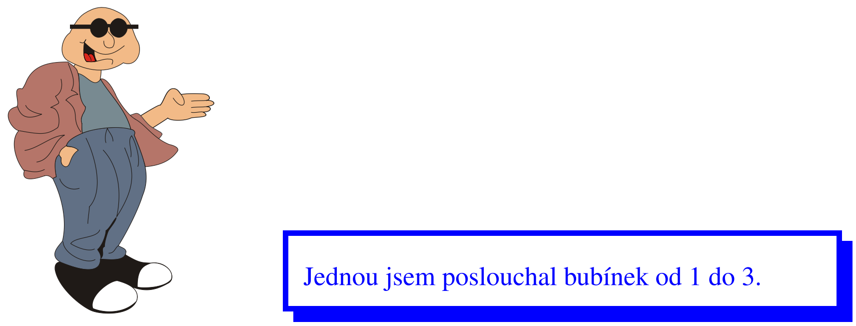
V prvním vzorci pro derivaci je předpoklad, že f je spojitá. Co se stane bez tohoto předpokladu je probráno v *Otázkách*.

Je zajímavé, že Laplaceova transformace f' pak existuje jen bez předpokladu exponenciální omezenosti (např. pro $\sin(e^{t^2})$).

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Napište funkci f, která se rovná 1 na $[1,3]$ a jinde 0, pomocí funkcí u_a a rovnou napište $\mathcal{L}(f)$.



2. Najděte Laplaceovu transformaci funkcí: sinus posunutou o π doprava, třetí mocnina posunutá o 3 doprava, exponenciála posunutá o 2 doprava.

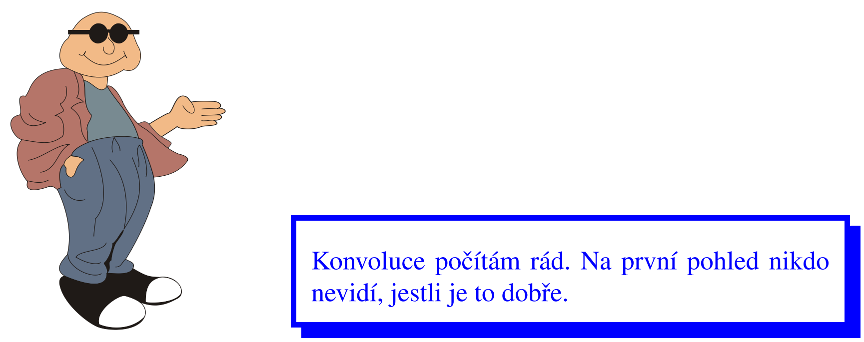
3. Pomocí vzorce pro derivaci najděte Laplaceovu transformaci funkce $t\sin(at)$ a indukcí pro $t^n \sin(at)$.

4. Pomocí druhého vzorce pro integraci najděte $\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)$.

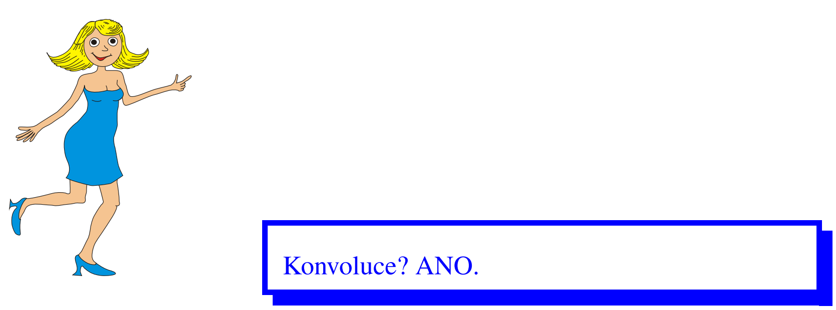
5. Spočtěte $\mathcal{L}((e^{bt} - e^{at})/t)$.

6. Spočtěte $\mathcal{L}(\delta_a(t))$, kde $\delta_a(t)$ je Diracova delta funkce posunutá o a, tj. má nekonečnou hodnotu v bodě a (může se též značit jako $\delta(t-a)$).
Ukažte, že $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(a)$, jakmile je f spojitá v a.

7. Spočtěte konvoluci funkcí e^t a t.



8. Spočtěte konvoluci funkcí e^t a e^{3t} jednak pomocí definice, jednak použitím vzorce pro Laplaceovu transformaci konvoluce.



Konec příkladů 2.

Otázky 2:

1. Dokažte všechny uvedené vzorce pro posunutí, zvětšení, derivaci (pomocí integrace po částech) a integraci.

2. Ukažte, že na Taylorovu řadu funkce e^{-t^2} nelze použít Laplaceovu transformaci člen po členu.

3. Proč nemohou existovat vzorce pro Laplaceovu transformaci funkce posunuté doleva?

3. Odvoďte $\mathcal{L}(\cos(at))$ z $\mathcal{L}(\sin(at))$ pomocí vzorce pro derivace.

Použijete-li vzorec pro druhou derivaci funkce sinus nebo kosinus, spočtete z rovnosti $\mathcal{L}(\cos(at))$ i $\mathcal{L}(\sin(at))$.

4. Do vzorce pro Laplaceovu transformaci derivace dosaďte za f exponenciálu. Z rovnosti vypočtěte $\mathcal{L}(e^t)$.

5. Dokažte, že konvoluce * je komutativní, asociativní a distributivní vzhledem ke sčítání.

6. Ukažte, že pro funkce $f(t) = t^{p-1}, g(t) = t^{q-1}$ platí

$$(f * g)(t) = t^{p+q-1} B(p, q)$$

(použijte vhodnou substituci do definice konvoluce těchto funkcí).

Odtud plyne (z věty o Laplaceově transformaci konvoluce):

$$\mathcal{L}(t^{p+q-1} B(p, q))(s) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}} ,$$

kde poslední rovnost plyne z vyjádření $\mathcal{L}(t^a)$ pomocí Gama funkce (viz *Otázky 1*).

Do rovnosti dosaďte podobné vyjádření pro $\mathcal{L}(t^{p+q-1})$ a dostáváte jiný důkaz rovnosti $B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ – zde používáte Lerchovu větu.

7. Použijte první vzorec pro derivaci na funkci u_a a dostanete neplatnou rovnost. Proč?

V důkazu tohoto vzorce se používala integrace po částech. Pro nespojitou funkci však je rovnost pro integraci po částech jiná.

Vezměte po částech spojitou a exponenciálně omezenou funkci f, která je spojitá až na skok v bodě $a > 0$ a má po částech spojitou derivaci (kromě bodu a).

Při výpočtu Laplaceovy transformace funkce f' rozdělte $(0, \infty$ na $(0, a)$ a (a, ∞) a na každém z těchto dvou intervalů použijte integraci po částech.

Dostanete zobecnění prvního vzorce pro derivace.

Konec otázek 2.

Cvičení 2: Příklad. Dokažme, že Diracova delta funkce je neutrálním prvkem při násobení definovaným jakožto konvoluce na $(0, \infty)$, tj. že pro každou po částech spojitou funkci f platí

$$f * \delta_0 = f.$$

Na Diracovu funkci vzpomínám s láskou. Jednou jsem ji u zkoušky laplasoval a dostal jsem jedničku.

Řešení. Podle definice konvoluce na $(0, \infty)$ máme

$$(f * \delta_0)(t) = \int_0^t f(\tau)\delta_0(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)\delta_x(t)\,\mathrm{d}\tau = f(t).$$

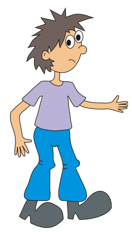
Za dodatečných předpokladů na funkci f, kdy lze použít Laplaceova transformace, můžeme postupovat také takto

$$\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(\delta_0) = \mathcal{L}(f),$$

$$\mathcal{L}(f * \delta_0) = \mathcal{L}(f),$$

$$f * \delta_0 = f.$$

Dokázali byste jednotlivé kroky odůvodnit?



No to teda jako, no vlastně, nu jednotlivé ano, ale nuž všechny ne. Ne? Teda prostě anžto, ne.

Příklad. Spočtěte $\mathcal{L}(t \sin t)$ pomocí vzorečku na derivování.

