LAPLACEOVA TRANSFORMACE

$$2 \mapsto \log 2 \mapsto (\log 2)/2 \mapsto \exp((\log 2)/2) = \sqrt{2}\,,$$

přičemž se pro hledání logaritmů a exponenciel používaly tištěné tabulky.

V této kapitole bude vyložena dosti odlišná teorie od těch předešlých.

Už jste se setkali se zobrazeními, která přiřazovala funkcím jiné funkce, např. funkci její derivaci nebo primitivní funkci, pokud existovaly.

Takovéto zobrazení se často nazývají *transformace*, protože transformují (mění) původní funkce na jiné, často vhodnější pro dané použití.

Nyní bude probrán jeden důležitý případ tzv. *integrálních transformací*.

Obecně se integrální transformace funkce f definuje jako

$$T(f)(s) = \int_a^b f(t)k(s,t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $k(s,t)$ je tzv. jádro transformace, (a,b) je vhodný určený interval. Tyto transformace jsou vhodné pro řešení diferenciálních, integrálních, integro–diferenciálních a dalších podobných rovnic.

Je zřejmé, že T je lineární zobrazení, tj. $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$ pro libovolná reálná (popř. komplexní) čísla α, β.

Nyní bude probrána integrální transformace s jádrem e^{-st} na $(0,+\infty)$, později (v kapitole o Fourierově transformaci) integrální transformace s jádrem e^{-ist} na $(-\infty,+\infty)$ – tzv. Fourierova transformace.

Zatím se však bude jednat jen o **reálné funkce jedné reálné proměnné**.

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(0,+\infty)$. Pak se definuje její Laplaceova transformace $\mathcal{L}(f)$ následovně

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Obecně nemusí uvedený integrál existovat pro žádná s nebo pro velmi málo těchto bodů.

Dále budou uvedeny podmínky na funkci f, které zaručí, že definiční obor funkce $\mathcal{L}(f)$ bude vhodný interval.

Následující tvrzení uvádí velkou třídu funkcí, pro které je Laplaceova transformace definována na neomezených intervalech.

VĚTA. Nechť funkce f má na $(0,+\infty)$ následující vlastnosti:

1. existuje vlastní $\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)$ a v každém intervalu $(0,n)$ je f spojitá až na konečně mnoho bodů, ve kterých jsou skoky;
2. existují kladné konstanty K, a tak, že $|f(t)| \le Ke^{at}$ na nějakém intervalu $(p,+\infty)$.

Potom je $\mathcal{L}(f)$ definována na $(a,+\infty)$ a $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.

Pro jednoduchost se bude funkce f mající první vlastnost nazývat v této kapitole *po částech spojitá* a f mající druhou vlastnost *exponenciálně omezená*.

Pro použití Laplaceovy transformace je důležitá následující věta, která říká, že na spojitých funkcích je tato transformace prostá. Důkaz není jednoduchý a nebude tu uveden.

VĚTA. (Lerch) Jsou-li f, g spojité funkce na $[0, +\infty)$ a $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, pak $f = g$.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

VLASTNOSTI LAPLACEOVY TRANSFORMACE

V úvodu bylo již řečeno, že každá integrální transformace, tedy i Laplaceova, je lineární.

Z příkladů je zřejmé, že Laplaceova transformace nezachovává násobení (např. Laplaceův obraz konstantní funkce s hodnotou 1 je $1/s$, ale $1 \cdot 1 = 1, (1/s) \cdot (1/s) \neq 1/s$).

Nicméně, na násobení se převádí jiná binární operace, tzv. konvoluce – o tom později.

V následujících vzorcích lze předpokládat, že uvedené funkce jsou po částech spojité a exponenciálně omezené.

Posunutí

Posunutí funkce f doprava o $a > 0$ je funkce $f(t - a)$. Pokud funkce f je definována pro $t > 0$, je posunutá funkce definována pro $t > a$.

Protože pro Laplaceovu transformaci musí být funkce definována pro všechna kladná t, dodefinovává se funkce na intervalu $(0, a]$ hodnotou 0. Přitom se výhodně používá následující skoková funkce.

Pro skokovou funkci

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < a; \\ 1, & \text{pro } t > a \end{cases}$$

(v bodě $t = a$ se může dodefinovat jakkoli, většinou hodnotou 0) se jednoduše spočítá její Laplaceova transformace:

$$\mathcal{L}(u_a)(s) = \int_a^\infty e^{-st}\, \mathrm{d}t = \frac{e^{-as}}{s}\,.$$

Funkce g definovaná na $(a, +\infty)$ (pro $a \geq 0$) a dodefinovaná hodnotou 0 na $[0, a]$ se bude jednoduše značit $u_a g$. Takže

$$u_a(t)f(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \leq a; \\ f(t-a), & \text{pro } t > a. \end{cases}$$

Laplaceova transformace posunuté funkce a posunutá Laplaceova transformace (oboje posunutí o $a > 0$) se spočítá snadno:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_a(t)f(t-a))(s) &= e^{-as}\mathcal{L}(f(t))(s) \\ \mathcal{L}(f(t))(s-a) &= \mathcal{L}(e^{at}f(t))(s)\,. \end{aligned}$$

Perioda

Pokud zkoumáme periodickou funkci $f(t + p) = f(t)$, $p > 0$, označíme jeden kousek, který se dále opakuje

$$f_0(t) = u(t)f(t) - u(t-p)f(t)\,.$$

Pak

$$\mathcal{L}f_0 = \mathcal{L}f - e^{-ps}\mathcal{L}f\,,$$

odkud vidíme

$$\mathcal{L}f = \frac{\mathcal{L}f_0}{1 - e^{-ps}}\,,\ \mathcal{L}f_0 = \int_0^p e^{-st}f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Zvětšení

Zvětšením (nebo zmenšením) funkce f se míní funkce $f(at)$ pro $a > 0$.

