TEORIE MÍRY

V některých předchozích kapitolách jste se setkali s měřením velikostí množin a víte, jaké byly těžkosti s měřením množin i na reálné ose.

Kvůli těmto těžkostem se měření zúžilo jen na délku intervalů a jejich spočetná sjednocení.

Velikost (neboli míra) takovéto množiny byl součet délek intervalů.

A to jsme se docela snažili. Nešlo to jinak.

Je možné najít metodu, jak měřit libovolné podmnožiny přímky (nebo euklidovského prostoru)?

Vzpomeňte si, že např. v rovině se obsah složitější množiny P počítal jako integrál z funkce konstantní na P s hodnotou 1 (taková funkce, která se dodefinuje na zbylých bodech prostoru hodnotou 0, se nazývá charakteristická funkce množiny A).

Pokud se vezme obecný integrál (například Lebesgueův) a míra množiny se definuje jako integrál z charakteristické funkce této množiny, dostane se již veliká třída množin, které se tímto způsobem dají měřit (nikoli však všechny).

V tom je jádro problému. Prostě to nejde.

V abstraktní teorii míry se postupuje podobně jako v metrických prostorech.

Z vlastností velikostí množin se vyberou ty podstatné a ty se určí jako axiomy pro míru.

..

A při dobrém citu dostaneme docela hezkou teorii měření.

Míra a integrál spolu úzce souvisí.

Jak bylo řečeno výše, integrál určuje míru.

Ale existuje i opačný postup: z abstraktního pojmu míry lze vytvořit teorii integrálu.

A to je jednoduché: plocha obdélníka je rovna základna krát výška.

Míra udává nejen velikost množin, ale používá se i jako pravděpodobnost.

A v tu chvíli jde pravděpodobně o moc. Moc o moc.

Algebra množin

Jak bylo naznačeno v úvodu, míry získané z integrálu nejsou definovány na všech podmnožinách.

Soustava množin, na kterých je taková míra snadno definována, má jisté vlastnosti shrnuté v následující definici.

DEFINICE. Nechť X je neprázdná množina. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá algebra, jestliže $\mathcal{S}$ je uzavřená na konečná sjednocení, doplňky a obsahuje $\emptyset$.

Algebra se nazývá σ-algebra, jestliže je uzavřená na spočetná sjednocení.

POZOROVÁNÍ.

1. Každá algebra (resp. σ-algebra) je uzavřená i na konečné (resp. spočetné) průniky a obsahuje X.
2. Průnik algeber (resp. σ-algeber) v X je opět algebra (resp. σ-algebra).
3. Pro každý systém podmnožin X existuje nejmenší algebra (resp. σ-algebra), která tento systém obsahuje.

Slovo "algebra"není vybrán náhodně, milí algebraičtí analytičtí kouzelníci.

Míra

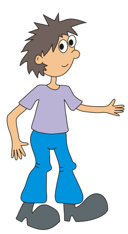
Nyní si sestavíme axiomy míry. Podle nich se bude měřit, vážit, vařit a tak podobně.

DEFINICE. Míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ je zobrazení $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mající vlastnosti

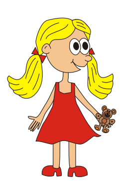
1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, jakmile $\{A_n\}$ je posloupnost navzájem disjunktních množin z $\mathcal{S}$.

Poslední vlastnost míry se nazývá σ-aditivita.

Víc se nepodařilo uhádat. I tak je toho dost na "dvakrát měř".



Prostě změřit všechno, vždy a všude ostřížím zrakem dovede jenom maminka.



Já jsem celá maminka.

POZOROVÁNÍ.

1. Je-li $A, B \in \mathcal{S}$ a $A \subset B$, je $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Je-li $\{A_n\}$ posloupnost z $\mathcal{S}$, je $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
3. Je-li $\{A_n\}$ rostoucí posloupnost z $\mathcal{S}$, je $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.
4. Je-li $\{A_n\}$ klesající posloupnost z $\mathcal{S}$ a $\mu(A_1) < \infty$, je $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

Druhá uvedená vlastnost se nazývá σ-subaditivita, obě poslední vlastnosti vyjadřují jistou spojitost míry (viz též *Otázky*). ´

Pracujte v klidu, definice a věty na sebe dobře pasují.

T.j. žádná lidová tvořivost. Zkusil jsem.

Trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$, kde $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X a μ je míra na $\mathcal{S}$, se nazývá prostor s mírou (dvojice $(X, \mathcal{S})$ se obvykle nazývá měřitelný prostor).

Jak je patrno z postupných přípravných manévrů, bitva bude o každý kousek prostoru.

Tento prostor s mírou (nebo míra samotná) se nazývá pravděpodobnostní, pokud je $\mu(X) = 1$.

Prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se nazývá úplný, pokud platí

$$A \subset B \in \mathcal{S}, \mu(B) = 0, \text{ pak } A \in \mathcal{S}.$$

Je to přirozená vlastnost: je-li nějaká množina *nulová* (tj. $\mu(A) = 0$), je i každá její podmnožina nulová.

VĚTA. Pro prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se označí $\overline{\mathcal{S}} = \{A \cup N; A \in \mathcal{S}, N \subset B, \mu(B) = 0\}$ a pro $P = A \cup N$ z definice $\overline{\mathcal{S}}$ se definuje $\overline{\mu}(P) = \mu(A)$. Pak $\overline{\mathcal{S}}$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$ a $\overline{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\mathcal{S}}$, která rozšiřuje μ.

Důkaz. Důkaz toho, že $\overline{\mathcal{S}}$ je σ-algebra plyne snadno z toho, že $\mathcal{S}$ a systém všech nulových množin je σ-algebra.

Pro korektnost definice $\overline{\mu}$ se musí dokázat, že je-li $A \cup N = B \cup M$ a $A, B \in \mathcal{S}, N.M$ jsou podmnožiny nulových množin, je $\mu(A) = \mu(B)$. Dokažte to (spočtěte míru rozdílu $A \setminus B$ a míru $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$).