Řešení.

$$\mathcal{L}(t \sin t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}(\sin t) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}\,.$$

Příklad. Spočtěte pomocí reziduí

$$\mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}.$$

Řešení.

$$f(t) = \operatorname{res}(F(s)e^{st}, -1) = \lim_{s \to -1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} e^{st} = te^{-t}\,.$$

Příklad. Spočtěte pomocí reziduí

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s-2)}\right\}.$$

Řešení.

$$f(t) = \operatorname{res}(F(s)e^{st}, -1) + \operatorname{res}(F(s)e^{st}, 2) = \ldots$$

a výsledek je

$$f(t) = \frac{e^2 t}{9} - \frac{te^{-t}}{3} - \frac{e^{-t}}{9}\,.$$

Příklad. Spočtěte

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{s^2+1}\right\}.$$

Řešení.

$$\frac{s^2+s+1}{s^2+1} = 1 + \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Výsledek je

$$f(t) = \delta(t) + \cos(t)\,.$$

Konec cvičení 2.

POUŽITÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE

A co teď uděláme? Prostě obě strany diferenciální rovnice proženeme Laplaceovou transformací.

Taky by bylo možné tak „prohnat“ i integrální rovnice.

Laplaceova transformace se používá při řešení diferenciálních rovnic (obyčejných i parciálních) a integrálních rovnic nebo jejich kombinací.

Některé tyto rovnice s neznámou y se dají pomocí Laplaceovy rovnice převést na algebraické rovnice s neznámou $\mathcal{L}(y)$.

Po vyřešení $\mathcal{L}(y) = h$ je nutné ještě najít inverzní obraz $\mathcal{L}^{-1}(h)$.

Vzorec a výpočet inverzní Laplaceovy transformace používá teorii komplexních funkcí; bez její znalosti je možné výsledek „uhádnout" z tabulek obrazů $\mathcal{L}(f)$.

Použití bude vyloženo na příkladech.

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Rovnice $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$ (neznámá je $y(t)$) se zobrazí Laplaceovou transformací na

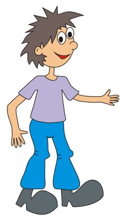
$$(s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0)) - 3(s\mathcal{L}(y) - y(0)) + 2\mathcal{L}(y) = 1/(s-3)$$

s neznámou $\mathcal{L}(y)$ proměnné s.

Nechť jsou počáteční podmínky rovnice $y(0) = 0, y'(0) = 0$. Potom

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1/2}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1/2}{s-3}\,.$$

Odtud vyplývá $y(t) = e^t/2 - e^{2t} + e^{3t}/2$, což je hledané řešení.



Něco mi říká, že to tak lehce jde a půjde jenom někdy …

Popíšeme si situaci obecně. Nechť řešíme lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty ve tvaru $Ty = f$, kde $f \in E$ a T je

$$Ty = y(n) + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + p_1y' + p_0y\,.$$

Zobecněným řešením rozumíme y se spojitou takové, že $y^{(n-1)}$ je spojitá a hladkost y odpovídá f. Klidovým řešením rozumíme y vyhovující nulovým počátečním podmínkám

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0\,.$$

Označme

$$P(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + p_{n-2}s^{n-2} + \ldots + p_1s + p_0\,.$$

Klidové řešení y rovnice $Ty = f$ vyhovuje po aplikaci Laplaceovy transformace rovnosti $P(s)\mathcal{L}y = \mathcal{L}f = F(s)$.

Řešení y rovnice $Ty = f$ s obecnými počátečními podmínkami ($y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, …) vyhovuje po aplikaci Laplaceovy transformace rovnosti $P(s)\mathcal{L}y - P_0(s) = \mathcal{L}f = F(s)$ pro vhodný polynom $P_0(s)$ zahrnující počáteční podmínky.

Tedy

$$\mathcal{L}y = \frac{F(s)}{P(s)} + \frac{P_0(s)}{P(s)}\,.$$

Označme u, v takové funkce, aby

$$\mathcal{L}u = \frac{F(s)}{P(s)}\,,\ \mathcal{L}v = \frac{P_0(s)}{P(s)}\,.$$

Pak $y = u + v$, kde u a v řeší tyto úlohy

$$Tu = f\,,\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

$$Tv = 0\,,\ v(0) = y_0, v'(0) = y_1, \ldots, v^{(n-1)}(0) = y_{n-1}\,.$$

Něco mi to připomíná.

Uvažujme nyní klidová řešení y, d rovnic $Ty = f$ a $Td = \delta$.
Tedy analogicky $P(s)\mathcal{L}y = \mathcal{L}f$, $P(s)\mathcal{L}d = \mathcal{L}\delta = 1$. Spočteme

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{P(s)}\mathcal{L}f = \mathcal{L}d \cdot \mathcal{L}f = \mathcal{L}(d * f)\,.$$

Tedy $y = d * f$ a je tedy názorně vidět význam Diracovy delta funkce.

Klidové řešení pro pravou stranu Dirac dává v konvoluci klidové řešení pro jakoukoliv pravou stranu. COOL.

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je možné samozřejmě řešit klasicky, jak bylo ukázáno v příslušné kapitole.

Nicméně, použití Laplaceovy transformace je v některých případech jednodušší a výsledky dává ve vhodnějším tvaru.

To hlavně v případech, kdy pravá strana diferenciální rovnice není spojitá, nebo je to složitější funkce.

Je to prostě STROJ !!!

Má se vyřešit diferenciální rovnice

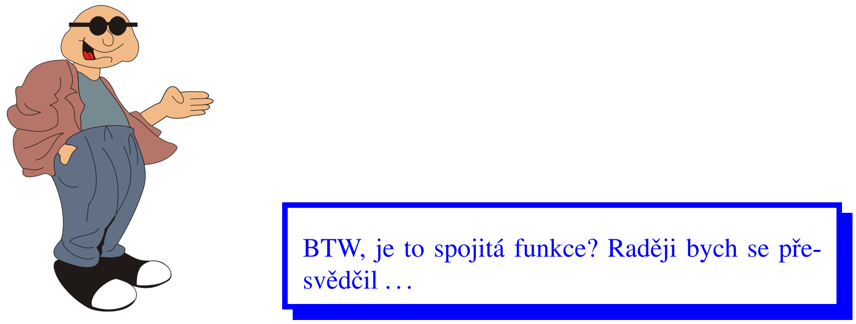
$$y'' + y = \begin{cases} 0, & \text{pro } 0 \le t < 1 \text{ nebo } t \ge 2; \\ 1, & \text{pro } 1 \le t < 2. \end{cases} \quad , \quad y(0) = 0, y'(0) = 1\,.$$

Pravá strana rovnice lze psát jako $u_1(t) - u_2(t)$, takže po provedení Laplaceovy transformace:

$$(s^2 + 1)\mathcal{L}(y) = 1 + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\,.$$

Odtud vyplyne $y(t) = \sin t + u_1(t)(1 - \cos(t-1)) - u_2(t)(1 - \cos(t-2))$ a tedy

$$y(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{pro } 0 \le t \le 1; \\ \sin t + 1 - \cos(t-1), & \text{pro } 1 \le t \le 2; \\ \sin t - \cos(t-1) + \cos(t-2), & \text{pro } t \ge 2. \end{cases}$$

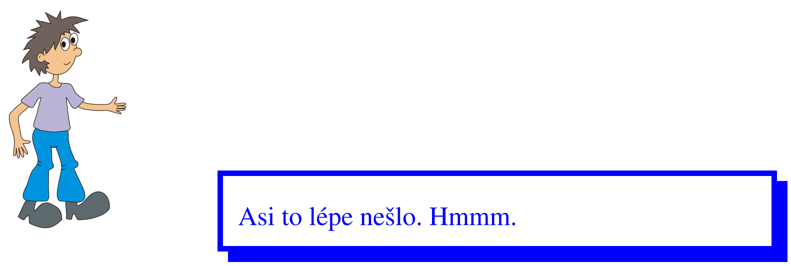


Rovnice $y'' - 3y' + 2y = f(t)$ dává $\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right)$, což znamená

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(e^{-2t} - e^{-t}) = \mathcal{L}(f * (e^{-2t} - e^{-t}))\,,$$

takže řešení lze psát ve tvaru

$$y(t) = f(t) * (e^{-2t} - e^{-t}) = \int_0^t f(u)(e^{-2(t-u)} - e^{-(t-u)})\, \mathrm{d}u\,.$$



Lineární diferenciální rovnice s nekonstantními koeficienty

Následující jednoduchý příklad dává návod k řešení některých lineárních diferenciálních rovnic s nekonstantními koeficienty.
Rovnice $y'' + ty' - 2y = 4$ s počátečními podmínkami $y(0) = -1, y'(0) = 0$ se zobrazí Laplaceovou transformací a po úpravě se dostane diferenciální rovnice

$$\mathcal{L}'(y) + \mathcal{L}(y)\left(\frac{3}{s} - s\right) = 1 - \frac{4}{s^2}\,,$$

která má řešení $\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{Ce^{s^2/2}}{s^3}$. Protože $\mathcal{L}(y) \to 0$ pro $s \to \infty$, je $C = 0$. Výsledek je tedy $y = t^2 - 1$.