Následující výpočty jsou velmi jednoduché (druhá rovnost plyne z první):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(at))(s) &= \frac{1}{a}\mathcal{L}(f(t)\Big(\frac{s}{a}\Big)\\ \mathcal{L}(f(t))\Big(\frac{s}{a}\Big) &= a\mathcal{L}(f(at))(s)\,.\end{aligned}$$

Derivace

Vztah derivace a Laplaceovy transformace je podstatný pro použití na řešení diferenciálních rovnic, protože Laplaceova transformace převádí derivaci na násobení s s původním Laplaceovým obrazem.

Rovnosti se dokáží snadno pomocí integrace po částech.

Pro první vzorec se musí předpokládat, že funkce f je spojitá i exponenciálně omezená, a f' po částech spojitá.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))(s) &= s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}(f(t))(s) &= \mathcal{L}(-tf(t))(s)\,.\end{aligned}$$

Indukcí se dokáží rovnosti pro derivace vyšších řádů:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) &= s^n\mathcal{L}(f(t))(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)\\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathcal{L}(f(t))(s) &= \mathcal{L}((-1)^n t^n f(t))(s)\,.\end{aligned}$$

Integrace

Vzorce na integraci Laplaceovy transformace se získají z předchozích vzorců pro derivace:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\int_0^t f(t)\ \mathrm{d}t)(s) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s)\\ \int_s^\infty \mathcal{L}(f(t))(\sigma)\ \mathrm{d}\sigma &= \mathcal{L}\Big(\frac{f(t)}{t}\Big)(s)\,.\end{aligned}$$

Konvoluce

Jak již bylo zmíněno, Laplaceova transformace nepřevádí násobení funkcí na násobení obrazů.

Existuje však důležitá jiná binární operace na funkcích, která se Laplaceovou transformací převádí na násobení.

DEFINICE. Konvoluce na $(0,\infty)$ dvou funkcí f, g je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau\,.$$

Zřejmě $(f * g)$ existuje, pokud jsou obě funkce f, g po částech spojité na $(0,\infty)$.

Vlastnosti konvoluce jsou probrány v *Otázkách*.

VĚTA. Pro po částech spojité a exponenciálně omezené funkce f, g na $(0,\infty)$ platí $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$.

INVERZNÍ LAPLACEOVA TRANSFORMACE

V definici Laplaceovy transformace možné chápat proměnnou t jako komplexní číslo a $\mathcal{L}(f)$ je tedy komplexní funkce komplexní proměnné.

Pokud je f exponenciálně omezená, tj. $|f(t)| \leq ke^{bt}$ pro nějaká reálná čísla k, b, lze ukázat, že funkce $\mathcal{L}(f)(z)$ je holomorfní pro $\Re(z) > b$.

Použijeme-li větu o inverzní Fourierově transformaci, dostane následující tvrzení (podrobnosti v kapitole o Fourierově transformaci).

VĚTA. Nechť f je po částech hladká komplexní funkce reálné proměnné, která je rovna 0 pro $t < 0$ a $|f(t)| \leq ke^{bt}$ pro nějaká reálná čísla k, b a pro $t > 0$. Potom $\mathcal{L}(f)(z)$ je holomorfní funkce na polorovině $\Re(z) > b$ a pro libovolné $c > b$ je

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\infty \mathrm{i}}^{c+\infty \mathrm{i}} \mathcal{L}(f)(u) e^{tz} \, \mathrm{d}z \, .$$

Uvedená integrace je po přímce kolmé k reálné v bodě c.

Nyní je možné počítat inverzní Laplaceovu transformaci pomocí uvedeného vzorce. Nicméně, přímý výpočet tohoto integrálu může být komplikovaný.

V některých případech je možné s výhodou použít reziduovou větu. Integrace po uvedené přímce se spočte limitou integrálů přes zvětšující se intervaly, které se doplní (většinou polokružnicí) na uzavřenou křivku.

Následující věta popisuje velkou třídu funkcí, pro které je možné takto inverzní Laplaceovu transformaci spočítat.

VĚTA. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ a existují $k, p > 0$ tak, že $|g(z)| \leq k|z|^{-p}$ pro $x \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$. Potom pro $c > \max\{\Re(z_1), ..., \Re(z_n)\}$ je

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\infty \mathrm{i}}^{c+\infty \mathrm{i}} g(z) e^{tz} \, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{tz}) \, .$$

Přeformulováním předchozí věty se dostává tvrzení o výpočtu inverzní Laplaceovy transformace:

DŮSLEDEK. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ a existují $k, p > 0$ tak, že $|g(z)| \leq k|z|^{-p}$ pro dostatečně velká $|z|$. Potom

$$\mathcal{L}_{-1}(g(z))(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{tz}) \, .$$

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

Cvičení 2

POUŽITÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE

Laplaceova transformace se používá při řešení diferenciálních rovnic (obyčejných i parciálních) a integrálních rovnic nebo jejich kombinací.

Některé tyto rovnice s neznámou y se dají pomocí Laplaceovy rovnice převést na algebraické rovnice s neznámou $\mathcal{L}(y)$.

Po vyřešení $\mathcal{L}(y) = h$ je nutné ještě najít inverzní obraz $\mathcal{L}^{-1}(h)$.

Vzorec a výpočet inverzní Laplaceovy transformace používá teorii komplexních funkcí; bez její znalosti je možné výsledek „uhádnout" z tabulek obrazů $\mathcal{L}(f)$.

Použití bude vyloženo na příkladech.

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Rovnice $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$ (neznámá je $y(t)$) se zobrazí Laplaceovou transformací na

$$(s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0)) - 3(s\mathcal{L}(y) - y(0)) + 2\mathcal{L}(y) = 1/(s-3)$$

s neznámou $\mathcal{L}(y)$ proměnné s.

Nechť jsou počáteční podmínky rovnice $y(0) = 0, y'(0) = 0$. Potom

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1/2}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1/2}{s-3}\,.$$

Odtud vyplývá $y(t) = e^t/2 - e^{2t} + e^{3t}/2$, což je hledané řešení.