To, že $\overline{\mu}$ je úplná míra, je snadné. Dokažte to. $\diamond$

Prostor s mírou $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ se nazývá *zúplněním* prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

POZOROVÁNÍ. Je-li $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ zúplnění měřitelného prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $\widetilde{\mu}$ je míra na $\overline{\mathcal{S}}$, která rozšiřuje μ, pak $\widetilde{\mu} = \overline{\mu}$.

Jak říkám, zhruba řečeno, je to velmi jemné.

Poznámky 1:

1. Míry a podobné „velikostní" funkce se obecně definují i na jiných systémech množin než na σ-algebrách. Je možné je definovat na algebrách nebo na tzv. okruzích, či σ-okruzích.

Okruh podmnožin X je systém množin uzavřený na konečná sjednocení a rozdíly množin. Je-li okruh uzavřený i na spočetná sjednocení, nazývá se σ-okruh.

Pokud se míra definuje na okruhu, je σ-aditivita definována jen pro ty posloupnosti disjunktních množin, jejichž sjednocení leží v okruhu.

Existuje úzký vztah mezi touto množinovou definicí okruhu a algebraickými okruhy. Charakteristické funkce dávají vzájemně prostý vztah mezi všemi podmnožinami X a prvky mocniny 2^X.

Dvoubodová množina $2 = \{0, 1\}$ je vlastně algebra $\mathbb{Z}_2$ se sčítáním modulo 2 a obvyklým násobením – 2^X je součin těchto algeber s operacemi definovanými po složkách. Okruh (nebo algebra) množin v tomto vzájemném vztahu odpovídá podokruhu (nebo podalgebře, resp.) algebry 2^X.

Na 2^X lze definovat konvergenci posloupností (také po složkách) a σ-okruhy nebo σ-algebry pak odpovídají uzavřeným okruhům nebo algebrám v této konvergenci. Přenesením této konvergence zpátky z 2^X na podmnožiny X se dostává následující definice konvergence množin, nejdříve $\limsup$, $\liminf$:

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \, , \quad \liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \, .$$

Potom $\lim A_n$ existuje, pokud $\limsup A_n = \liminf A_n$ a rovná se tomuto společnému číslu.

Odtud a z vlastností míry uvedených v Pozorování vyplývá, že míra je spojité zobrazení (zachovává konvergenci). (viz též *Otázky*).

2. Axiomy míry lze také oslabit. Někdy je vhodné připustit i záporné hodnoty a oslabit σ-aditivitu.

Místo σ-aditivity lze uvažovat jen aditivitu, tj. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pro množiny $A, B, A \cup B$ z daného systému takové, že $A \cap B = \emptyset$.

Obdobně se definuje subaditivita místo σ-subaditivity.

3. Chápeme-li míru jako velikost množin, např. na přímce, tak posunutá množina by měla být stejně veliká jako původní množina.

To však nelze vyjádřit v obecné definici, protože posunutí množin není na obecných množinách X definováno (musela by tam být nějaká algebraická operace).

Navíc se míra používá i v případech, které s geometrickou velikostí množin nemají nic společného (např. pravděpodobnost).

4. Je ideální, když míra μ je definovaná na všech podmnožinách dané množiny X. Pokud ale $\mu(X) \neq 0$, tak už pak bude $\mu(\{x\}) \neq 0$ v nějakém bodě $x \in X$.

Lze totiž ukázat, že existují modely teorie množin, kde neexistuje nenulová míra, která se anuluje v bodech.

Zatím není známa bezespornost existence modelu teorie množin, kde by taková míra existovala.

Pokud by existovala, bude existovat už na $\mathbb{R}$. Tato míra však nebude invariantní vůči posunutí a bude hodně divoká.

Pokud by se otázka zúžila na existenci měr anulujících se v bodech a nabývajících jen hodnoty 0 a 1, pak jejich existence by implikovala existenci velikých kardinálních čísel, značně větších než je $\mathbb{R}$ (a tedy na $\mathbb{R}^n$ taková míra existovat nemůže).

Zúží-li se otázka existence jen na míry na $\mathbb{R}$, které jsou invariantní vůči posunutí a míra intervalu je jeho délka, lze ukázat, že taková míra na všech podmnožinách $\mathbb{R}$ neexistuje.

Pokud vezmeme místo spočetné aditivity jen konečnou aditivitu, takové „míry" na $\mathbb{R}$ existují (i na $\mathbb{R}^2$, ale na $\mathbb{R}^3$ už nemusí existovat).

4. Není těžké ukázat, že je-li μ míra na algebře, dá se jednoznačně rozšířit na nejmenší σ-algebru obsahující danou algebru.

Často se toto rozšíření používá v $\mathbb{R}$, kde se za danou algebru berou konečná sjednocení disjunktních intervalů.

Nejmenší σ-algebra obsahující takovouto algebru je systém borelovských množin na $\mathbb{R}$.

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

Systémy množin

1. Příkladem okruhu množin, který není algebrou je systém všech konečných podmnožin nekonečné množiny X. Tento okruh není σ-okruhem.

Systém všech konečných sjednocení intervalů a konečných množin na $\mathbb{R}$ je algebrou, která není σ-algebrou.

Systém všech omezených podmnožin $\mathbb{R}$ je okruh, který není ani σ-okruhem ani algebrou.

Příkladem σ-okruhu množin, který není algebrou je systém všech nejvýše spočetných podmnožin nespočetné množiny X.

2. Důležité příklady okruhů a algeber jsou vytvořeny z otevřených nebo uzavřených podmnožin metrického prostoru.

Systém otevřených množin není okruh (proč?). Nejmenší σ-okruh obsahující všechny otevřené množiny je algebra a nazývá se systém borelovských množin.