Soustavy diferenciálních rovnic

Postup je stejný jako v předchozí části. Soustava

$$\begin{aligned} y' &= -z\,, \quad y(0) = 1 \\ z' &= y\,, \quad z(0) = 0 \end{aligned}$$

se pomocí Laplaceovy transformace převede na soustavu

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(z) &= 1 \\ \mathcal{L}(y) - s\mathcal{L}(z) &= 0\,, \end{aligned}$$

která má řešení $\mathcal{L}(z) = 1/(s^2+1)$, takže $z = \sin t, y = \cos t$.

Integrální rovnice

Má se vyřešit rovnice $y(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t-u)y(u)\,\mathrm{d}u$. Integrál na pravé straně je roven $\sin * y$, takže $\mathcal{L}(y)(s) = 3!/s^4 + \mathcal{L}(y)(s)/(s^2+1)$.
Snadno se nyní zjistí řešení $y = t^3 + t^5/20$.

Diferenční rovnice

Úkolem je najít „nerekurentní" vyjádření členů posloupnosti $\{a_n\}$ zadané rekurentně vzorcem

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n\,,\, a_0 = 0\,,\, a_1 = 1\,.$$

V předchozí rovnosti probíhá proměnná n čísla $n = 0, 1, 2, ...$
Na chvíli lze uvažovat, že předchozí rovnost platí pro $n \geq 2, n \in \mathbb{R}$. Tedy můžeme hledat funkci

$$y(t) = a_n, \ \ n \leq t < n+1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

splňující rovnici

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0\,.$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace (pracujeme opatrně) se dostane

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^{2s} - 3e^s + 2)} = \frac{1-e^{-s}}{s}\left(\frac{1}{1-2e^{-s}} - \frac{1}{1-e^{-s}}\right) = \mathcal{L}(2^{[n]} - 1)\,.$$

To se musí najít v tabulkách. Hmmm. Je to tam:

$$\mathcal{L}(a^{[t]}) = \frac{1-e^{-s}}{s(1-ae^{-s})}$$

Odtud plyne řešení $y(t) = 2^{[n]} - 1$ a následně $a_n = 2^n - 1$.

Parciální diferenciální rovnice

Pokud má parciální diferenciální rovnice ve funkci $u(x,t)$ dvě proměnné x, t, podle kterých se derivuje, můžeme derivováním podle t odstranit použitím Laplaceovy transformace a dostat obyčejnou diferenciální rovnici.

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t\,,$$

$$\mathcal{L}_{-1}\{U(x,s)\} = u(x,t)\,.$$

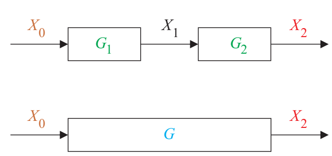
A funguje to, pokud umíme počítat diferenciální rovnice, nebo pokud použijeme Laplace ještě jednou ...

Ve cvičeních spočítáme rovnici vedení tepla $v_t = kv_{xx}$ a vlnovou rovnici $v_{tt} = c^2 v_{xx}$.

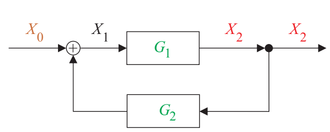
Řízení procesu

Zkoumejme opět pro diferenciální operátor T klidové řešení x rovnice $Tx = f$. Dostaneme $P(s)\mathcal{L}x = \mathcal{L}f$. Označíme $X = \mathcal{L}x$, $F = \mathcal{L}f$ a $G(s) = 1/P(s)$ a dostaneme $X = G(s)F$.

Pokud rovnice popisovala situaci, kdy z daného vstupu X_0 dostaneme výstup X_1 pomocí procesu G_1, máme vztah $X_1 = G_1(s)X_0$. Pokud tento výstup vstupuje do procesu G_2 dostaneme výstup $X_2 = G_2X_1 = G_2G_1X_0$. Tedy napojení procesů odpovídá procesu $G = G_1G_2$.



Pokud se procesy spojí tak, že výstup z G_1 se přidá zpracovaný procesem G_2 ke vstupu do procesu G_1, dostaneme situaci, které se říká zpětná vazba.



Máme $X_1 = X_0 + G_2X_2$, $X_2 = G_1(X_0 + G_2X_2)$, tedy $X_2 = GX_0$, kde

$$G = \frac{1}{1 - G_1G_2}\,.$$

Pokud G_2 funguje jako zpětná vazba v systému popsaném

$$\frac{G_1}{1+G_1G_2}\,,$$

tak nastavením hodnoty $G_2 = 1/10$ zaručíme, že případný stonásobný nárůst G_1 nezpůsobí přílišnou škodu.

Pokud G_2 má knoflík na otáčení, můžeme s ním řídit důležité procesy.

Poznámky 3:

Na uvedených příkladech je vidět základní přístup k řešení různých typů rovnic pomocí Laplaceovy (nebo jiné integrální) transformace.

Aplikací transformace se rovnice převede na jiný typ, který bývá jednodušší k řešení (samozřejmě, ne vždy).

Při tomto postupu je nutné předpokládat, že řešení má Laplaceovu transformaci a všechny vyskytující se dané funkce (např. pravá strana lineární diferenciální rovnice) mají Laplaceovu transformaci.

Ve všech případech je pak třeba vyřešit rovnici $\mathcal{L}(y(t))(s) = g(s)$, kde g je řešení transformované rovnice. Musí se tedy najít inverzní obraz $\mathcal{L}^{-1}(g)$. Vzorec pro inverzní Laplaceovu transformaci bude uveden v příštím semestru.

Pokud se hledá spojité y (až na málo bodů), pak je podle Lerchovy věty jediné a lze ho v některých případech zjistit z tabulek obrazů Laplaceovy transformace.

Snadné to je u funkcí g, které jsou buď racionální funkce nebo jejich kombinace s exponenciálními funkcemi. O tom v *Otázkách*.

Uvědomte si, že řešení diferenciální rovnice musí být spojitá funkce, protože má vlastní derivaci.

Výjimkou je uvedený příklad v *Příkladech*, kde je na pravé straně Diracova delta funkce a v daném bodě je derivace řešení nevlastní.

Nicméně, existují derivace řešení zleva a zprava a řešení tedy bude opět spojité.

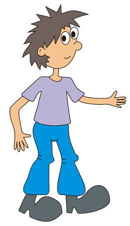
Inverzní Laplaceův obraz nejde vždy vyjádřit pomocí známých funkcí.

To je případ v příkladu 5. Pak lze řešení uvést pomocí řad.

Je nutné dávat pozor, protože (jak ukazuje příklad z *Otázek* 1), Laplaceovu transformaci řady nelze ani u mocninných řad provádět člen po členu.

Je to možné, pokud pro řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ existují $K > 0, p > 0$ tak, že $|a_n| \le Kp^n/n!$ pro skoro všechna n.

Potom $\mathcal{L}\big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n\big)(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n! s^{-n-1}$.



To ale přece odpovídá podmínce <u>exponenciální omezenosti</u>! Nejsem greenhorn.

Konec poznámek 3.

Příklady 3:

1. Vyřešte znovu rovnici $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$, tentokrát obecně, bez daných počátečních podmínek.

2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 4y = 0$.

3. Vyřešte rovnici $y'' + y = g(t)$, kde $g(t) = 1$ na $[1, 2)$ a je rovno 0 jinde, s počátečními podmínkami $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

4. Vyřešte rovnici $y'' + 2y' + 5y = \delta_1(t)$ s počátečními podmínkami $y(0) = 0, y'(0) = 0$. V tomto případě předpokládáme, že řešení y má spojité derivace do 2.řádu a je exponenciálně omezené.

A zase něco pro radost.

***5.** Řešte rovnici $ty'' + y' + ty = 0$ s počátečními podmínkou $y(0) = 1$. (Dostanete jednoduchou diferenciální rovnici pro $\mathcal{L}(y)$, která bude mít řešení $\mathcal{L}(y) = C(s^2 + 1)^{-1/2}$.)

Zkuste najít spojité y, které má tuto Laplaceovu transformaci, pomocí řad.) [$y = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2^n n!)^2}$, tzv. Besselova funkce J_0]

Ano.

6. Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} y' + z' + y + z &= 1 \\ y' + z &= e^t \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = -1, z(0) = 2$. [$y = 1 - 2e^t + te^t, z = 2e^t - te^t$]

7. Vyřešte integrální rovnici $y(t) = e^t - \int_0^t (t-u)^2 y(u)\ \mathrm{d}u$.

8. Vyřešte diferenční rovnici $y(t) - y(t - \pi/a) = \sin(at)$ při podmínce $y(t) = 0$ pro $y \leq 0$. [$y(t) = \sin(at)$ na intervalech $(2\pi n/a, 2\pi(n+1)/a)$ a 0 jinde.]

9. Označme $f(t) = [t]$ pro $t \geq 0$, $f(t) = 0$ pro $t < 0$ (jde o kladnou celou část čísla). Spočtěte

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s(e^s - 1)} = \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})}\,.$$

Spočtěte řešení diferenční rovnice

$$y(t+1) - y(t) = 1,\ \ y(y) = 0,\, t < 1\,.$$

Ověřte, že $y(t) = f(t)$.

Konec příkladů 3.

Otázky 3:

1. Má-li se najít inverzní Laplaceův obraz racionální funkce, rozloží se racionální funkce na parciální zlomky, stejně jako u počítání integrálu z racionální funkce.

Protože Laplaceova transformace je lineární, je i její inverzní transformace lineární. Stačí tedy znát inverzní obrazy jednotlivých parciálních zlomků.

Určete nyní (pomocí vzorce pro derivaci) inverzní obraz funkce $(s - a)^{-n}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

2. Pomocí úpravy na čtverec jmenovatele najděte inverzní obraz zlomku $(as + b)/(ps^2 + qs + r)$.

Vyjde kombinace sinu a kosinu. U vyšších mocnin jmenovatele je situace složitější (vyjdou kombinace $t^n \sin(ct), t^k \cos(dt)$).

3. Pokud se řeší diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami, vyřeší se pomocí Laplaceovy transformace s (částečně) obecnými $y(0), y'(0)$ a pak se okrajové podmínky dosadí.

Vyřešte rovnici $y'' + y = \cos t$ pro $y(0) = 1, y(\pi/2) = 1$.

Konec otázek 3.

Cvičení 3: Příklad. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - 4y(t) = 0$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$.

Řešení. Na obě strany zadané rovnice provedeme Laplaceovu transformaci.

Dostaneme

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) - 4\mathcal{L}(y) = 0.$$

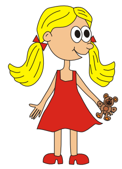
Dosazením počátečních podmínek získáme rovnost

$$\mathcal{L}(y) = \frac{-1}{s^2 - 4} = \frac{1}{2-s} \cdot \frac{1}{2+s} = \frac{1/4}{2-s} + \frac{1/4}{2+s}.$$

Inverzní Laplaceovou transformací přejdeme k hledanému řešení diferenciální rovnice

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-2t} - e^{2t}\right).$$

Víme, kdy, jak a proč to funguje. Ale je to pořád paráda.



Růžové náušničky fungují VŽDYCKY. TO je paráda.

Příklad. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$z'(t) + y(t) = 0,$$
$$z(t) + y'(t) = 0,$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $z(0) = 1$.

Řešení. Laplaceovou transformací převedeme danou soustavu na soustavu

$$s\mathcal{L}(z) - z(0) + \mathcal{L}(y) = 0,$$
$$\mathcal{L}(z) + s\mathcal{L}(y) - y(0) = 0.$$

Po dosazení počátečních podmínek z druhé rovnice vyjádříme

$$\mathcal{L}(z) = -s\mathcal{L}(y).$$

Nyní tento vztah dosadíme do první rovnice a po snadné úpravě máme

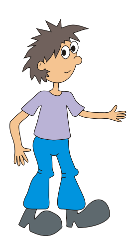
$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{1-s^2} = \frac{1/2}{1-s} + \frac{1/2}{1+s}.$$

Po zpětné transformaci tedy

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right).$$

Funkci $z(t)$ můžete lehko určit například z druhé rovnice.

To lehce dovede i malé dítě.



Jsem rád, že nejsem malé dítě.

Příklad. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte pro $t > 0$ klidová řešení diferenciálních rovnic

$$y'(t) = u(t)$$
$$d'(t) = \delta(t)$$

a ověřte, že

$$y = u * d\,.$$

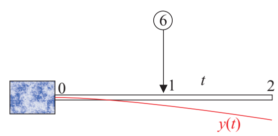
Řešení. Dostaneme $s\mathcal{L}y = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}y = \frac{1}{s^2}$, $y = t$.

Podobně $s\mathcal{L}d = 1$, $\mathcal{L}d = \frac{1}{s}$, $d = 1$.

Ověříme

$$t = y = u * d = \int_0^t 1 \cdot 1 \;\, \mathrm{d}t \;=\; t\,.$$

Příklad. Máme nehmotný nosník, který čouhá ze zdi a je na něm v polovině umístěno závaží 6 kg. Zjistěte, jak se prohýbá.



Řešení. Fyzikální důvody vedou k diferenciální rovnici (závaží znázorňuje Diracova delta funkce v bodě 1, nosník je popsán funkcí y na intervalu $[0,2]$)

$$y^{(iv)}(t) = 6\delta(t-1)\,,$$

kde $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(2) = y'''(2) = 0$.

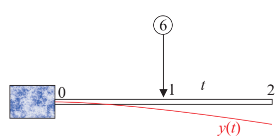
Parametry označíme počáteční podmínky, které Laplaceova transformace požaduje $y''(0) = a$, $y'''(0) = b$ a počítáme ...

Dostaneme

$$y(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{b}{6}t^3 + u(t-1)(t-1)^3\,.$$

Pomocí hodnot v bodě $t = 2$ zjistíme parametry $a = 6$, $b = -6$.

Příklad. Máme nehmotný nosník, je na obou koncích podepřen a je na něm v polovině umístěno závaží 6 kg. Zjistěte, jak se prohýbá.



Řešení. Fyzikální důvody vedou k diferenciální rovnici (závaží znázorňuje Diracova delta funkce v bodě 1, nosník je popsán funkcí y na intervalu $[0,2]$)

$$y^{(iv)}(t) = 6\delta(t-1)\,,$$

kde $y(0) = y''(0) = 0$, $y(2) = y''(2) = 0$.

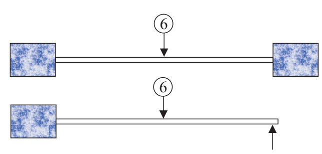
Parametry označíme počáteční podmínky, které Laplaceova transformace požaduje $y'(0) = a$, $y'''(0) = b$ a počítáme ...

Dostaneme

$$y(t) = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^3 + u(t-1)(t-1)^3\,.$$

Asi to má uprostřed extrém ...

A zkuste si nosník mezi dvěma zdmi nebo nosník na jedné straně ve zdi a na druhé podepřený ...



Příklad. Řešte diferenční rovnice

$$a_{n+1} + a_n = 1,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1\,.$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1\,.$$
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1\,.$$
$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 4n + 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1\,.$$

Příklad. Řešte diferenční rovnice

$$y(t) + y(t-1) = e^t,\ y(t) = 0\ t \leq 0\,.$$

$$y(t) + y(t-1) = t,\ y(t) = 0\ t \leq 0\,.$$

Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-3t},\ y(t) = 0,\ t \leq 0,\ y(0) = 4\,.$$

Řešení. Laplaceova transformace dává

$$sY(s) - y(0) + 2Y = \frac{1}{s+3}\,.$$

Odtud

$$Y(s) = \frac{5}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

a

$$y(t) = 5e^{-2t} - e^{-3t}\,.$$

Příklad. Spočtěte integrální rovnici

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau\,.$$

Řešení. Po Laplaceově transformaci máme

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s)\frac{1}{s^2+1}\,.$$

Tedy

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\,.$$

Řešení je

$$y(t) = t + \frac{1}{6}t^3\,.$$

Příklad. Řešte diferenciální rovnice

$$y'(t) + y(t) = f(t)$$

$$y''(t) - y(t) = f(t)$$

$$y''(t) = f(t)$$

s pomocí konvoluce.

Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y''(t) + y(t) = \delta(t)\,.$$

Řešení. Dostaneme

$$y(t) = u(t)\sin(t)$$

a je to jako když do klidného kyvadla ťukneme.

Příklad. Řešte rovnici

$$\frac{\mathrm{d}v(x,t)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v(x,t)}{\mathrm{d}t} = t$$

s okrajovými podmínkami $v(x,0) = 0$, $v(0,t) = t^2$.