Popíšeme si situaci obecně. Nechť řešíme lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty ve tvaru $Ty = f$, kde $f \in E$ a T je

$$Ty = y(n) + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y\,.$$

Zobecněným řešením rozumíme y se spojitou takové, že $y^{(n-1)}$ je spojitá a hladkost y odpovídá f. Klidovým řešením rozumíme y vyhovující nulovým počátečním podmínkám

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0\,.$$

Označme

$$P(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + p_{n-2}s^{n-2} + \ldots + p_1 s + p_0\,.$$

Klidové řešení y rovnice $Ty = f$ vyhovuje po aplikaci Laplaceovy transformace rovnosti $P(s)\mathcal{L}y = \mathcal{L}f = F(s)$.

Řešení y rovnice $Ty = f$ s obecnými počátečními podmínkami ($y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, $\ldots$) vyhovuje po aplikaci Laplaceovy transformace rovnosti $P(s)\mathcal{L}y - P_0(s) = \mathcal{L}f = F(s)$ pro vhodný polynom $P_0(s)$ zahrnující počáteční podmínky.

Tedy

$$\mathcal{L}y = \frac{F(s)}{P(s)} + \frac{P_0(s)}{P(s)}\,.$$

Označme u, v takové funkce, aby

$$\mathcal{L}u = \frac{F(s)}{P(s)}\,,\ \mathcal{L}v = \frac{P_0(s)}{P(s)}\,.$$

Pak $y = u + v$, kde u a v řeší tyto úlohy

$$Tu = f\,,\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

$$Tv = 0\,,\ v(0) = y_0, v'(0) = y_1, \ldots, v^{(n-1)}(0) = y_{n-1}\,.$$

Uvažujme nyní klidová řešení y, d rovnic $Ty = f$ a $Td = \delta$.

Tedy analogicky $P(s)\mathcal{L}y = \mathcal{L}f$, $P(s)\mathcal{L}d = \mathcal{L}\delta = 1$. Spočteme

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{P(s)}\mathcal{L}f = \mathcal{L}d \cdot \mathcal{L}f = \mathcal{L}(d * f)\,.$$

Tedy $y = d * f$ a je tedy názorně vidět význam Diracovy delta funkce.

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je možné samozřejmě řešit klasicky, jak bylo ukázáno v příslušné kapitole.

Nicméně, použití Laplaceovy transformace je v některých případech jednodušší a výsledky dává ve vhodnějším tvaru.

To hlavně v případech, kdy pravá strana diferenciální rovnice není spojitá, nebo je to složitější funkce.

Má se vyřešit diferenciální rovnice

$$y'' + y = \begin{cases} 0, & \text{pro } 0 \le t < 1 \text{ nebo } t \ge 2; \\ 1, & \text{pro } 1 \le t < 2. \end{cases} \quad , \quad y(0) = 0, y'(0) = 1\,.$$

Pravá strana rovnice lze psát jako $u_1(t) - u_2(t)$, takže po provedení Laplaceovy transformace:

$$(s^2+1)\mathcal{L}(y) = 1 + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\,.$$

Odtud vyplyne $y(t) = \sin t + u_1(t)(1-\cos(t-1)) - u_2(t)(1-\cos(t-2))$ a tedy

$$y(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{pro } 0 \le t \le 1; \\ \sin t + 1 - \cos(t-1), & \text{pro } 1 \le t \le 2; \\ \sin t - \cos(t-1) + \cos(t-2), & \text{pro } t \ge 2. \end{cases}$$

Rovnice $y'' - 3y' + 2y = f(t)$ dává $\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right)$, což znamená

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(e^{-2t} - e^{-t}) = \mathcal{L}(f * (e^{-2t} - e^{-t}))\,,$$

takže řešení lze psát ve tvaru

$$y(t) = f(t) * (e^{-2t} - e^{-t}) = \int_0^t f(u)(e^{-2(t-u)} - e^{-(t-u)})\, \mathrm{d}u\,.$$

Lineární diferenciální rovnice s nekonstantními koeficienty

Následující jednoduchý příklad dává návod k řešení některých lineárních diferenciálních rovnic s nekonstantními koeficienty.

Rovnice $y'' + ty' - 2y = 4$ s počátečními podmínkami $y(0) = -1, y'(0) = 0$ se zobrazí Laplaceovou transformací a po úpravě se dostane diferenciální rovnice

$$\mathcal{L}'(y) + \mathcal{L}(y)\left(\frac{3}{s} - s\right) = 1 - \frac{4}{s^2}\,,$$

která má řešení $\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{Ce^{s^2/2}}{s^3}$. Protože $\mathcal{L}(y) \to 0$ pro $s \to \infty$, je $C = 0$. Výsledek je tedy $y = t^2 - 1$.

Soustavy diferenciálních rovnic

Postup je stejný jako v předchozí části. Soustava

$$\begin{aligned} y' &= -z\,, \quad y(0) = 1 \\ z' &= y\,, \quad z(0) = 0 \end{aligned}$$

se pomocí Laplaceovy transformace převede na soustavu

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(z) &= 1 \\ \mathcal{L}(y) - s\mathcal{L}(z) &= 0\,, \end{aligned}$$

která má řešení $\mathcal{L}(z) = 1/(s^2+1)$, takže $z = \sin t, y = \cos t$.

Integrální rovnice

Má se vyřešit rovnice $y(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t-u)y(u)\,\mathrm{d}u$. Integrál na pravé straně je roven $\sin * y$, takže $\mathcal{L}(y)(s) = 3!/s^4 + \mathcal{L}(y)(s)/(s^2+1)$.

Snadno se nyní zjistí řešení $y = t^3 + t^5/20$.