Míra

3. Ukažte (pro libovolnou neprázdnou X), že následující funkce definované na všech podmnožinách X, jsou mírami:

1. $\mu(A) = 0$ pro všechna $A \subset X$;

2. funkce rovna 0 na $\emptyset$ a nekonečnu na neprázdných množinách.

4. Ukažte, že funkce, přiřazující podmnožině X počet jejích prvků (nekonečno, je-li podmnožina nekonečná), je míra. Tato míra je obzvláště důležitá na $\mathbb{N}$ a nazývá se *čítací* nebo *aritmetická míra*.

Zobecněná aritmetická míra na libovolné množině se zadává specifikováním nejvýše spočetné množiny C a přiřazením každému bodu $c \in C$ nezáporné číslo p_c (např. $p_c = 1$). Pak se definuje $\mu(A) = \sum\{p_c; c \in C \cap A\}$.

5. Diracova míra je funkce, která má hodnotu 1 na množinách obsahující předem daný bod a 0 jinde. Je to míra?

6. *Hausdorffova míra*. Nechť $s > 0$ a X je separabilní metrický prostor (např. euklidovský prostor). Označí se pro $\delta > 0$ a $A \subset X$

$$H^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{i\in I}(\operatorname{diam}(U_i))^s; \{U_i\} \text{ je spočetné pokrytí } A, \operatorname{diam}(U_i) \le \delta\}\,,$$

$$H^s(A) = \sup\{H^s_\delta(A); \delta > 0\}\,.$$

(Zřejmě je $H^s_\delta(A) \le H^s_\gamma(A)$ pro $0 < \gamma < \delta$ a tedy lze místo sup psát $\lim_{\delta\to 0_+}$.)

Funkce $H^s(A)$ je mírou na borelovských množinách v X, která se nazývá s-tou Hausdorffovou mírou.

Protože pro $s < t$ je $H^t_\delta(A) \le \delta^{t-s} H^s_\delta(A)$, existuje nezáporné číslo r (může být i $+\infty$) tak, že $H^s(A) = 0$ pro $s > r$ a $H^s(A) = \infty$ pro $0 < s < r$ (pokud taková s existují). Toto číslo r se nazývá *Hausdorffova dimenze* množiny A (značení $\dim_H A$).

Pro podmnožiny $A \subset \mathbb{R}^n$ mající neprázdný vnitřek je $\dim_H A = n$. Podmnožiny euklidovských prostorů majícím za tuto dimenzi necelé číslo, jsou blízké tzv. fraktálům. Např. Cantorova množina na $\mathbb{R}$ má Hausdorffovu dimenzi rovnu $\log 2/\log 3$.

7. V *Poznámce 4* lze vzít za μ délku intervalů a vznikne míra na borelovských množinách v $\mathbb{R}$. Zúplnění této míry se nazývá *Lebesgueova míra*.

Tento postup lze zobecnit následovně. Nechť F je spojitá neklesající funkce na $\mathbb{R}$. Pak se pro interval $A = (a, b)$ definuje $\mu_F(A) = F(b) - F(a)$. Zúplnění vzniklé míry na borelovských množinách se nazývá *Lebesgueova–Stieltjesova míra*. (Lze brát funkce jen zprava spojité, ale pak se musí startovat s intervaly typu $(a, b]$ – takto lze získat Diracovu míru). Funkce F bývá tzv. distribuční funkce jisté pravděpodobnosti.

Jaká funkce F (zprava spojitá) vytváří Diracovu míru umístěnou v bodě $a \in \mathbb{R}$?

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

Systémy množin

1. Ukažte, že okruh podmnožin X je algebrou právě když obsahuje X. Dále ukažte, že každý okruh je uzavřený i na konečné průniky (a σ-okruh na spočetné průniky).

2. Jaký je nejmenší možný okruh (algebra, σ-okruh, σ-algebra) podmnožin X? A největší?

3. Nejmenší σ-algebra obsahující daný systém $\mathcal{S}_0$ podmnožin X je sjednocení $\bigcup\{\mathcal{S}_\alpha; \alpha < \omega_1\}$, kde $\mathcal{S}_\alpha$ se skládá ze spočetných sjednocení ¨množin ze všech $\mathcal{S}_\beta, \beta < \alpha$ a jejich doplňků.

4. Ukažte, že soustava borelovských množin na $\mathbb{R}$ má mohutnost 2^ω, tj. stejnou jako je mohutnost $\mathbb{R}$. (Uvědomte si, že každý otevřený interval je sjednocenim spočetně mnoha intervalů s racionálními konci).

Odtud vyplývá, že soustava borelovských množin na $\mathbb{R}$ není úplná vzhledem k Lebesgueově míře λ, protože $\lambda(C) = 0$ pro Cantorovu množinu (ukažte to) a ta má mohutnost 2^ω. Mohutnost soustavy všech jejích podmnožin má proto mohutnost 2^{2^ω} a tedy větší než 2^ω.

5. Najděte klesající posloupnost neomezených intervalů na $\mathbb{R}$ takovou, že neplatí rovnost $\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_n \mu(A_n)$, kde hodnota μ na intervalu je jeho délka.

6. Ukažte, že je-li μ míra na $\mathcal{S}$, platí pro $A, B \in \mathcal{S}$

$$A \subset B \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \qquad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)\,.$$

7. Dokažte Pozorování o algebrách množin.

8. Dokažte Pozorování o vlastnostech míry.

9. Dokažte Pozorování o jednoznačnosti míry na zúplnění.

10. Pomocí *Poznámky* 1 dokažte, že konečně aditivní nezáporná funkce na σ-algebře podmnožin X je míra právě když je spojitá a má hodnotu 0 na nulové funkci. (Spojitostí se tu míní zachovávání konvergence posloupností.)

Konec otázek 1.

