METRICKÉ PROSTORY

V reálných číslech byla konvergence definována buď pomocí vzdálenosti dvou bodů nebo pomocí uspořádání. Druhý přístup už však nejde použít v euklidovských prostorech vyšší dimenze, a proto konvergence pomocí vzdálenosti je vhodnější.

METRICKÝ PROSTOR

Z chování vzdálenosti v euklidovských prostorech se vyberou základní vlastnosti, které se stanou axiomy pro abstraktní pojem vzdálenosti, nazvaný metrika.

Tvrzení dokázaná pro tento obecný pojem lze pak použít pro všechny struktury s konkrétní vzdáleností.

Důležitou aplikací budou metriky v prostorech funkcí.

DEFINICE. Nechť X je množina a d funkce přiřazující každé dvojici (x, y) z X nezáporné reálné číslo $d(x, y)$ mající vlastnosti:

1. pro $x, y \in X$ je $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$;
2. (symetrie) $d(x, y) = d(y, x)$ pro každé $x, y \in X$;
3. (trojúhelníková nerovnost) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pro každé $x, y, z \in X$.

Funkce d se pak nazývá metrika na X a dvojice (X, d) se nazývá metrický prostor.

Zřejmým způsobem se definuje vzdálenost bodu a a množiny A od množiny B a průměr množiny A:

$$d(a, B) = \inf\{d(a, b); b \in B\}, \quad d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\},$$

$$\text{diam}\, A = \sup\{d(a, b); a, b \in A\}.$$

DEFINICE. V metrickém prostoru (X, d) posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k bodu $x \in X$ (nebo má za limitu bod $x \in X$), jestliže $d(x_n, x) \to 0$.

Značení: $x_n \to x$ nebo $\lim x_n = x$.

DEFINICE. Okolí bodu x v metrickém prostoru (X, d) je každá množina obsahující otevřenou kouli $B_{x,r} = \{y; d(x, y) < r\}$ pro nějaké $r > 0$.

Pomocí konvergence nebo okolí lze definovat všechny podstatné pojmy, které byly používány v euklidovských prostorech:

DEFINICE. Podmnožina A metrického prostoru (X, d) se nazývá otevřená, jestliže každý bod A má okolí celé ležící v A (tj. žádná posloupnost z $X \setminus A$ nekonverguje k bodu z A).

Podmnožina A metrického prostoru (X, d) se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk $X \setminus A$ je otevřený (tj. limity konvergentních posloupností z A leží v A).

DEFINICE. Uzávěr množiny A v metrickém prostoru (X, d) je množina všech limitních bodů posloupností z A (a značí se $\overline{A}$).

VĚTA. Soubor všech otevřených množin v metrickém prostoru (X, d) má následující vlastnosti:

1. $\emptyset$ a X jsou otevřené množiny;
2. sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřená množina;

3. průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

DŮSLEDEK. Soubor všech uzavřených množin v metrickém prostoru (X, d) má následující vlastnosti:

1. $\emptyset$ a X jsou uzavřené množiny;
2. průnik libovolného počtu uzavřených množin je uzavřená množina;
3. sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

VĚTA. Uzávěr v metrickém prostoru (X, d) má následující vlastnosti:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \overline{A}$ pro každé $A \subset X$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ pro každé $A, B \subset X$;
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ pro každé $A \subset X$.

Může se stát, že dvě různé metriky určují totožné konvergence (např. na $\mathbb{R}$ obvyklá metrika $|x - y|$ a metrika $2|x - y|$.

Pokud je pro další potřebu hlavní konvergence a nikoli vzdálenost, je možné použít vhodnější metriku, která má stejnou konvergenci.

DEFINICE. Dvě metriky d, e na množině X se nazývají (topologicky) ekvivalentní, jestliže metrické prostory (X, d) a (X, e) mají totožné konvergentní posloupnosti.

Ekvivalentní metriky (jinak řečeno: ekvivalentní metrické prostory) mají tedy stejné otevřené množiny, stejné uzavřené množiny, stejné uzávěry množin.

Pojmy, které se nezmění záměnou metrik za ekvivalentní, se nazývají topologické.

Kromě již uvedených tam náleží i následující vlastnosti:

DEFINICE. Podmnožina metrického prostoru X se nazývá hustá, jestliže její uzávěr je celý prostor X.

Podmnožina metrického prostoru X se nazývá řídká, jestliže doplněk jejího uzávěr je hustý.

Podmnožina metrického prostoru X se nazývá 1.kategorie, jestliže je sjednocením spočetně mnoha řídkých množin.