Diferenční rovnice

Úkolem je najít „nerekurentní" vyjádření členů posloupnosti $\{a_n\}$ zadané rekurentně vzorcem

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n\,, a_0 = 0\,, a_1 = 1\,.$$

V předchozí rovnosti probíhá proměnná n čísla $n = 0, 1, 2, ...$

Na chvíli lze uvažovat, že předchozí rovnost platí pro $n \geq 2, n \in \mathbb{R}$. Tedy můžeme hledat funkci

$$y(t) = a_n,\;\; n \leq t < n+1,\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

splňující rovnici

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0\,.$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace (pracujeme opatrně) se dostane

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^{2s} - 3e^s + 2)} = \frac{1-e^{-s}}{s}\Big(\frac{1}{1-2e^{-s}} - \frac{1}{1-e^{-s}}\Big) = \mathcal{L}(2^{[n]} - 1)\,.$$

$$\mathcal{L}(a^{[t]}) = \frac{1-e^{-s}}{s(1-ae^{-s})}$$

Odtud plyne řešení $y(t) = 2^{[n]} - 1$ a následně $a_n = 2^n - 1$.

Parciální diferenciální rovnice

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\;\mathrm{d}t\,,$$
$$\mathcal{L}_{-1}\{U(x,s)\} = u(x,t)\,.$$

Řízení procesu

Zkoumejme opět pro diferenciální operátor T klidové řešení x rovnice $Tx = f$. Dostaneme $P(s)\mathcal{L}x = \mathcal{L}f$. Označíme $X = \mathcal{L}x$, $F = \mathcal{L}f$ a $G(s) = 1/P(s)$ a dostaneme $X = G(s)F$.

Pokud rovnice popisovala situaci, kdy z daného vstupu X_0 dostaneme výstup X_1 pomocí procesu G_1, máme vztah $X_1 = G_1(s)X_0$. Pokud tento výstup vstupuje do procesu G_2 dostaneme výstup $X_2 = G_2X_1 = G_2G_1X_0$. Tedy napojení procesů odpovídá procesu $G = G_1G_2$.

Pokud se procesy spojí tak, že výstup z G_1 se přidá zpracovaný procesem G_2 ke vstupu do procesu G_1, dostaneme situaci, které se říká zpětná vazba.

Máme $X_1 = X_0 + G_2X_2$, $X_2 = G_1(X_0 + G_2X_2)$, tedy $X_2 = GX_0$, kde

$$G = \frac{1}{1 - G_1G_2}\,.$$

Pokud G_2 funguje jako zpětná vazba v systému popsaném

$$\frac{G_1}{1 + G_1G_2}\,,$$

tak nastavením hodnoty $G_2 = 1/10$ zaručíme, že případný stonásobný nárůst G_1 nezpůsobí přílišnou škodu.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3

STANDARDY z kapitoly

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Obecně se integrální transformace funkce f definuje jako

$$T(f)(s) = \int_a^b f(t)k(s,t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $k(s,t)$ je tzv. jádro transformace, (a,b) je vhodný určený interval.

Bude probrána integrální transformace s jádrem e^{-st} na $(0,+\infty)$, později (v kapitole o Fourierově transformaci) integrální transformace s jádrem e^{-ist} na $(-\infty,+\infty)$ – tzv. Fourierova transformace.

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na $(0,+\infty)$. Pak se definuje její Laplaceova transformace $\mathcal{L}(f)$ následovně

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

VĚTA. Nechť funkce f má na $(0,+\infty)$ následující vlastnosti:

1. existuje vlastní $\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)$ a v každém intervalu $(0,n)$ je f spojitá až na konečně mnoho bodů, ve kterých jsou skoky;
2. existují kladné konstanty K, a tak, že $|f(t)| \le Ke^{at}$ na nějakém intervalu $(p,+\infty)$.

Potom je $\mathcal{L}(f)$ definována na $(a,+\infty)$ a $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.

Pro jednoduchost se bude funkce f mající první vlastnost nazývat v této kapitole *po částech spojitá* a f mající druhou vlastnost *exponenciálně omezená*.

VĚTA. (Lerch) Jsou-li f, g spojité funkce na $[0,+\infty)$ a $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, pak $f = g$.

Příklad. Vypočtěte $\mathcal{L}(f)$ pro následující funkce f:

$$f = \text{konstanta } c\,, \quad f(t) = t\,, \quad f(t) = e^{at}\,, \quad f(t) = \sin(at)\,, \quad f(t) = \cos(at)\,.$$

Příklad. Vypočtěte $\mathcal{L}(f)$ pro funkci $f(t) = [t]$ na $[0,\infty)$, kde $[t]$ znamená celou část čísla t.

Příklad. Vezměte funkci (pro $a > 0$)

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{pro } 0 \le t \le a; \\ 0, & \text{pro } t > a. \end{cases}$$

Spočtěte Laplaceovu transformaci této funkce.

Limita $\lim\limits_{a\to 0_+} f_a$ je zobrazení, které má hodnotu nekonečnou v 0 a 0 jinde. Nazývá se *Diracova delta funkce* a značí se $\delta_0(t)$.

V tomto případě lze přehodit limitu a integrál definující Laplaceovu transformaci funkcí f_a.

Výsledkem je $\mathcal{L}(\delta_0(t)) = 1$.

VLASTNOSTI LAPLACEOVY TRANSFORMACE

Posunutí

Pro skokovou funkci

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < a; \\ 1, & \text{pro } t > a \end{cases}$$

(v bodě $t = a$ se může dodefinovat jakkoli, většinou hodnotou 0) se jednoduše spočítá její Laplaceova transformace:

$$\mathcal{L}(u_a)(s) = \int_a^\infty e^{-st}\, \mathrm{d}t = \frac{e^{-as}}{s}\,.$$

Funkce g definovaná na $(a, +\infty)$ (pro $a \geq 0$) a dodefinovaná hodnotou 0 na $[0, a]$ se bude jednoduše značit $u_a g$. Takže

$$u_a(t) f(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \leq a; \\ f(t-a), & \text{pro } t > a. \end{cases}$$

Perioda

Pokud zkoumáme periodickou funkci $f(t+p) = f(t)$, $p > 0$, označíme jeden kousek, který se dále opakuje

$$f_0(t) = u(t)f(t) - u(t-p)f(t)\,.$$

Pak

$$\mathcal{L}f_0 = \mathcal{L}f - e^{-ps}\mathcal{L}f\,,$$

odkud vidíme

$$\mathcal{L}f = \frac{\mathcal{L}f_0}{1 - e^{-ps}}\,,\ \mathcal{L}f_0 = \int_0^p e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Derivace

Pokud je funkce f je spojitá i exponenciálně omezená, a f' po částech spojitá, dostaneme

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)\,.$$

Konvoluce

Existuje však důležitá jiná binární operace na funkcích, která se Laplaceovou transformací převádí na násobení.