Cvičení 1: Příklad. Nechť X je nespočetná množina. Označme $\mathfrak{M}$ systém všech spočetných a kospočetných podmnožin X. Definujme množinovou funkci $\mu : \mathfrak{M} \to \{0, 1\}$ takto

$$\mu(E) = 0,$$

pokud E je spočetná a

$$\mu(E) = 1,$$

pokud E je kospočetná. Dokažte, že $\mathfrak{M}$ je σ-algebra a μ je míra.

Spočetná a kospočetná je jako líbá a kolíbá. Není to ani trochu podobné.

Řešení. Nejprve dokažme, že $\mathfrak{M}$ je σ-algebra.

Podle definice máme ověřit, že

1) $\mathfrak{M}$ obsahuje prázdnou množinu: to je pravda, neboť $\emptyset$ považujeme za spočetnou.

2) $\mathfrak{M}$ je uzavřená na doplňky: to je také pravda, protože pro A spočetnou je A^c kospočetná a pro A kospočetnou je A^c spočetná.

3) $A_n \in \mathfrak{M},\ n = 1, 2, \ldots$ implikuje $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}$: pokud jsou všechny A_n spočetné, stačí si vzpomenout, že spočetné sjednocení spočetných množin je množina spočetná. Pokud je aspoň jedna z množin A_n kospočetná, pak je zřejmě i sjednocení kospočetná množina.

Zbývá ukázat, že μ je míra.

Ověřme tedy, že platí

1) $\mu(\emptyset) = 0$: to je jasné (řekli jsme, že prázdná množina je spočetná).

2) spočetná aditivita: zde stačí odkázat na bod 3) a definici μ.

Tím je důkaz hotov.

IMHO, něco bylo triviální.

Konec cvičení 1.

Učení 1:

Ve Cvičení 1 jsme nepoužili, že X je nespočetná množina?

Kde nula nebo nulák kraluje, tam se elektrikáři radují.

Hodí se na něco taková míra?

Konec učení 1.

Submíra

V této části bude uveden jiný způsob rozšíření míry, který v přirozených situacích vede opět ke zúplnění. Nejdříve se μ rozšíří na všechny podmnožiny X, ale nelze očekávat, že takovéto rozšíření bude mírou (bude nutné oslabit σ-aditivitu). Potom se vezme maximální σ-algebra, na které je toto rozšíření mírou.

My matematici jsme prostě kouzelní.

DEFINICE. Submíra na množině X je zobrazení $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mající vlastnosti

1. $\nu(\emptyset) = 0$;
2. $\nu(A) \le \nu(B)$ pro $A \subset B \subset X$;
3. $\nu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$, jakmile $\{A_n\}$ je posloupnost podmnožin X.

Jdeme na to nejdřív zevnitř.

VĚTA. Pro míru μ na σ-algebře $\mathcal{S}$ na X je následující funkce μ^* submíra:

$$\mu^*(P) = \inf\{\mu(A); A \in \mathcal{S}, P \subset A\}\,.$$

A hned pak z vnějšku.

Důkaz. Jedině důkaz subaditivity může být méně snadný. Nechť $P = \bigcup P_n$ a $\varepsilon > 0$. Pro každé n se najde $A_n \in \mathcal{S}$ tak, že $P_n \subset A_n$ a $\mu(A_n) < \mu^*(P_n) + \varepsilon/2^n$. Potom

$$\mu^*(P) \le \mu(\bigcup A_n) \le \sum \mu(A_n) < \sum \mu^*(P_n) + \varepsilon\,,$$

což dokazuje subaditivitu μ^*. $\diamond$

Uvedená submíra je μ^* *generovaná mírou* μ a nazývá se vnější submíra míry μ.

Je to jako obrovský trpaslík.

DEFINICE. Nechť ν je submíra na X. Podmnožina $A \subset X$ se nazývá ν-měřitelná, pokud pro libovolné $P \subset X$ platí

$$\nu(P) = \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) .$$

VĚTA. Nechť ν je submíra na X.

- Systém $\mathcal{M}$ všech ν-měřitelných množin je σ-algebra na X a zúžení $\overline{\nu}$ submíry ν na $\mathcal{M}$ je úplná míra.
- Je-li submíra ν generovaná mírou μ definovanou na $\mathcal{S}$, pak $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ a zúžení ν na $\mathcal{S}$ je rovno μ.

Důkaz.

$\diamond$

Je-li $(X, \mathcal{M}, \overline{\nu})$ vytvořeno z vnější submíry μ^* míry μ, značí se jako $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ a nazývá se *Carathéodoryho rozšíření* prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Následující pozorování ukazuje jednoznačnost předchozího rozšíření v případě tzv. σ-konečné míry, která je definována požadavkem $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, kde $\mu(X_n) < \infty$ pro každé n.

V důkazu použijte nejdříve předpoklad $\mu(X) < \infty$ a rovnost $\overline{\nu}(A) + \overline{\nu}(X \setminus A) = \widetilde{\mu}(A) + \widetilde{\nu}(X \setminus A)$.

POZOROVÁNÍ. Je-li $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ Carathéodoryho rozšíření σ-konečného prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $\widetilde{\mu}$ je míra na $\mathcal{M}$, která rozšiřuje μ, pak $\widetilde{\mu} = \overline{\mu}$.

Jak souvisí Carathéodoryho rozšíření se zúplněním z předchozí části? Odpověď bude dána opět pro σ-konečné míry.

VĚTA. Carathéodoryho rozšíření σ-konečného prostoru je jeho zúplnění.

Důkaz. Protože Carathéodoryho rozšíření je úplné, stačí dokázat, že každá množina $P \in \mathcal{M}$ se dá napsat jako sjednocení množiny z $\mathcal{S}$ a podmnožiny nulové množiny z $\mathcal{S}$. Vzhledem k σ konečnosti μ lze předpokládat, že $\overline{\mu}(P) < \infty$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $A_n \in \mathcal{S}, A_n \supset P$, tak, že $\mu(A_n) < \overline{\mu}(P) + 1/n$.