Metrický prostor se nazývá separabilní, jestliže má spočetnou hustou část.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Učení 1

Konstrukce

Je triviální, že zúžení d_Y metriky d z množiny X na množinu Y je opět metrika (přesněji by se mělo říci *zúžení z $X \times X$ na $Y \times Y$*).

DEFINICE. Je-li (X, d) metrický prostor a Y podmnožina X, nazývá se dvojice (Y, d_Y) metrický podprostor prostoru (X, d).

DEFINICE. Jsou-li (X,d) a (Y,e) metrické prostory, pak jejich (kartézský) součin je metrický prostor $(X\times Y,\rho)$, kde $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,x_2) + e(y_1,y_2)$.

DEFINICE. Jsou-li (X_n,d_n) pro $n\in\mathbb{N}$ metrické prostory, pak jejich (kartézský) součin je metrický prostor $(\Pi_{n=1}^{\infty} X_n,\rho)$, kde $\rho(\{x_n\},\{y_n\}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n(1+d_n(x_n,y_n))}$.

POZOROVÁNÍ. Posloupnost $\{x_n\}$ v $(\Pi_{n=1}^{\infty} X_n,\rho)$ konverguje k bodu x právě když, pro každé $k\in\mathbb{N}$, projekce této posloupnosti do X_k konverguje k projekci bodu x do X_k.

Na nespočetných součinech aspoň dvoubodových prostorů nelze definovat metriku tak, aby platila předchozí věta.

Nicméně, pro speciální podmnožinu i nespočetných mocnin lze definovat velmi důležitou metriku, která dává stejnoměrnou konvergenci:

DEFINICE. Symbolem $\mathcal{F}_u(X,Y)$ se značí množina omezených funkcí z množiny X do metrického prostoru (Y,d) opatřená metrikou $\rho(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)); x\in X\}$.

Písmeno Y se v označení $\mathcal{F}_u(X,Y)$ vynechává, je-li $Y=\mathbb{R}$.

POZOROVÁNÍ. Posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathcal{F}_u(X,Y)$ konverguje k funkci f právě když konverguje stejnoměrně, tj. pro každé $\varepsilon>0$ existuje k tak, že pro všechna $n>k$ a všechna $x\in X$ je $d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

SPOJITÁ ZOBRAZENÍ

Protože je na metrických prostorech definována konvergence i okolí bodů, lze definovat spojitost stejně jako v euklidovských prostorech.

Vzhledem ke srovnání s dalšími definicemi je lépe volit $\varepsilon-\delta$ definici.

DEFINICE. Zobrazení $f:(X,d)\to(Y,e)$ mezi metrickými prostory se nazývá spojité, jestliže pro každé $x\in X$ a každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ tak, že je-li $d(x,y)<\delta$, je $e(f(x),f(y))<\varepsilon$.

POZOROVÁNÍ. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro $f:(X,d)\to(Y,e)$:

1. f je spojité.
2. Pro každé $x\in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v (Y,e) existuje okolí U bodu x v (X,d), že $f(U)\subset V$.
3. Vzor $f^{-1}(G)$ každé otevřené množiny z (Y,e) je otevřená množina v (X,d).
4. Vzor $f^{-1}(G)$ každé uzavřené množiny z (Y,e) je uzavřená množina v (X,d).
5. f zachovává konvergenci, tj. $f(x_n)\to f(x)$ v prostoru (Y,e) pokud posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x v prostoru (X,d).
6. Pro každou množinu $A\subset X$ je $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

DEFINICE. Má-li spojité zobrazení inverzní spojité zobrazení, nazývá se homeomorfismus.

POZOROVÁNÍ. Metriky d, e na množině X jsou ekvivalentní právě když obě identická zobrazení $(X, d) \to (X, e)$ a $(X, e) \to (X, d)$ jsou spojitá (tj., identické zobrazení $(X, d) \to (X, e)$ je homeomorfismus).

Zobrazení mezi metrickými prostory je spojité právě když je spojité mezi prostory, které jsou jim ekvivalentní.

Existuje značně silnější pojem než ekvivalentní metriky, který dává jistou ekvivalenci mezi metrickými prostory.

Takto ekvivalentní prostory se nedají rozlišit metodami teorie metrických prostorů:

DEFINICE. Dva metrické prostory (X, d) a (Y, e) se nazývají isometrické, jestliže existuje zobrazení f z X na Y takové, že $e(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pro všechna $x, y \in X$. Zobrazení f se pak nazývá isometrie.