DEFINICE. Konvoluce na $(0, \infty)$ dvou funkcí f, g je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Zřejmě $(f * g)$ existuje, pokud jsou obě funkce f, g po částech spojité na $(0, \infty)$.

VĚTA. Pro po částech spojité a exponenciálně omezené funkce f, g na $(0, \infty)$ platí $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$.

INVERZNÍ LAPLACEOVA TRANSFORMACE

VĚTA. Nechť f je po částech hladká komplexní funkce reálné proměnné, která je rovna 0 pro $t < 0$ a $|f(t)| \leq ke^{bt}$ pro nějaká reálná čísla k, b a pro $t > 0$. Potom $\mathcal{L}(f)(z)$ je holomorfní funkce na polorovině $\Re(z) > b$ a pro libovolné $c > b$ je

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\infty\mathrm{i}}^{c+\infty\mathrm{i}} \mathcal{L}(f)(u) e^{tz}\, \mathrm{d}z\,.$$

VĚTA. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ a existují $k, p > 0$ tak, že $|g(z)| \leq k|z|^{-p}$ pro $x \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$. Potom pro $c > \max\{\Re(z_1), ..., \Re(z_n)\}$ je

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\infty \mathrm{i}}^{c+\infty \mathrm{i}} g(z) e^{tz} \, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{tz}) \, .$$

DŮSLEDEK. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ a existují $k, p > 0$ tak, že $|g(z)| \leq k|z|^{-p}$ pro dostatečně velká $|z|$. Potom

$$\mathcal{L}_{-1}(g(z))(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{tz}) \, .$$

Příklad. Dokažme, že Diracova delta funkce je neutrálním prvkem při násobení definovaným jakožto konvoluce na $(0, \infty)$, tj. že pro každou po částech spojitou funkci f platí

$$f * \delta_0 = f.$$

Řešení. Podle definice konvoluce na $(0, \infty)$ máme

$$(f * \delta_0)(t) = \int_0^t f(\tau)\delta_0(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)\delta_x(t) \, \mathrm{d}\tau = f(t).$$

Za dodatečných předpokladů na funkci f, kdy lze použít Laplaceova transformace, můžeme postupovat také takto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(\delta_0) &= \mathcal{L}(f), \\ \mathcal{L}(f * \delta_0) &= \mathcal{L}(f), \\ f * \delta_0 &= f. \end{aligned}$$

Příklad. Spočtěte $\mathcal{L}(t \sin t)$ pomocí vzorečku na derivování.

Řešení.

$$\mathcal{L}(t \sin t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}(\sin t) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \, .$$

Příklad. Spočtěte pomocí reziduí

$$\mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} \, .$$

Řešení.

$$f(t) = \mathrm{res}(F(s)e^{st}, -1) = \lim_{s \to -1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} e^{st} = te^{-t} \, .$$

Příklad. Spočtěte pomocí reziduí

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s-2)}\right\} \, .$$

Řešení.

$$f(t) = \mathrm{res}(F(s)e^{st}, -1) + \mathrm{res}(F(s)e^{st}, 2) = \ldots$$

a výsledek je

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^2 t}{9} - \frac{te^{-t}}{3} - \frac{e^{-t}}{9} \, .$$

Příklad. Spočtěte

$$f(t) = \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{s^2+1}\right\} \, .$$

Řešení.

$$\frac{s^2+s+1}{s^2+1} = 1 + \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Výsledek je

$$f(t) = \delta(t) + \cos(t)\,.$$

POUŽITÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE

Laplaceova transformace se používá při řešení rovnic. Tyto rovnice s neznámou y se dají pomocí Laplaceovy rovnice převést na algebraické rovnice s neznámou $\mathcal{L}(y)$.

Po vyřešení $\mathcal{L}(y) = h$ je nutné ještě najít inverzní obraz $\mathcal{L}^{-1}(h)$.

Vzorec a výpočet inverzní Laplaceovy transformace používá teorii komplexních funkcí; bez její znalosti je možné výsledek „uhádnout" z tabulek obrazů $\mathcal{L}(f)$.

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Rovnice $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$ (neznámá je $y(t)$) se zobrazí Laplaceovou transformací na

$$(s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0)) - 3(s\mathcal{L}(y) - y(0)) + 2\mathcal{L}(y) = 1/(s-3)$$

s neznámou $\mathcal{L}(y)$ proměnné s.

Nechť jsou počáteční podmínky rovnice $y(0) = 0, y'(0) = 0$. Potom

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1/2}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1/2}{s-3}\,.$$

Odtud vyplývá $y(t) = e^t/2 - e^{2t} + e^{3t}/2$, což je hledané řešení.

Popíšeme si situaci obecně. Nechť řešíme lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty ve tvaru $Ty = f$, kde $f \in E$ a T je

$$Ty = y(n) + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y\,.$$

Zobecněným řešením rozumíme y se spojitou takové, že $y^{(n-1)}$ je spojitá a hladkost y odpovídá f. Klidovým řešením rozumíme y vyhovující nulovým počátečním podmínkám

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0\,.$$

Označme

$$P(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + p_{n-2}s^{n-2} + \ldots + p_1 s + p_0\,.$$

Klidové řešení y rovnice $Ty = f$ vyhovuje po aplikaci Laplaceovy transformace rovnosti $P(s)\mathcal{L}y = \mathcal{L}f = F(s)$.