Řešení. Po Laplaceově transformaci dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}V(x,s)}{\mathrm{d}x} + V(x,s) = \frac{1}{s^2}$$

s okrajovou podmínkou $V(0,s) = 2/s^3$.

Vyřešíme rovnici pro V a dostaneme

$$V(x,s) = c(s)e^{-x} + \frac{1}{s^2}\,.$$

Pro $x = 0$ použijeme počáteční podmínku ke spočtení neznámé funkce c:

$$V(0,s) = \frac{2}{s^3} = c(s) + \frac{1}{s^2}\,,$$

odkud dostaneme

$$c(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}$$

a po dosazení

$$V(x,s) = \left(\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}\right) e^{-x} + \frac{1}{s^2}\,.$$

A tedy

$$v(x,t) = t^2 e^{-x} - te^{-x} + t\,.$$

Příklad. Řešte rovnici vedení tepla

$$\frac{\mathrm{d}v(x,t)}{\mathrm{d}t} = k\frac{\mathrm{d}^2 v(x,t)}{\mathrm{d}x^2}$$

s okrajovými podmínkami $v(0,t) = v(\pi,t) = 1$, $v(x,0) = 1 + \sin(x)$.

Řešení. Po Laplaceově transformaci dostaneme rovnici

$$sV(x,s) - v(x,0) = k\frac{\mathrm{d}^2 V(x,s)}{\mathrm{d}x^2}$$

s okrajovou podmínkou $V(0,s) = V(\pi,s) = 1/s$.

Vyřešíme rovnici pro V a dostaneme

$$V(x,s) = \frac{1}{s} + \frac{\sin(x)}{s+k}\,.$$

A tedy

$$v(x,t) = 1 + e^{-kt}\sin(x)\,.$$

Příklad. Řešte vlnovou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(x,t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 v(x,t)}{\mathrm{d}x^2}$$

pro $x > 0$ s okrajovými podmínkami $v(0,t) = f(t)$, $v(x,0) = v_t(x,0) = 0$, a pro $t > 0$ vyhovující fyzikální podmínce

$$\lim_{x\infty} v(x,t) = 0\,.$$

Řešení. Po Laplaceově transformaci dostaneme rovnici

$$s^2 V(x,s) = \frac{\mathrm{d}^2 V(x,s)}{\mathrm{d}x^2}$$

s okrajovou podmínkou $V(0,s) = F(s)$.

Vyřešíme rovnici pro V a dostaneme

$$V(x,s) = a(s)e^{-sx} + b(s)e^{sx}\,.$$

Fyzikální důvody říkají, že

$$\lim_{x\to\infty} V(x,s) = 0$$

a tedy $b(s) = 0$.

A tedy

$$V(x,s) = F(s)e^{-sx}$$

a

$$v(x,t) = u(t-x)f(t-x)\,.$$

Konec cvičení 3.

STANDARDY z kapitoly

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Obecně se integrální transformace funkce f definuje jako

$$T(f)(s) = \int_a^b f(t)k(s,t)\ \mathrm{d}t\,,$$

kde $k(s,t)$ je tzv. jádro transformace, (a,b) je vhodný určený interval.
Bude probrána integrální transformace s jádrem e^{-st} na $(0,+\infty)$, později (v kapitole o Fourierově transformaci) integrální transformace s jádrem e^{-ist} na $(-\infty,+\infty)$ – tzv. Fourierova transformace.

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(0,+\infty)$. Pak se definuje její Laplaceova transformace $\mathcal{L}(f)$ následovně

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

VĚTA. Nechť funkce f má na $(0,+\infty)$ následující vlastnosti:

1. existuje vlastní $\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)$ a v každém intervalu $(0,n)$ je f spojitá až na konečně mnoho bodů, ve kterých jsou skoky;
2. existují kladné konstanty K, a tak, že $|f(t)| \le Ke^{at}$ na nějakém intervalu $(p,+\infty)$.

Potom je $\mathcal{L}(f)$ definována na $(a,+\infty)$ a $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.

Důkaz. Na intervalu $[0,p]$ je f omezená a po částech spojitá, takže zobecněný Newtonův integrál $\int_0^p e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$ konverguje.
Pro $t \in [p,\infty)$ je $|e^{-st}f(t)| \le e^{-(s-a)t}$ a $\int_p^\infty e^{-(s-a)t}\ \mathrm{d}t = e^{(s-a)p}/(s-a)$ konverguje, jakmile $s-a>0$. Navíc z poslední rovnosti plyne i $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$. $\diamond$

Pro jednoduchost se bude funkce f mající první vlastnost nazývat v této kapitole *po částech spojitá* a f mající druhou vlastnost *exponenciálně omezená*.

VĚTA. (Lerch) Jsou-li f, g spojité funkce na $[0,+\infty)$ a $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, pak $f = g$.

Příklad. Vypočtěte $\mathcal{L}(f)$ pro následující funkce f:

$$f = \text{konstanta } c\,, \quad f(t) = t\,, \quad f(t) = e^{at}\,, \quad f(t) = \sin(at)\,, \quad f(t) = \cos(at)\,.$$

Příklad. Vypočtěte $\mathcal{L}(f)$ pro funkci $f(t) = [t]$ na $[0,\infty)$, kde $[t]$ znamená celou část čísla t.

Příklad. Vezměte funkci (pro $a > 0$)

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{pro } 0 \le t \le a; \\ 0, & \text{pro } t > a. \end{cases}$$

Spočtěte Laplaceovu transformaci této funkce.
Limita $\lim\limits_{a\to 0_+} f_a$ je zobrazení, které má hodnotu nekonečnou v 0 a 0 jinde. Nazývá se *Diracova delta funkce* a značí se $\delta_0(t)$.
V tomto případě lze přehodit limitu a integrál definující Laplaceovu transformaci funkcí f_a.
Výsledkem je $\mathcal{L}(\delta_0(t)) = 1$.

VLASTNOSTI LAPLACEOVY TRANSFORMACE

Posunutí

Pro skokovou funkci

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < a; \\ 1, & \text{pro } t > a \end{cases}$$

(v bodě $t = a$ se může dodefinovat jakkoli, většinou hodnotou 0) se jednoduše spočítá její Laplaceova transformace:

$$\mathcal{L}(u_a)(s) = \int_a^\infty e^{-st}\, \mathrm{d}t = \frac{e^{-as}}{s}\,.$$

Funkce g definovaná na $(a, +\infty)$ (pro $a \geq 0$) a dodefinovaná hodnotou 0 na $[0, a]$ se bude jednoduše značit $u_a g$. Takže

$$u_a(t)f(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \leq a; \\ f(t-a), & \text{pro } t > a. \end{cases}$$

Perioda

Pokud zkoumáme periodickou funkci $f(t+p) = f(t)$, $p > 0$, označíme jeden kousek, který se dále opakuje

$$f_0(t) = u(t)f(t) - u(t-p)f(t)\,.$$

Pak

$$\mathcal{L}f_0 = \mathcal{L}f - e^{-ps}\mathcal{L}f\,,$$

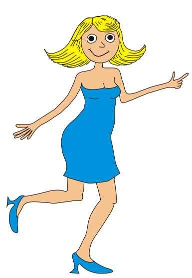
odkud vidíme

$$\mathcal{L}f = \frac{\mathcal{L}f_0}{1 - e^{-ps}}\,,\ \mathcal{L}f_0 = \int_0^p e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Derivace

Pokud je funkce f je spojitá i exponenciálně omezená, a f' po částech spojitá, dostaneme

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)\,.$$



Ono to opravdu zcela snadno prošlo.

Konvoluce

Existuje však důležitá jiná binární operace na funkcích, která se Laplaceovou transformací převádí na násobení.

DEFINICE. Konvoluce na $(0, \infty)$ dvou funkcí f, g je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Zřejmě $(f * g)$ existuje, pokud jsou obě funkce f, g po částech spojité na $(0, \infty)$.

VĚTA. Pro po částech spojité a exponenciálně omezené funkce f, g na $(0, \infty)$ platí $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$.

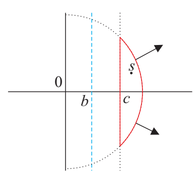
INVERZNÍ LAPLACEOVA TRANSFORMACE

VĚTA. Nechť f je po částech hladká komplexní funkce reálné proměnné, která je rovna 0 pro $t < 0$ a $|f(t)| \leq ke^{bt}$ pro nějaká reálná čísla k, b a pro $t > 0$. Potom $\mathcal{L}(f)(z)$ je holomorfní funkce na polorovině $\Re(z) > b$ a pro libovolné $c > b$ je

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\infty \mathrm{i}}^{c+\infty \mathrm{i}} \mathcal{L}(f)(u)e^{tz} \, \mathrm{d}z \,.$$

A ten klobouk nad f, co se píše takhle $\widehat{f}(t)$, je zase to Fourierovské průměrování.