DEFINICE. Jsou-li X, Y metrické prostory, značí $\mathcal{C}_u(X, Y)$ podprostor $\mathcal{F}_u(X, Y)$ všech omezených spojitých zobrazení z X do Y.

POZOROVÁNÍ. $\mathcal{C}_u(X, Y)$ je uzavřený v $\mathcal{F}_u(X, Y)$.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3

STEJNOMĚRNÁ SPOJITOST

Stejně jako na $\mathbb{R}$ lze definovat stejnoměrnou spojitost i v metrických prostorech.

Uvědomte si, že následující definice se liší od definice spojitosti jen v posunutí kvantifikátoru *pro každé* x.

DEFINICE. Zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ mezi metrickými prostory se nazývá stejnoměrně spojité, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je-li $x, y \in X$ a $d(x, y) < \delta$, je $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Zřejmě je každé stejnoměrně spojité zobrazení spojité.

Stejnoměrná spojitost má méně hezkých charakterizací než spojitost.

Nelze použít konvergenci posloupností, ale lze použít konvergence dvojice posloupností k diagonále, jak je uvedeno ve druhé položce. Třetí položka je velmi zajímavá a to, že implikuje stejnoměrnou spojitost není zcela snadné (důkaz tu nebude uveden. nicméně nevyžaduje žádných dalších znalostí a můžete se pokusit ho provést, návod je v *Poznámkách*).

POZOROVÁNÍ. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$:

1. f je stejnoměrně spojité.
2. Jestliže $d(x_n, y_n) \to 0$, pak $e(f(x_n), f(y_n)) \to 0$, pro libovolné posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ v X.
3. Je-li $A, B \subset X$ a $d(A, B) = 0$, pak $e(f(A), f(B)) = 0$.

Pro definici stejnoměrné ekvivalence metrik se hodí použít analogie charakterizace topologické ekvivalence pomocí identických zobrazení:

DEFINICE. Dvě metriky d, e na množině X se nazývají stejnoměrně ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $(X, d) \to (X, e)$ a $(X, e) \to (X, d)$ jsou stejnoměrně spojitá.

Více než stejnoměrná ekvivalence metrik se používá tzv. lipschitzovská ekvivalence odvozená z lipschitzovských zobrazení.

DEFINICE. Zobrazení $f : (X,d) \to (Y,e)$ mezi metrickými prostory se nazývá lipshitzovské, jestliže existuje nezáporné číslo k tak, že $e(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$ pro libovolná $x, y \in X$.

DEFINICE. Dvě metriky d, e na množině X se nazývají lipschitzovsky ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $(X,d) \to (X,e)$ a $(X,e) \to (X,d)$ jsou lipshitzovské, tj. existují kladné konstanty k, l tak, že $k\, d(x,y) \leq e(x,y) \leq l\, d(x,y)$.

POZOROVÁNÍ. Každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité a tedy lipschitzovsky ekvivalentní metriky jsou stejnoměrně ekvivalentní.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Učení 4

ÚPLNOST

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v metrickém prostoru (X,d) se nazývá cauchyovská, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $m.n > k$ je $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

DEFINICE. Metrický prostor (X,d) se nazývá úplný, jestliže každá jeho cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Prostory $\mathbb{R}^n$ jsou úplné pro všechna přirozená n.

POZOROVÁNÍ.

1. Stejnoměrně spojité zobrazení $f : (X,d) \to (Y,e)$ zobrazuje cauchyovské posloupnosti v X do cauchyovských posloupností v Y.
2. Uzavřený podprostor úplného prostoru je úplný.
3. Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřený.
4. Součin úplných prostorů je úplný.

VĚTA. Prostor $\mathcal{F}_u(X,Y)$ (a tedy i prostory $\mathcal{C}_u(X,Y)$ a $\mathcal{U}_u(X,Y)$) je úplný, pokud je prostor Y úplný.

VĚTA. Nechť f je stejnoměrně spojité zobrazení podmnožiny A metrického prostoru (X,d) do úplného metrického prostoru (Y,e). Pak existuje stejnoměrně spojité zobrazení $F : \overline{A} \to (Y,e)$, které se na A shoduje s f.

Zobrazení na množině B, které se shoduje na množině $A \subset B$ se zobrazením f se nazývá rozšířením zobrazení f (z množiny A) na množinu B.

Reálná čísla byla konstruována jako jisté úplné rozšíření racionálních čísel.

Tento postup lze použít i obecněji v metrických prostorech.

VĚTA. Každý metrický prostor je (hustým) podprostorem nějakého úplného prostoru.