Řešení y rovnice $Ty = f$ s obecnými počátečními podmínkami ($y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1, \ldots$) vyhovuje po aplikaci Laplaceovy transformace rovnosti $P(s)\mathcal{L}y - P_0(s) = \mathcal{L}f = F(s)$ pro vhodný polynom $P_0(s)$ zahrnující počáteční podmínky.

Tedy

$$\mathcal{L}y = \frac{F(s)}{P(s)} + \frac{P_0(s)}{P(s)}\,.$$

Označme u, v takové funkce, aby

$$\mathcal{L}u = \frac{F(s)}{P(s)}\,,\ \mathcal{L}v = \frac{P_0(s)}{P(s)}\,.$$

Pak $y = u + v$, kde u a v řeší tyto úlohy

$$Tu = f\,,\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

$$Tv = 0\,,\ v(0) = y_0, v'(0) = y_1, \dots, v^{(n-1)}(0) = y_{n-1}\,.$$

Uvažujme nyní klidová řešení y, d rovnic $Ty = f$ a $Td = \delta$.

Tedy analogicky $P(s)\mathcal{L}y = \mathcal{L}f$, $P(s)\mathcal{L}d = \mathcal{L}\delta = 1$. Spočteme

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{P(s)}\mathcal{L}f = \mathcal{L}d \cdot \mathcal{L}f = \mathcal{L}(d * f)\,.$$

Tedy $y = d * f$ a je tedy názorně vidět význam Diracovy delta funkce.

Má se vyřešit diferenciální rovnice

$$y'' + y = \begin{cases} 0, & \text{pro } 0 \le t < 1 \text{ nebo } t \ge 2; \\ 1, & \text{pro } 1 \le t < 2. \end{cases} \quad, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1\,.$$

Pravá strana rovnice lze psát jako $u_1(t) - u_2(t)$, takže po provedení Laplaceovy transformace:

$$(s^2 + 1)\mathcal{L}(y) = 1 + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\,.$$

Odtud vyplyne $y(t) = \sin t + u_1(t)(1 - \cos(t-1)) - u_2(t)(1 - \cos(t-2))$ a tedy

$$y(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{pro } 0 \le t \le 1; \\ \sin t + 1 - \cos(t-1), & \text{pro } 1 \le t \le 2; \\ \sin t - \cos(t-1) + \cos(t-2), & \text{pro } t \ge 2. \end{cases}$$

Rovnice $y'' - 3y' + 2y = f(t)$ dává $\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right)$, což znamená

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(e^{-2t} - e^{-t}) = \mathcal{L}(f * (e^{-2t} - e^{-t}))\,,$$

takže řešení lze psát ve tvaru

$$y(t) = f(t) * (e^{-2t} - e^{-t}) = \int_0^t f(u)(e^{-2(t-u)} - e^{-(t-u)})\ \mathrm{d}u\,.$$

Lineární diferenciální rovnice s nekonstantními koeficienty

Rovnice $y'' + ty' - 2y = 4$ s počátečními podmínkami $y(0) = -1, y'(0) = 0$ se zobrazí Laplaceovou transformací a po úpravě se dostane diferenciální rovnice

$$\mathcal{L}'(y) + \mathcal{L}(y)\left(\frac{3}{s} - s\right) = 1 - \frac{4}{s^2}\,,$$

která má řešení $\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{Ce^{s^2/2}}{s^3}$. Protože $\mathcal{L}(y) \to 0$ pro $s \to \infty$, je $C = 0$. Výsledek je tedy $y = t^2 - 1$.

Soustavy diferenciálních rovnic

Soustava

$$\begin{aligned} y' &= -z\,, \quad y(0) = 1 \\ z' &= y\,, \quad z(0) = 0 \end{aligned}$$

se pomocí Laplaceovy transformace převede na soustavu

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(z) &= 1 \\ \mathcal{L}(y) - s\mathcal{L}(z) &= 0\,, \end{aligned}$$

která má řešení $\mathcal{L}(z) = 1/(s^2+1)$, takže $z = \sin t, y = \cos t$.

Integrální rovnice

Má se vyřešit rovnice $y(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t-u)y(u)\,\mathrm{d}u$. Integrál na pravé straně je roven $\sin * y$, takže $\mathcal{L}(y)(s) = 3!/s^4 + \mathcal{L}(y)(s)/(s^2+1)$.

Snadno se nyní zjistí řešení $y = t^3 + t^5/20$.

Diferenční rovnice

Úkolem je najít „nerekurentní" vyjádření členů posloupnosti $\{a_n\}$ zadané rekurentně vzorcem

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n \,, a_0 = 0 \,, a_1 = 1 \,.$$

V předchozí rovnosti probíhá proměnná n čísla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Na chvíli lze uvažovat, že předchozí rovnost platí pro $n \geq 2, n \in \mathbb{R}$. Tedy můžeme hledat funkci

$$y(t) = a_n, \;\; n \leq t < n+1, \, n = 0, 1, 2, \ldots$$

splňující rovnici

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0 \,.$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace (pracujeme opatrně) se dostane

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^{2s} - 3e^s + 2)} = \frac{1-e^{-s}}{s}\Big(\frac{1}{1-2e^{-s}} - \frac{1}{1-e^{-s}}\Big) = \mathcal{L}(2^{[n]} - 1) \,.$$

$$\mathcal{L}(a^{[t]}) = \frac{1-e^{-s}}{s(1-ae^{-s})}$$

Odtud plyne řešení $y(t) = 2^{[n]} - 1$ a následně $a_n = 2^n - 1$.

Parciální diferenciální rovnice

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\;\mathrm{d}t \,,$$
$$\mathcal{L}_{-1}\{U(x,s)\} = u(x,t) \,.$$

Řízení procesu

Zkoumejme opět pro diferenciální operátor T klidové řešení x rovnice $Tx = f$. Dostaneme $P(s)\mathcal{L}x = \mathcal{L}f$. Označíme $X = \mathcal{L}x$, $F = \mathcal{L}f$ a $G(s) = 1/P(s)$ a dostaneme $X = G(s)F$.