Důkaz. Nalezneme b a zvolíme $c > b$. Pro s mající $\Re s > c$ sestrojíme křivku, skládající se z části polokružnice o středu 0 a z části přímky kolmé k reálné ose v bodě c tak, aby s ležel uvnitř.



Použijeme Cauchyův vzorec a dostaneme

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{F(z)}{z-s} \, \mathrm{d}z \,.$$

Při zvětšování poloměru uvažované kružnice jde integrál přes části polokružnice k nule díky exponenciální omezenosti f. Přes svislou část integrál konverguje k integrálu přes celou přímku.
Tedy dostáváme (pořád jde o komplexní křivkový integrál)

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(z)}{z-s} \, \mathrm{d}z \,.$$

Spočteme $f(t) = \mathcal{L}_{-1}\{F(s)\}$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}_{-1}\{F(s)\} = \\ &= \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(z)}{z-s} \, \mathrm{d}z\right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)\mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{z-s}\right\} \mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt} \, \mathrm{d}z \,, \end{aligned}$$

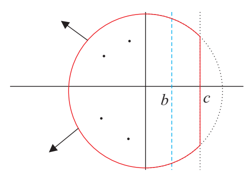
neboť

$$\mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{z-s}\right\} = e^{zt}\,.$$

$\diamond$

VĚTA. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C}\setminus\{z_1,...,z_n\}$ a existují $k,p>0$ tak, že $|g(z)|\le k|z|^{-p}$ pro $x\in\mathbb{C}\setminus\{z_1,...,z_n\}$. Potom pro $c>\max\{\Re(z_1),...,\Re(z_n)\}$ je

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-\infty\mathrm{i}}^{c+\infty\mathrm{i}} g(z)e^{tz}\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{tz})\,.$$



Důkaz. Nechť C je křivka skládající se z úsečky $C_1=\{c+\mathrm{i}t;t\in[-R,R]\}$ a z polokružnice $C_2=\{c+Re^{\mathrm{i}t};t\in[\pi/2,3\pi/2]\}$. Zvolí se $R>0$ tak, že všechny singulární body $z_1,...,z_n$ leží uvnitř C. $\diamond$

DŮSLEDEK. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C}\setminus\{z_1,...,z_n\}$ a existují $k,p>0$ tak, že $|g(z)|\le k|z|^{-p}$ pro dostatečně velká $|z|$. Potom

$$\mathcal{L}_{-1}(g(z))(t) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{tz})\,.$$

Příklad. Dokažme, že Diracova delta funkce je neutrálním prvkem při násobení definovaným jakožto konvoluce na $(0,\infty)$, tj. že pro každou po částech spojitou funkci f platí

$$f*\delta_0 = f.$$

Řešení. Podle definice konvoluce na $(0,\infty)$ máme

$$(f*\delta_0)(t) = \int_0^t f(\tau)\delta_0(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)\delta_x(t)\,\mathrm{d}\tau = f(t).$$

Za dodatečných předpokladů na funkci f, kdy lze použít Laplaceova transformace, můžeme postupovat také takto

$$\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(\delta_0) = \mathcal{L}(f),$$
$$\mathcal{L}(f*\delta_0) = \mathcal{L}(f),$$
$$f*\delta_0 = f.$$

Příklad. Spočtěte $\mathcal{L}(t\sin t)$ pomocí vzorečku na derivování.

Řešení.

$$\mathcal{L}(t\sin t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}(\sin t) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}\,.$$

Příklad. Spočtěte pomocí reziduí

$$\mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}.$$

Řešení.

$$f(t) = \mathrm{res}(F(s)e^{st}, -1) = \lim_{s\to -1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} e^{st} = te^{-t}\,.$$

Příklad. Spočtěte pomocí reziduí

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s-2)}\right\}.$$

Řešení.

$$f(t) = \mathrm{res}(F(s)e^{st}, -1) + \mathrm{res}(F(s)e^{st}, 2) = \ldots$$

a výsledek je

$$f(t) = \frac{e^2t}{9} - \frac{te^{-t}}{3} - \frac{e^{-t}}{9}\,.$$

Příklad. Spočtěte

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{s^2+1}\right\}.$$

Řešení.

$$\frac{s^2+s+1}{s^2+1} = 1 + \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Výsledek je

$$f(t) = \delta(t) + \cos(t)\,.$$

POUŽITÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE

Laplaceova transformace se používá při řešení rovnic. Tyto rovnice s neznámou y se dají pomocí Laplaceovy rovnice převést na algebraické rovnice s neznámou $\mathcal{L}(y)$.

Po vyřešení $\mathcal{L}(y) = h$ je nutné ještě najít inverzní obraz $\mathcal{L}^{-1}(h)$.

Vzorec a výpočet inverzní Laplaceovy transformace používá teorii komplexních funkcí; bez její znalosti je možné výsledek „uhádnout" z tabulek obrazů $\mathcal{L}(f)$.

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Rovnice $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$ (neznámá je $y(t)$) se zobrazí Laplaceovou transformací na

$$(s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0)) - 3(s\mathcal{L}(y) - y(0)) + 2\mathcal{L}(y) = 1/(s-3)$$

s neznámou $\mathcal{L}(y)$ proměnné s.

Nechť jsou počáteční podmínky rovnice $y(0) = 0, y'(0) = 0$. Potom

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1/2}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1/2}{s-3}\,.$$

Odtud vyplývá $y(t) = e^t/2 - e^{2t} + e^{3t}/2$, což je hledané řešení.

Popíšeme si situaci obecně. Nechť řešíme lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty ve tvaru $Ty = f$, kde $f \in E$ a T je

$$Ty = y(n) + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + p_1y' + p_0y\,.$$

Zobecněným řešením rozumíme y se spojitou takové, že $y^{(n-1)}$ je spojitá a hladkost y odpovídá f. Klidovým řešením rozumíme y vyhovující nulovým počátečním podmínkám

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0\,.$$

Označme

$$P(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + p_{n-2}s^{n-2} + \ldots + p_1 s + p_0 \,.$$

Klidové řešení y rovnice $Ty = f$ vyhovuje po aplikaci Laplaceovy transformace rovnosti $P(s)\mathcal{L}y = \mathcal{L}f = F(s)$.

Řešení y rovnice $Ty = f$ s obecnými počátečními podmínkami ($y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1, \ldots$) vyhovuje po aplikaci Laplaceovy transformace rovnosti $P(s)\mathcal{L}y - P_0(s) = \mathcal{L}f = F(s)$ pro vhodný polynom $P_0(s)$ zahrnující počáteční podmínky.

Tedy

$$\mathcal{L}y = \frac{F(s)}{P(s)} + \frac{P_0(s)}{P(s)} \,.$$

Označme u, v takové funkce, aby

$$\mathcal{L}u = \frac{F(s)}{P(s)} \,, \; \mathcal{L}v = \frac{P_0(s)}{P(s)} \,.$$

Pak $y = u + v$, kde u a v řeší tyto úlohy

$$Tu = f \,, \; u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

$$Tv = 0 \,, \; v(0) = y_0, v'(0) = y_1, \ldots, v^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \,.$$

Uvažujme nyní klidová řešení y, d rovnic $Ty = f$ a $Td = \delta$.

Tedy analogicky $P(s)\mathcal{L}y = \mathcal{L}f$, $P(s)\mathcal{L}d = \mathcal{L}\delta = 1$. Spočteme

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{P(s)}\mathcal{L}f = \mathcal{L}d \cdot \mathcal{L}f = \mathcal{L}(d * f) \,.$$

Tedy $y = d * f$ a je tedy názorně vidět význam Diracovy delta funkce.

Klidové řešení pro pravou stranu Dirac dává v konvoluci klidové řešení pro jakoukoliv pravou stranu.

Má se vyřešit diferenciální rovnice

$$y'' + y = \begin{cases} 0, & \text{pro } 0 \le t < 1 \text{ nebo } t \ge 2; \\ 1, & \text{pro } 1 \le t < 2. \end{cases} \quad , \quad y(0) = 0, y'(0) = 1 \,.$$

Pravá strana rovnice lze psát jako $u_1(t) - u_2(t)$, takže po provedení Laplaceovy transformace:

$$(s^2 + 1)\mathcal{L}(y) = 1 + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \,.$$

Odtud vyplyne $y(t) = \sin t + u_1(t)(1 - \cos(t-1)) - u_2(t)(1 - \cos(t-2))$ a tedy

$$y(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{pro } 0 \le t \le 1; \\ \sin t + 1 - \cos(t-1), & \text{pro } 1 \le t \le 2; \\ \sin t - \cos(t-1) + \cos(t-2), & \text{pro } t \ge 2. \end{cases}$$

BTW, je to spojitá funkce? Raději bych se přesvědčil ...