VĚTA. Je-li metrický prostor (X, d) hustým podprostorem dvou úplných prostorů Z_1, Z_2, pak existuje isometrické zobrazení Z_1 na Z_2, které je identické na X.

DEFINICE. Úplný prostor, který obsahuje metrický prostor X jako hustý podprostor, se nazývá zúplnění prostoru X.

Na závěr této části o úplnosti budou uvedena některá tvrzení platná v úplných prostorech.

První dvě tvrzení byla dokazována v části o reálných číslech.

VĚTA. (Cantor) Metrický prostor (X, d) je úplný, právě když každá monotónní posloupnost neprázdných uzavřených množin, jejichž průměry konvergují k 0, má neprázdný průnik.

VĚTA. (Baire) Průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin v úplném metrickém prostoru je hustý.

Lipschitzovské zobrazení s konstantou menší než 1 se nazývá kontrakce.

VĚTA. (Banach) Nechť f je kontrakce v neprázdném úplném metrickém prostoru X. Pak existuje $x_0 \in X$ tak, že $f(x_0) = x_0$.

Bod x_0 s vlastností z předchozí věty se nazývá pevný bod zobrazení f.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

Cvičení 5

KOMPAKTNOST

V úplných prostorech má každá cauchyovská posloupnost hromadný bod.

Jestliže se tato vlastnost zesílí na libovolné posloupnosti, dostane se značně silnější vlastnost, která do jisté míry nahrazuje konečnost v nekonečných prostorech.

DEFINICE. Metrický prostor se nazývá kompaktní, jestliže každá jeho posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost.

Některé následující vlastnosti jsou podobné vlastnostem úplnosti.

POZOROVÁNÍ.

1. Uzavřený podprostor kompaktního prostoru je kompaktní.
2. Kompaktní podprostor metrického prostoru je uzavřený.
3. Součin kompaktních prostorů je kompaktní.
4. Spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní.
5. Podprostor euklidovského prostoru je kompaktní právě když je uzavřený a omezený.

Nyní budou uvedeny hlubší vlastnosti kompaktnosti. K tomu je potřeba několika definic.

Soustava $\mathcal{S}$ (otevřených) podmnožin X se nazývá (otevřené) pokrytí X, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.

Podmnožina A metrického prostoru X se (pro $r > 0$) nazývá r-síť, jestliže vzdálenosti různých bodů množiny A jsou alespoň r. Podle Zornova lemmatu existuje v X maximální r-síť, tj. taková r–síť, že každý bod X je od nějakého bodu této sítě vzdálen o méně než r.

VĚTA.

1. Kompaktní prostor je separabilní.
2. Pro každé otevřené pokrytí kompaktního prostoru X existuje kladné číslo r (tzv. Lebesgueovo číslo) takové, že libovolná podmnožina X o průměru nejvýš r je obsažena v nějaké množině z daného pokrytí.

VĚTA. Metrický prostor X je kompaktní právě když z každého otevřeného pokrytí X lze vybrat konečné pokrytí X.

Když se v definici kompaktnosti uvažují pokrytí jen koulemi se stejnými poloměry, dostane se větší třída prostorů, která je také důležitá:

DEFINICE. Metrický prostor X se nazývá totálně omezený, jestliže, pro každé $r > 0$, z libovolného pokrytí X otevřenými koulemi s průměrem alespoň r lze vybrat konečné pokrytí X.

POZOROVÁNÍ.

1. Metrický prostor je totálně omezený právě když, pro každé $r > 0$, libovolná r-síť v X je konečná.
2. Podprostor totálně omezeného prostoru je totálně omezený.
3. Uzávěr totálně omezeného prostoru je totálně omezený.
4. Součin totálně omezených prostorů je totálně omezený.
5. Stejnoměrně spojitý obraz totálně omezeného prostoru je totálně omezený.
6. Podmnožina euklidovského prostoru je totálně omezená právě když je omezená.

VĚTA. Metrický prostor je kompaktní právě když je úplný a totálně omezený.

DŮSLEDEK. Zúplnění totálně omezeného prostoru je kompaktní.

DODATKY

VĚTA. (Tietze) Každé spojité zobrazení z uzavřené podmnožiny metrického prostoru X do $\mathbb{R}$ lze spojitě rozšířit na celé X.

VĚTA. (Stone, Weierstrass) Nechť X je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{A}$ je podokruh $\mathcal{C}_u(X)$ obsahující konstantní zobrazení a oddělující body X. Pak $\mathcal{A}$ je hustý v $\mathcal{C}_u(X)$.

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6

Cvičení 6