Pokud rovnice popisovala situaci, kdy z daného vstupu X_0 dostaneme výstup X_1 pomocí procesu G_1, máme vztah $X_1 = G_1(s)X_0$. Pokud tento výstup vstupuje do procesu G_2 dostaneme výstup $X_2 = G_2X_1 = G_2G_1X_0$. Tedy napojení procesů odpovídá procesu $G = G_1G_2$.

Pokud se procesy spojí tak, že výstup z G_1 se přidá zpracovaný procesem G_2 ke vstupu do procesu G_1, dostaneme situaci, které se říká zpětná vazba.

Máme $X_1 = X_0 + G_2X_2$, $X_2 = G_1(X_0 + G_2X_2)$, tedy $X_2 = GX_0$, kde

$$G = \frac{1}{1 - G_1G_2} \,.$$

Pokud G_2 funguje jako zpětná vazba v systému popsaném

$$\frac{G_1}{1 + G_1G_2} \,,$$

tak nastavením hodnoty $G_2 = 1/10$ zaručíme, že případný stonásobný nárůst G_1 nezpůsobí přílišnou škodu.

Pokud pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ existují $K > 0, p > 0$ tak, že $|a_n| \le Kp^n/n!$ pro skoro všechna n.

Potom $\mathcal{L}\big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\big)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! s^{-n-1}$.

Vyřešte znovu rovnici $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$, tentokrát obecně, bez daných počátečních podmínek.

Příklad. Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 4y = 0$.

Příklad. Vyřešte rovnici $y'' + y = g(t)$, kde $g(t) = 1$ na $[1, 2)$ a je rovno 0 jinde, s počátečními podmínkami $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Příklad. Vyřešte rovnici $y'' + 2y' + 5y = \delta_1(t)$ s počátečními podmínkami $y(0) = 0, y'(0) = 0$. V tomto případě předpokládáme, že řešení y má spojité derivace do 2.řádu a je exponenciálně omezené.

Příklad. Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} y' + z' + y + z &= 1 \\ y' + z &= e^t \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = -1, z(0) = 2$. [$y = 1 - 2e^t + te^t, z = 2e^t - te^t$]

Příklad. Vyřešte integrální rovnici $y(t) = e^t - \int_0^t (t-u)^2 y(u)\, du$.

Příklad. Vyřešte diferenční rovnici $y(t) - y(t - \pi/a) = \sin(at)$ při podmínce $y(t) = 0$ pro $y \le 0$. [$y(t) = \sin(at)$ na intervalech $(2\pi n/a, 2\pi(n + 1)/a)$ a 0 jinde.]

Příklad. Označme $f(t) = [t]$ pro $t \ge 0$, $f(t) = 0$ pro $t < 0$ (jde o kladnou celou část čísla). Spočtěte

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s(e^s - 1)} = \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})}\,.$$

Spočtěte řešení diferenční rovnice

$$y(t + 1) - y(t) = 1,\ \ y(y) = 0,\ t < 1\,.$$

Ověřte, že $y(t) = f(t)$.

Příklad. Pokud se řeší diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami, vyřeší se pomocí Laplaceovy transformace s (částečně) obecnými $y(0), y'(0)$ a pak se okrajové podmínky dosadí.

Vyřešte rovnici $y'' + y = \cos t$ pro $y(0) = 1, y(\pi/2) = 1$.

Příklad. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - 4y(t) = 0$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$.

Řešení. Na obě strany zadané rovnice provedeme Laplaceovu transformaci.

Dostaneme

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) - 4\mathcal{L}(y) = 0.$$

Dosazením počátečních podmínek získáme rovnost

$$\mathcal{L}(y) = \frac{-1}{s^2 - 4} = \frac{1}{2 - s} \cdot \frac{1}{2 + s} = \frac{1/4}{2 - s} + \frac{1/4}{2 + s}.$$

Inverzní Laplaceovou transformací přejdeme k hledanému řešení diferenciální rovnice

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-2t} - e^{2t}\right).$$

Příklad. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$z'(t) + y(t) = 0,$$

$$z(t) + y'(t) = 0,$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $z(0) = 1$.

Řešení. Laplaceovou transformací převedeme danou soustavu na soustavu

$$s\mathcal{L}(z) - z(0) + \mathcal{L}(y) = 0,$$

$$\mathcal{L}(z) + s\mathcal{L}(y) - y(0) = 0.$$

Po dosazení počátečních podmínek z druhé rovnice vyjádříme

$$\mathcal{L}(z) = -s\mathcal{L}(y).$$

Nyní tento vztah dosadíme do první rovnice a po snadné úpravě máme

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{1-s^2} = \frac{1/2}{1-s} + \frac{1/2}{1+s}.$$

Po zpětné transformaci tedy

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right).$$

Funkci $z(t)$ můžete lehko určit například z druhé rovnice.

Příklad. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte pro $t > 0$ klidová řešení diferenciálních rovnic

$$y'(t) = u(t)$$

$$d'(t) = \delta(t)$$

a ověřte, že

$$y = u * d.$$

Řešení. Dostaneme $s\mathcal{L}y = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}y = \frac{1}{s^2}$, $y = t$.

Podobně $s\mathcal{L}d = 1$, $\mathcal{L}d = \frac{1}{s}$, $d = 1$.

Ověříme

$$t = y = u * d = \int_0^t 1 \cdot 1 \ \mathrm{d}t \ = \ t.$$

Příklad. Máme nehmotný nosník, který čouhá ze zdi a je na něm v polovině umístěno závaží 6 kg. Zjistěte, jak se prohýbá.

Řešení. Fyzikální důvody vedou k diferenciální rovnici (závaží znázorňuje Diracova delta funkce v bodě 1, nosník je popsán funkcí y na intervalu $[0, 2]$)

$$y^{(iv)}(t) = 6\delta(t-1),$$

kde $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(2) = y'''(2) = 0$.