Pak $A = \bigcap A_n \in \mathcal{S}, A \supset P$ a $\overline{\mu}(P) = \mu(A)$. Ze stejného důvodu lze nalézt $N \in \mathcal{S}$ takové, že $N \supset A \setminus P, \mu(N) = 0$.

Odtud již plyne $P = (P \cap N) \cup (A \setminus N)$. $\diamond$

Poznámky 2:

1. Z předchozí části víte, že míra je spojitá funkce na uzavřeném podokruhu okruhu 2^X. Navíc v jistém smyslu zachovává vztah mezi algebraickými operacemi (vyjádření suprema dvou prvků pomocí jejich součtu a součinu).

V *Otázkách* je uveden vztah submíry ke spojitosti. Vnější submíra μ^* pro míru μ je spojitá a je to spojité rozšíření μ na celé 2^X, které výše zmíněné zachovávání vztahu algebraických operací oslabuje na nerovnost. Vzhledem ke spojitosti je obor konečných hodnot vnější submíry nějaký interval.

Soustava měřitelných množin je pak největší podmnožina 2^X, na které je ona nerovnost rovností. Příslušné tvrzení říká, že tato největší podmnožina je opět uzavřený podokruh.

Celá teorie míry lze dělat na Booleových algebrách, což jsou okruhy (obecně nikoli množinové) s největším prvkem (tedy algebry), jejichž násobení je idempotentní (pak kždý prvek je svým inverzním prvkem vzhledem ke sčítání).

2. Kdyby se v definici vnější submíry míry μ definovalo duálně

$$\mu_*(P) = \sup\{\mu(A); A \in \mathcal{S}, P \supset A\},$$

dostane se tzv. *vnitřní supmíra* (lépe: nadmíra, jako submíra by se mohla nazývat podmíra). Pro ni místo subaditivity platí supaditivita, tj. $\mu_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A_n)$, jakmile $\{A_n\}$ je posloupnost disjunktních podmnožin X.

Dá se ukázat, že na σ-konečných prostorech je Carathéodoryho rozšíření určeno vztahem $\overline{\mathcal{S}} = \{P \subset X; \mu_*(P) = \mu^*(P)\}$ (potom $\overline{\mu}(P) = \mu_*(P) = \mu^*(P)$). (POZOR NA ∞!)

3. Submíra ν definovaná na všech podmnožinách metrického prostoru (X, d) se nazývá metrická submíra, jestliže $\nu(A \cup B = \nu(A) + \nu(B)$ jakmile $d(A, B) > 0$.

Vnější submíra na $\mathbb{R}$ pro libovolnou Lebesgueovu–Stieltjesovu míru μ_F je metrická.

Dá se ukázat, že submíra definovaná na všech podmnožinách metrického prostoru X je metrická právě když každá borelovská množina je měřitelná. (Zkuste to dokázat.)

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Je-li F Cantorova funkce (tzv. ďábelské schodiště)na $[0, 1]$, jakou má hodnotu μ_F na Cantorové množině? [1]. A jakou má hodnotu Lebesgueova míra na Cantorově množině? [0].

2. Diracova míra na metrickém prostoru je metrická. Jaká je její vnější submíra?

3. Hausdorffova s-dimenzionální funkce H^s je submíra.

4. Hausdorffova s-dimenzionální submíra H^s je metrická.

Konec příkladů 2.

Otázky 2:

1. Ukažte, že konečně aditivní míra na nějaké σ-algebře je již spočetně aditivní (a tedy míra).

2. Ukažte, že je-li ν konečně subaditivní submíra, která je spojitá, je již spočetně subaditivní (a tedy submíra).

Najděte příklad konečně aditivní submíry, která není spojitá.

3. Vnější submíra vytvořená nějakou mírou je spojitá.

4. Jaké hodnoty má vnější submíra vytvořená mírou mající jen hodnotu 0 na $\emptyset$ a ∞ na X? Je tato míra σ-aditivní?

Jak vypadá Carathéodoryho rozšíření této míry?

5. Ukažte, že vnější submíra na $\mathbb{R}$ pro libovolnou Lebesgueovu–Stieltjesovu míru je metrická.

Konec otázek 2.

Cvičení 2: Příklad. Na množině $\mathbb{R}$ mějme algebru $\mathcal{A}$ generovanou systémem všech intervalů. Definujme množinovou funkci $\mu : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ takto

$$\mu(A) = 1,$$

pokud A obsahuje pravé prstencové okolí nuly a

$$\mu(A) = 0,$$

jinak. Dokažte, že μ je aditivní, ale není spočetně aditivní.

Řešení. Pro důkaz aditivity uvažujme disjunktní množiny $M, N \in \mathcal{A}$.

Neobsahuje-li žádná z nich pravé prstencové okolí nuly, neobsahuje ani $M \cup N$ pravé prstencové okolí nuly.

Tedy $\mu(M) = 0, \mu(N) = 0, \mu(M \cup N) = 0$, a proto

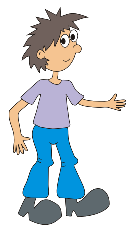
$$\mu(M) + \mu(N) = \mu(M \cup N).$$

Obsahuje-li jedna z množin M, N pravé prstencové okolí nuly (nechť je to M), pak i sjednocení obsahuje pravé prstencové okolí nuly.
Tedy $\mu(M) = 1, \mu(N) = 0, \mu(M \cup N) = 1$, a proto

$$\mu(M) + \mu(N) = \mu(M \cup N).$$

Abychom ukázali, že funkce μ není spočetně aditivní, definujme množiny

$$A_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$



A je to jasné. Vidím všechno.

Potom

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 2) \in \mathcal{A}.$$

Jelikož ale

$$\mu(A_n) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

a

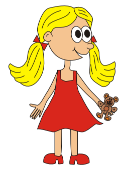
$$\mu(0, 2) = 1$$

dostáváme

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Funkce μ tedy není spočetně aditivní.

Rád se předvádím.