Rovnice $y'' - 3y' + 2y = f(t)$ dává $\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right)$, což znamená

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(e^{-2t} - e^{-t}) = \mathcal{L}(f * (e^{-2t} - e^{-t}))\,,$$

takže řešení lze psát ve tvaru

$$y(t) = f(t) * (e^{-2t} - e^{-t}) = \int_0^t f(u)(e^{-2(t-u)} - e^{-(t-u)})\,\mathrm{d}u\,.$$

Lineární diferenciální rovnice s nekonstantními koeficienty

Rovnice $y'' + ty' - 2y = 4$ s počátečními podmínkami $y(0) = -1, y'(0) = 0$ se zobrazí Laplaceovou transformací a po úpravě se dostane diferenciální rovnice

$$\mathcal{L}'(y) + \mathcal{L}(y)\left(\frac{3}{s} - s\right) = 1 - \frac{4}{s^2}\,,$$

která má řešení $\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{Ce^{s^2/2}}{s^3}$. Protože $\mathcal{L}(y) \to 0$ pro $s \to \infty$, je $C = 0$. Výsledek je tedy $y = t^2 - 1$.

Soustavy diferenciálních rovnic

Soustava

$$\begin{aligned} y' &= -z\,, \quad y(0) = 1 \\ z' &= y\,, \quad z(0) = 0 \end{aligned}$$

se pomocí Laplaceovy transformace převede na soustavu

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(z) &= 1 \\ \mathcal{L}(y) - s\mathcal{L}(z) &= 0\,, \end{aligned}$$

která má řešení $\mathcal{L}(z) = 1/(s^2+1)$, takže $z = \sin t, y = \cos t$.

Integrální rovnice

Má se vyřešit rovnice $y(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t-u)y(u)\,\mathrm{d}u$. Integrál na pravé straně je roven $\sin * y$, takže $\mathcal{L}(y)(s) = 3!/s^4 + \mathcal{L}(y)(s)/(s^2+1)$.
Snadno se nyní zjistí řešení $y = t^3 + t^5/20$.

Diferenční rovnice

Úkolem je najít „nerekurentní" vyjádření členů posloupnosti $\{a_n\}$ zadané rekurentně vzorcem

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n\,, a_0 = 0\,, a_1 = 1\,.$$

V předchozí rovnosti probíhá proměnná n čísla $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Na chvíli lze uvažovat, že předchozí rovnost platí pro $n \geq 2, n \in \mathbb{R}$. Tedy můžeme hledat funkci

$$y(t) = a_n, \quad n \leq t < n + 1, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

splňující rovnici

$$y(t + 2) - 3y(t + 1) + 2y(t) = 0\,.$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace (pracujeme opatrně) se dostane

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{e^s(1 - e^{-s})}{s(e^{2s} - 3e^s + 2)} = \frac{1 - e^{-s}}{s}\left(\frac{1}{1 - 2e^{-s}} - \frac{1}{1 - e^{-s}}\right) = \mathcal{L}(2^{[n]} - 1)\,.$$

To se musí najít v tabulkách. Hmmm. Je to tam:

$$\mathcal{L}(a^{[t]}) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})}$$

Odtud plyne řešení $y(t) = 2^{[n]} - 1$ a následně $a_n = 2^n - 1$.

Parciální diferenciální rovnice

Pokud má parciální diferenciální rovnice ve funkci $u(x, t)$ dvě proměnné x, t, podle kterých se derivuje, můžeme derivováním podle t odstranit použitím Laplaceovy transformace a dostat obyčejnou diferenciální rovnici.

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = U(x, s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\,,$$
$$\mathcal{L}_{-1}\{U(x, s)\} = u(x, t)\,.$$

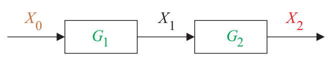
A funguje to, pokud umíme počítat diferenciální rovnice, nebo pokud použijeme Laplace ještě jednou ...

Ve cvičeních spočítáme rovnici vedení tepla $v_t = kv_{xx}$ a vlnovou rovnici $v_{tt} = c^2 v_{xx}$.

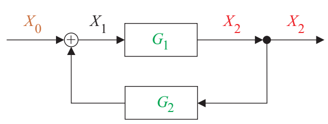
Řízení procesu

Zkoumejme opět pro diferenciální operátor T klidové řešení x rovnice $Tx = f$. Dostaneme $P(s)\mathcal{L}x = \mathcal{L}f$. Označíme $X = \mathcal{L}x$, $F = \mathcal{L}f$ a $G(s) = 1/P(s)$ a dostaneme $X = G(s)F$.

Pokud rovnice popisovala situaci, kdy z daného vstupu X_0 dostaneme výstup X_1 pomocí procesu G_1, máme vztah $X_1 = G_1(s)X_0$. Pokud tento výstup vstupuje do procesu G_2 dostaneme výstup $X_2 = G_2X_1 = G_2G_1X_0$. Tedy napojení procesů odpovídá procesu $G = G_1G_2$.



Pokud se procesy spojí tak, že výstup z G_1 se přidá zpracovaný procesem G_2 ke vstupu do procesu G_1, dostaneme situaci, které se říká zpětná vazba.



Máme $X_1 = X_0 + G_2X_2$, $X_2 = G_1(X_0 + G_2X_2)$, tedy $X_2 = GX_0$, kde

$$G = \frac{1}{1 - G_1G_2}.$$

Pokud G_2 funguje jako zpětná vazba v systému popsaném

$$\frac{G_1}{1 + G_1G_2},$$

tak nastavením hodnoty $G_2 = 1/10$ zaručíme, že případný stonásobný nárůst G_1 nezpůsobí přílišnou škodu.

Pokud G_2 má knoflík na otáčení, můžeme s ním řídit důležité procesy.

Pokud pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ existují $K > 0, p > 0$ tak, že $|a_n| \leq Kp^n/n!$ pro skoro všechna n.

Potom $\mathcal{L}\big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\big)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! s^{-n-1}$.

Vyřešte znovu rovnici $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$, tentokrát obecně, bez daných počátečních podmínek.

Příklad. Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 4y = 0$.

Příklad. Vyřešte rovnici $y'' + y = g(t)$, kde $g(t) = 1$ na $[1, 2)$ a je rovno 0 jinde, s počátečními podmínkami $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Příklad. Vyřešte rovnici $y'' + 2y' + 5y = \delta_1(t)$ s počátečními podmínkami $y(0) = 0, y'(0) = 0$. V tomto případě předpokládáme, že řešení y má spojité derivace do 2.řádu a je exponenciálně omezené.

Příklad. Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} y' + z' + y + z &= 1 \\ y' + z &= e^t \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = -1, z(0) = 2$. [$y = 1 - 2e^t + te^t, z = 2e^t - te^t$]

Příklad. Vyřešte integrální rovnici $y(t) = e^t - \int_0^t (t-u)^2 y(u)\ \mathrm{d}u$.

Příklad. Vyřešte diferenční rovnici $y(t) - y(t - \pi/a) = \sin(at)$ při podmínce $y(t) = 0$ pro $y \leq 0$. [$y(t) = \sin(at)$ na intervalech $(2\pi n/a, 2\pi(n+1)/a)$ a 0 jinde.]

Příklad. Označme $f(t) = [t]$ pro $t \geq 0$, $f(t) = 0$ pro $t < 0$ (jde o kladnou celou část čísla). Spočtěte

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s(e^s - 1)} = \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})}\,.$$

Spočtěte řešení diferenční rovnice

$$y(t+1) - y(t) = 1,\ \ y(y) = 0,\ t < 1\,.$$

Ověřte, že $y(t) = f(t)$.

Příklad. Pokud se řeší diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami, vyřeší se pomocí Laplaceovy transformace s (částečně) obecnými $y(0), y'(0)$ a pak se okrajové podmínky dosadí.
Vyřešte rovnici $y'' + y = \cos t$ pro $y(0) = 1, y(\pi/2) = 1$.