Parametry označíme počáteční podmínky, které Laplaceova transformace požaduje $y''(0) = a$, $y'''(0) = b$ a počítáme ...

Dostaneme

$$y(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{b}{6}t^3 + u(t-1)(t-1)^3.$$

Pomocí hodnot v bodě $t = 2$ zjistíme parametry $a = 6$, $b = -6$.

Příklad. Máme nehmotný nosník, je na obou koncích podepřen a je na něm v polovině umístěno závaží 6 kg. Zjistěte, jak se prohýbá.

Řešení. Fyzikální důvody vedou k diferenciální rovnici (závaží znázorňuje Diracova delta funkce v bodě 1, nosník je popsán funkcí y na intervalu $[0, 2]$)

$$y^{(iv)}(t) = 6\delta(t-1),$$

kde $y(0) = y''(0) = 0$, $y(2) = y''(2) = 0$.

Parametry označíme počáteční podmínky, které Laplaceova transformace požaduje $y'(0) = a$, $y'''(0) = b$ a počítáme ...

Dostaneme

$$y(t) = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^3 + u(t-1)(t-1)^3\,.$$

Příklad. Řešte diferenční rovnice

$$a_{n+1} + a_n = 1,\;\; a_0 = 0,\;\; a_1 = 1\,.$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\;\; a_0 = 0,\;\; a_1 = 1\,.$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n,\;\; a_0 = 0,\;\; a_1 = 1\,.$$

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 4n + 2,\;\; a_0 = 0,\;\; a_1 = 1\,.$$

Příklad. Řešte diferenční rovnice

$$y(t) + y(t-1) = e^t,\;\; y(t) = 0\;t \le 0\,.$$

$$y(t) + y(t-1) = t,\;\; y(t) = 0\;t \le 0\,.$$

Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-3t},\;\; y(t) = 0,\;\; t \le 0,\, y(0) = 4\,.$$

Řešení. Laplaceova transformace dává

$$sY(s) - y(0) + 2Y = \frac{1}{s+3}\,.$$

Odtud

$$Y(s) = \frac{5}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

a

$$y(t) = 5e^{-2t} - e^{-3t}\,.$$

Příklad. Spočtěte integrální rovnici

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\;\mathrm{d}\tau\,.$$

Řešení. Po Laplaceově transformaci máme

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s)\frac{1}{s^2+1}\,.$$

Tedy

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\,.$$

Řešení je

$$y(t) = t + \frac{1}{6}t^3\,.$$

Příklad. Řešte diferenciální rovnice

$$y'(t) + y(t) = f(t)$$

$$y''(t) - y(t) = f(t)$$

$$y''(t) = f(t)$$

s pomocí konvoluce.

Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y''(t) + y(t) = \delta(t)\,.$$

Řešení. Dostaneme
$$y(t) = u(t)\sin(t)$$
a je to jako když do klidného kyvadla ťukneme.

Příklad. Řešte rovnici
$$\frac{\mathrm{d}v(x,t)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v(x,t)}{\mathrm{d}t} = t$$
s okrajovými podmínkami $v(x,0) = 0$, $v(0,t) = t^2$.

Řešení. Po Laplaceově transformaci dostaneme rovnici
$$\frac{\mathrm{d}V(x,s)}{\mathrm{d}x} + V(x,s) = \frac{1}{s^2}$$
s okrajovou podmínkou $V(0,s) = 2/s^3$.

Vyřešíme rovnici pro V a dostaneme
$$V(x,s) = c(s)e^{-x} + \frac{1}{s^2}\,.$$

Pro $x = 0$ použijeme počáteční podmínku ke spočtení neznámé funkce c:
$$V(0,s) = \frac{2}{s^3} = c(s) + \frac{1}{s^2}\,,$$
odkud dostaneme
$$c(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}$$
a po dosazení
$$V(x,s) = \left(\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}\right)e^{-x} + \frac{1}{s^2}\,.$$

A tedy
$$v(x,t) = t^2e^{-x} - te^{-x} + t\,.$$

Příklad. Řešte rovnici vedení tepla
$$\frac{\mathrm{d}v(x,t)}{\mathrm{d}t} = k\frac{\mathrm{d}^2v(x,t)}{\mathrm{d}x^2}$$
s okrajovými podmínkami $v(0,t) = v(\pi,t) = 1$, $v(x,0) = 1 + \sin(x)$.

Řešení. Po Laplaceově transformaci dostaneme rovnici
$$sV(x,s) - v(x,0) = k\frac{\mathrm{d}^2V(x,s)}{\mathrm{d}x^2}$$
s okrajovou podmínkou $V(0,s) = V(\pi,s) = 1/s$.

Vyřešíme rovnici pro V a dostaneme
$$V(x,s) = \frac{1}{s} + \frac{\sin(x)}{s+k}\,.$$

A tedy
$$v(x,t) = 1 + e^{-kt}\sin(x)\,.$$

Příklad. Řešte vlnovou rovnici
$$\frac{\mathrm{d}^2v(x,t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2v(x,t)}{\mathrm{d}x^2}$$
pro $x > 0$ s okrajovými podmínkami $v(0,t) = f(t)$, $v(x,0) = v_t(x,0) = 0$, a pro $t > 0$ vyhovující fyzikální podmínce
$$\lim_{x\infty} v(x,t) = 0\,.$$

Řešení. Po Laplaceově transformaci dostaneme rovnici

$$s^2 V(x,s) = \frac{\mathrm{d}^2 V(x,s)}{\mathrm{d}x^2}$$

s okrajovou podmínkou $V(0,s) = F(s)$.

Vyřešíme rovnici pro V a dostaneme

$$V(x,s) = a(s)e^{-sx} + b(s)e^{sx}\,.$$

Fyzikální důvody říkají, že

$$\lim_{x\to\infty} V(x,s) = 0$$

a tedy $b(s) = 0$.

A tedy

$$V(x,s) = F(s)e^{-sx}$$

a

$$v(x,t) = u(t-x)f(t-x)\,.$$