Já se taky ráda předvádím.

Konec cvičení 2.

Učení 2:

Množiny A_n ve Cvičení 2 ale nebyly disjunktní. Opravdu jsme dokázali, že funkce μ není spočetně aditivní?

A kdyby funkce μ byla spočetně aditivní, byla by pak mírou?

Kdyby.

Konec učení 2.

Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$

V této části bude $X = \mathbb{R}$.

Jak již bylo zmíněno, abstraktní definice míry nemůže obsahovat požadavek, aby posunutí množiny neměnilo hodnotu míry.

Pro euklidovské prostory je tento požadavek zcela přirozený (pokud se jedná o geometrický pohled).

Navíc je tu další požadavek, aby míra intervalu byla jeho délka a míra bodu byla 0.

Nechť μ je úplná míra (pokud existuje) na nějaké σ-algebře $\mathcal{M}$ na $\mathbb{R}$, která vyhovuje oběma předchozím požadavkům.

Systém všech konečných sjednocení intervalů a konečných množin je algebra $\mathcal{S}$ a každé takovéto sjednocení lze vyjádřit jako konečné sjednocení disjunktních intervalů a konečné množiny.

Odtud plynou hodnoty μ na $\mathcal{S}$ (součet délek těchto disjunktních intervalů).

Dalším krokem je zjištění hodnot μ na σ-algebře $\mathcal{B}$ borelovských množin. Algebra $\mathcal{B}$ se konstruuje transfinitní indukcí: k $\mathcal{S}$ se přidají všechna spočetná sjednocení prvků $\mathcal{S}$ a jejich doplňky, k získanému systému se opět přidají všechna spočetná sjednocení prvků nového systému a jejich doplňky. Pokračuje se až do kroku ω_1, kde se postup zastaví.

Je velmi snadné si uvědomit, že přidávaná spočetná sjednocení mohou být brána jako spočetná sjednocení disjunktních množin. Z toho vyplývá, že μ má hodnoty na množinách z $\mathcal{B}$ opět jednoznačné dány. Tedy (podle předchozí části) je má jednoznačně dány i na zúplnění $(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}}, \mu)$.

Stejný výsledek se dostane použitím zúplnění $(\mathcal{S}, \mu)$). Dá se ukázat, že toto zúplnění už je rovno $\mathcal{M}$. Prvky $\mathcal{M}$ se nazývají lebesgueovsky měřitelné množiny. Míra μ na $\mathcal{M}$ se nazývá Lebesgueova míra.

Teď to hlavní, co jde dokázat.

VĚTA.

1. Lesgueova míra λ je σ-konečná.
2. Pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu P a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \supset P$ tak, že $\lambda(G \setminus P) < \varepsilon$. Je-li navíc P omezená, existuje kompaktní množina $C \subset P$ tak, že $\lambda(P \setminus C) < \varepsilon$.
3. Existuje lebesgueovsky měřitelná množina, která není borelovská.
4. Existuje podmnožina $\mathbb{R}$, která není lebesgueovsky měřitelná.

A víc asi ani nejde vymyslet.

Důkaz. Důkaz bodu 1 je zřejmý, bod 3 byl dokázán v *Otázce 1.4*, bod 4 v *Otázce 3.5*. Zbývá dokázat bod 2.

Z důkazu věty o vztahu zúplnění a Carathéodoryho rozšíření vyplývá, že pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu P existuje borelovská množina $B \supset P$ taková, že $\lambda P = \lambda B$.

Nyní se pomocí konstrukce borelovských množin (a vlastnosti dobře uspořádaných množin) ukáže, že pro každou borelovskou množinu B platí $\lambda(B) = \inf\{\lambda(G); G \supset B, G \text{ otevřená}\}$. Druhá část bodu 2 se dokáže z první části pomocí doplňku v nějakém větším intervalu. $\diamond$

Poznámky 3:

Dá se dokázat, že lebesgueovsky měřitelné množiny tvoří největší σ-algebru na které existuje míra invariantní vůči posunutí a mající za hodnoty intervalů jejich délky. Taková míra je navíc jediná.

Jestliže se v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ začne s okruhem konečných sjednocení intervalů a konečných množin a zvolí se pro interval J za $\lambda_n(J)$ jeho objem, dostane se postupným rozšiřováním (jako u Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}$) n-rozměrná Lebesgueova míra λ_n na $\mathbb{R}^n$. Platí pro ni obdobná tvrzení jako pro $n = 1$.

Příklad lebesgueovsky neměřitelné množiny v *Otázkách* lze zobecnit i na lebesgueovskou–stieltjesovskou neměřitelnost pro spojité neklesající nekonstantní funkce F.

Existují však omezené neklesající nekonstantní funkce F takové, že každá podmnožina $\mathbb{R}$ je měřitelná pro příslušnou σ-algebru vytvořenou pomocí F (např. F vytvářející Diracovu míru).

Konec poznámek 3.

Otázky 3:

V této části bude λ značit Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}$.

1. Uvědomte si, jakou hodnotu má λ na množině racionálních čísel a jakou na množině iracionálních čísel (třeba na intervalu $[0, 1]$).

Znáte nespočetnou množinu, která má Lebesgueovu míru 0?

Jó, jednou náš kantor . . .

2. Protože lebesgueovsky měřitelné množiny s Lebesgueovou mírou tvoří zúplnění borelovských množin, existují pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu P borelovské množiny $A \subset P \subset B$ tak, že $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Ukažte, že A lze sestrojit jako spočetné sjednocení uzavřených množin (takovéto množiny se nazývají F_σ-množiny), a B jako průnik spočetného systému otevřených množin (takovéto množiny se nazývají G_δ-množiny).

3. Ukažte, že $\mathbb{R}$ lze napsat jako sjednocení dvou množin, z nichž jedna má Lebesgueovu míru 0 a druhá je 1.kategorie. (A tedy prostor veliký jak z hlediska míry tak z hlediska metriky je sjednocením dvou malých množin, každá ale z jiného hlediska.)