Příklad. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - 4y(t) = 0$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$.
Řešení. Na obě strany zadané rovnice provedeme Laplaceovu transformaci.
Dostaneme

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) - 4\mathcal{L}(y) = 0.$$

Dosazením počátečních podmínek získáme rovnost

$$\mathcal{L}(y) = \frac{-1}{s^2 - 4} = \frac{1}{2-s} \cdot \frac{1}{2+s} = \frac{1/4}{2-s} + \frac{1/4}{2+s}.$$

Inverzní Laplaceovou transformací přejdeme k hledanému řešení diferenciální rovnice

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-2t} - e^{2t}\right).$$

Příklad. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$z'(t) + y(t) = 0,$$

$$z(t) + y'(t) = 0,$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $z(0) = 1$.

Řešení. Laplaceovou transformací převedeme danou soustavu na soustavu

$$s\mathcal{L}(z) - z(0) + \mathcal{L}(y) = 0,$$

$$\mathcal{L}(z) + s\mathcal{L}(y) - y(0) = 0.$$

Po dosazení počátečních podmínek z druhé rovnice vyjádříme

$$\mathcal{L}(z) = -s\mathcal{L}(y).$$

Nyní tento vztah dosadíme do první rovnice a po snadné úpravě máme

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{1-s^2} = \frac{1/2}{1-s} + \frac{1/2}{1+s}.$$

Po zpětné transformaci tedy

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right).$$

Funkci $z(t)$ můžete lehko určit například z druhé rovnice.

Příklad. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte pro $t > 0$ klidová řešení diferenciálních rovnic

$$y'(t) = u(t)$$

$$d'(t) = \delta(t)$$

a ověřte, že

$$y = u * d\,.$$

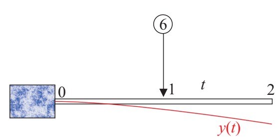
Řešení. Dostaneme $s\mathcal{L}y = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}y = \frac{1}{s^2}$, $y = t$.

Podobně $s\mathcal{L}d = 1$, $\mathcal{L}d = \frac{1}{s}$, $d = 1$.

Ověříme

$$t = y = u * d = \int_0^t 1 \cdot 1 \;\, \mathrm{d}t \;=\; t\,.$$

Příklad. Máme nehmotný nosník, který čouhá ze zdi a je na něm v polovině umístěno závaží 6 kg. Zjistěte, jak se prohýbá.



Řešení. Fyzikální důvody vedou k diferenciální rovnici (závaží znázorňuje Diracova delta funkce v bodě 1, nosník je popsán funkcí y na intervalu $[0, 2]$)

$$y^{(iv)}(t) = 6\delta(t-1)\,,$$

kde $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(2) = y'''(2) = 0$.

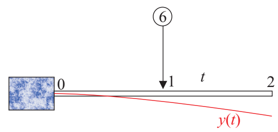
Parametry označíme počáteční podmínky, které Laplaceova transformace požaduje $y''(0) = a$, $y'''(0) = b$ a počítáme ...

Dostaneme

$$y(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{b}{6}t^3 + u(t-1)(t-1)^3\,.$$

Pomocí hodnot v bodě $t = 2$ zjistíme parametry $a = 6$, $b = -6$.

Příklad. Máme nehmotný nosník, je na obou koncích podepřen a je na něm v polovině umístěno závaží 6 kg. Zjistěte, jak se prohýbá.



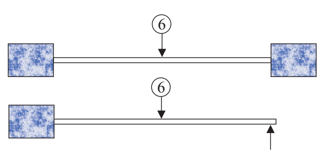
Řešení. Fyzikální důvody vedou k diferenciální rovnici (závaží znázorňuje Diracova delta funkce v bodě 1, nosník je popsán funkcí y na intervalu $[0,2]$)

$$y^{(iv)}(t) = 6\delta(t-1)\,,$$

kde $y(0) = y''(0) = 0$, $y(2) = y''(2) = 0$.
Parametry označíme počáteční podmínky, které Laplaceova transformace požaduje $y'(0) = a$, $y'''(0) = b$ a počítáme …
Dostaneme

$$y(t) = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^3 + u(t-1)(t-1)^3\,.$$

A zkuste si nosník mezi dvěma zdmi nebo nosník na jedné straně ve zdi a na druhé podepřený …



Příklad. Řešte diferenční rovnice

$$a_{n+1} + a_n = 1,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1\,.$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1\,.$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1\,.$$

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 4n + 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1\,.$$

Příklad. Řešte diferenční rovnice

$$y(t) + y(t-1) = e^t,\ y(t) = 0\ t \le 0\,.$$

$$y(t) + y(t-1) = t,\ y(t) = 0\ t \le 0\,.$$

Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-3t},\ y(t) = 0,\ t \le 0,\ y(0) = 4\,.$$

Řešení. Laplaceova transformace dává

$$sY(s) - y(0) + 2Y = \frac{1}{s+3}\,.$$

Odtud

$$Y(s) = \frac{5}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

a

$$y(t) = 5e^{-2t} - e^{-3t}\,.$$

Příklad. Spočtěte integrální rovnici

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau\,.$$

Řešení. Po Laplaceově transformaci máme

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s)\frac{1}{s^2+1}\,.$$

Tedy

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\,.$$

Řešení je

$$y(t) = t + \frac{1}{6}t^3\,.$$

Příklad. Řešte diferenciální rovnice

$$y'(t) + y(t) = f(t)$$

$$y''(t) - y(t) = f(t)$$

$$y''(t) = f(t)$$

s pomocí konvoluce.

Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y''(t) + y(t) = \delta(t)\,.$$

Řešení. Dostaneme

$$y(t) = u(t)\sin(t)$$

a je to jako když do klidného kyvadla ťukneme.

Příklad. Řešte rovnici

$$\frac{\mathrm{d}v(x,t)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v(x,t)}{\mathrm{d}t} = t$$

s okrajovými podmínkami $v(x,0) = 0$, $v(0,t) = t^2$.

Řešení. Po Laplaceově transformaci dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}V(x,s)}{\mathrm{d}x} + V(x,s) = \frac{1}{s^2}$$

s okrajovou podmínkou $V(0,s) = 2/s^3$.

Vyřešíme rovnici pro V a dostaneme

$$V(x,s) = c(s)e^{-x} + \frac{1}{s^2}\,.$$

Pro $x = 0$ použijeme počáteční podmínku ke spočtení neznámé funkce c:

$$V(0,s) = \frac{2}{s^3} = c(s) + \frac{1}{s^2}\,,$$

odkud dostaneme

$$c(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}$$

a po dosazení

$$V(x,s) = \left(\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}\right) e^{-x} + \frac{1}{s^2}\,.$$

A tedy

$$v(x,t) = t^2 e^{-x} - te^{-x} + t\,.$$

Příklad. Řešte rovnici vedení tepla

$$\frac{\mathrm{d}v(x,t)}{\mathrm{d}t} = k\frac{\mathrm{d}^2 v(x,t)}{\mathrm{d}x^2}$$

s okrajovými podmínkami $v(0,t) = v(\pi,t) = 1$, $v(x,0) = 1 + \sin(x)$.

Řešení. Po Laplaceově transformaci dostaneme rovnici

$$sV(x,s) - v(x,0) = k\frac{\mathrm{d}^2 V(x,s)}{\mathrm{d}x^2}$$

s okrajovou podmínkou $V(0,s) = V(\pi,s) = 1/s$.

Vyřešíme rovnici pro V a dostaneme

$$V(x,s) = \frac{1}{s} + \frac{\sin(x)}{s+k}\,.$$

A tedy

$$v(x,t) = 1 + e^{-kt}\sin(x)\,.$$

Příklad. Řešte vlnovou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(x,t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 v(x,t)}{\mathrm{d}x^2}$$

pro $x > 0$ s okrajovými podmínkami $v(0,t) = f(t)$, $v(x,0) = v_t(x,0) = 0$, a pro $t > 0$ vyhovující fyzikální podmínce

$$\lim_{x\infty} v(x,t) = 0\,.$$

Řešení. Po Laplaceově transformaci dostaneme rovnici

$$s^2 V(x,s) = \frac{\mathrm{d}^2 V(x,s)}{\mathrm{d}x^2}$$

s okrajovou podmínkou $V(0,s) = F(s)$.

Vyřešíme rovnici pro V a dostaneme

$$V(x,s) = a(s)e^{-sx} + b(s)e^{sx}\,.$$

Fyzikální důvody říkají, že

$$\lim_{x\to\infty} V(x,s) = 0$$

a tedy $b(s) = 0$.

A tedy

$$V(x,s) = F(s)e^{-sx}$$

a

$$v(x,t) = u(t-x)f(t-x)\,.$$