4. Je-li $\lambda(P) > 0$, je $\{x - y; x, y \in P\}$ okolím 0.

Pro důkaz vezměte nejdříve (podle bodu 2) uzavřenou množinu $F \subset P$ s $\lambda(F) > 0$ (takovou F lze vzít omezenou) a nějaké otevřené okolí $G \supset F$ s mírou $\lambda(G) < 4/3\,\lambda(F)$ (G lze najít jako sjednocení konečně mnoha otevřených intervalů J_n).

Existuje n tak, že $\lambda(F \cap J_n) > 3/4\,\lambda(J_n)$. Interval $(-\lambda(J_n)/2, \lambda(J_n)/2)$ je obsažen v $\{x - y; x, y \in P\}$.

5. Sestrojte podmnožinu $\mathbb{R}$, která není lebesgueovsky měřitelná:

Na $\mathbb{R}$ se definuje ekvivalence $t \sim s$ vztahem $t - s$ je racionální. Vyberte z každé třídy ekvivalence jeden prvek – tyto prvky tvoří nespočetnou množinu P.

Její posunutí o racionální čísla tvoří disjunktní množiny pokrývající $\mathbb{R}$, a tedy $\lambda(P) > 0$, pokud je P měřitelná. Z předchozího bodu 4 dostanete spor.

Konec otázek 3.

Měřitelná zobrazení

Tak jako se definovala spojitá zobrazení mezi metrickými prostory, je potřebné definovat vhodná zobrazení mezi měřitelnými prostory.

Zobrazení mezi strukturami musí v nějakém smyslu zachovávat strukturu.

V metrických prostorech to bylo zachovávání konvergence, nebo inverzní zachovávání otevřených množin.

V měřitelných prostorech je situace podobná jako v metrických prostorech, uvažují-li se soustavy měřitelných množin, resp. soustavy otevřených množin. Pak se již snadno usoudí, že následující definice je právě ta vhodná.

DEFINICE. Zobrazení $f : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{M})$ se nazývá měřitelné zobrazení, jestliže $f^{-1}(M) \in \mathcal{S}$ pro každé $M \in \mathcal{M}$.

Měřitelná zobrazení tu nebudou studována v plné obecnosti. Vzhledem k použití se v dalším textu výklad zúží na reálné měřitelné funkce, tj. měřitelná zobrazení $(X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{M})$, kde $\mathcal{M}$ je soustava všech lebesgueovsky měřitelných množin.

POZOROVÁNÍ.

- Součet, součin, podíl, maximum a minimum měřitelných funkcí jsou opět měřitelné funkce.
- Je-li $\{f_n\}$ posloupnost měřitelných funkcí, jsou i $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ (a tedy i $\lim f_n$, existuje-li) měřitelné funkce.

Jednoduchá funkce je funkce, jejíž obor hodnot je konečná množina. Je to tedy lineární kombinace konečně mnoha charakteristických funkcí a může se značit jako konečný součet $\sum \alpha_i \chi_{A_i}$, kde χ_A je charakteristická funkce množiny A, tj. má hodnotu 1 na A a 0 jinde.

POZOROVÁNÍ.

1. Jednoduchá funkce $\sum \alpha_i \chi_{A_i}$ je měřitelná právě když jsou množiny A_i měřitelné.
2. Každá nezáporná měřitelná funkce je limitou rostoucí posloupnosti jednoduchých funkcí.
3. Každá měřitelná funkce je limitou posloupnosti jednoduchých jednoduchých funkcí.

Pro důkaz druhého tvrzení rozdělte v n-tém kroku obor hodnot $[0, \infty)$ na malé intervalky v $[0, n]$ a na interval $[n, \infty)$, vezměte charakteristické funkce vzorů těchto intervalů a jejich vhodné lineární kombinace. V důkazu třetího tvrzení využijte vztah $f = f_+ - f_-$.

Integrál

V této části budou opět zkoumána jen měřitelná zobrazení $(X, \mathcal{S}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$, kde $\mathcal{M}$ je soustava všech lebesgueovsky měřitelných množin a λ je Lebesgueova míra.

Navíc se bude předpokládat, že všechny používané míry jsou σ-konečné.

Následující definice souhlasí s integrací reálných funkcí na intervalech.

DEFINICE. Pro jednoduchou funkci $f = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ se definuje její integrál vztahem

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i)\,.$$

Snadno se ukáže, že definice nezávisí na volbě vyjádření jednoduché funkce, že integrál je na jednoduchých funkcích lineární a zachovává nerovnosti.

Pro obecnější funkce se použije jejich vyjádření pomocí jednoduchých funkcí:

DEFINICE.

1. Nechť f je měřitelná nezáporná funkce. Pak se definuje její integrál rovností

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup\left\{ \int g \, \mathrm{d}\mu; g \le f \text{ je jednoduchá funkce} \right\}.$$

2. Nechť f je měřitelná funkce. Pak se definuje její integrál rovností

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int f_- \, \mathrm{d}\mu\,.$$

3. Je-li $a \in \mathcal{S}$ a f je měřitelná funkce. Pak se definuje její integrál na množině A rovností

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int f \chi_A \, \mathrm{d}\mu\,.$$

Pokud je $\int f \, \mathrm{d}\mu$ konečný, nazývá se f integrovatelná a říká se, že integrál z f konverguje.

Integrál má obvyklé vlastnosti, které se snadno dokáží:

POZOROVÁNÍ.

1. Integrál je lineární.
2. Integrál zachovává nerovnosti mezi funkcemi.
3. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ konverguje pokud je $\mu(A)$ konečná a f omezená měřitelná.
4. $\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu$.
5. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ konverguje právě když $\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu$ konverguje.
6. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$ pokud je $\mu(A) = 0$.
7. Je-li $\{f_n\}$ monotónní posloupnost měřitelných funkcí, je $\int \lim f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \, \mathrm{d}\mu$.

Jestliže $(X, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$, pak právě zkonstruovaný integrál je totožný s dříve popsaným (L)-integrálem.

Na začátku této kapitoly byla míra popisována jako integrál z charakteristických funkcí.
Je zřejmé, že pro $A \in \mathcal{S}$ je $\mu(A) = \int \chi_A \, d\mu = \int_A 1 \, d\mu$.

Co když se místo konstantní funkce 1 vezme jiná funkce? Dostane se míra?

Je zřejmě nutné vzít nezápornou funkci.
Důkaz následujícího tvrzení není těžký.

VĚTA. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce a pro $A \in \mathcal{S}$ se definuje $\nu_f(A) = \int_A f \, d\mu$. Pak ν_f je míra na $\mathcal{S}$.

Vztah mezi takto získanou mírou a původní mírou vyjadřuje následující věta.

VĚTA. Míra ν na $\mathcal{S}$ lze vyjádřit jako $\nu_f(A) = \int_A f \, d\mu$ pro nějakou nezápornou μ-měřitelnou funkci f právě když platí

$$A \in \mathcal{S}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0\,.$$

Míra ν na $\mathcal{S}$ s vlastností z předchozí věty se nazývá *absolutně spojitá vzhledem k* μ. Předchozí věta se nazývá Radonova–Nikodýmova věta a její důkaz je složitější.

Poznámky 4:

Je možné zkoumat i „reálné" funkce s hodnotami $\pm\infty$. Většinou se však požaduje, aby míra množiny bodů, kde taková funkce nabývá navlastních hodnot, byla nulová.

Stejně tak lze zkoumat funkce definované „skoro všude", tj. všude s výjimkou nulové množiny. Ať dodefinujete takovou funkci v chybějících bodech jakkoli, na měřitelnosti zobrazení ani na hodnotě integrálu se nic nezmění. Můžete i změnit hodnoty funkce na nulové množině.

Věty Jegorova a Lusina, uvedené v *Otázkách*, lze vyslovit obecněji. Podle předchozích odstavců lze brát funkce i s nevlastními hodnotami. Lusinovu větu lze dokázat i pro funkce na metrických lokálně kompaktních prostorech.

Pokud je vhodné označit proměnnou, podle které se integruje (např. závisí-li f na více proměnných), píše se např. $\int f(x, y) \, d\mu(x)$.

Integrace podle Lebesgueovy–Stieltjesovy míry μ_F se často značí $\int f(x) \, dF(x)$.

Lebesgueův integrál je zobecněním Riemannova integrálu, tj, má-li funkce f na kompaktním intervalu Riemannův integrál, má i Lebesgueův integrál a oba integrály se rovnají. (Zkuste to dokázat.)

Konec poznámek 4.

Příklady 4:

1. Spojité zobrazení mezi metrickými prostory je borelovské.

2. Monotónní reálná funkce na $\mathbb{R}$ je borelovsky měřitelná.

3. Integrace na $\mathbb{N}$ vzhledem k čítací míře μ je totéž jako sčítání řad, tj. $\int f \, d\mu = \sum_n f(n)$. (odtud plynou známé podobnosti např. mezi konvergencí integrálu a řad.)

Konec příkladů 4.

Otázky 4:

1. Ukažte, že zobrazení mezi metrickými prostory je borelovsky měřitelné právě když vzory otevřených množin jsou borelovské.

2. Charakteristická funkce množiny A je měřitelná právě když A je měřitelná.

3. Najděte příklad dvou reálných lebesgueovsky měřitelných funkcí, jejichž složení není lebesgueovsky měřitelné.

4. Najděte příklad prosté reálné lebesgueovsky měřitelné funkce, jejíž inverzní zobrazení není lebesgueovsky měřitelné.

5. Věta Jegorova. Nechť na prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$, kde $\mu(X) < \infty$, konvergují měřitelné reálné funkce f_n bodově k funkci f. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $A \in \mathcal{S}$ s mírou $\mu(A) < \varepsilon$ tak, že konvergence je stejnoměrná na $X \setminus A$.

Návod: Položte $A_n^m = \{x; |f_k(x) - f(x)| < 1/m$ pro každé $k \geq n\}$. Pak pro každé m je $\{A_n^m\}_n$ rostoucí posloupnost množin z $\mathcal{S}$ pokrývající X, takže existuje n_m s vlastností $\mu(X \setminus A_{n_m}^m) < \varepsilon/2^m$. pak $A = \bigcup_m (X \setminus A_{n_m}^m)$ je hledaná množina.

6. Věta Lusinova. Nechť f je lebesgueovsky měřitelná reálná funkce na omezeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje existuje $A \in \mathcal{S}$ s mírou $\mu(A) < \varepsilon$ tak, že zúžení f na $J \setminus A$ je spojité. (Platí opak?)

Návod: Použijte Jegorovovu větu na posloupnost jednoduchých funkcí konvergující k f.

7. Dokažte, podobným způsobem jako v obdobné větě v kapitole o závislosti integrálu na parametru, Lebesgueovu větu o konvergenci:

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí (na σ-konečném prostoru) konvergující skoro všude k f. Jestliže existuje integrovatelná funkce g tak, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ skoro všude, pak $\lim_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$.

Konec otázek 4.

Cvičení 4: Příklad. Nechť $\mathfrak{M}$ je systém podmnožin E intervalu $[0, 1]$, pro než je E buďto spočetná nebo kospočetná. Dokažte, že funkce $g(x) = x$ pro $x \in [0, 1]$ není měřitelná.

Řešení. Měli bychom začít s ověřením, že $\mathfrak{M}$ je σ-algebra.

To jsme ale ukázali ve Cvičení 1.

Chceme-li dokázat neměřitelnost funkce g, musíme podle definice najít Lebesgueovsky měřitelnou množinu $A \subset [0, 1]$ tak, aby $g^{-1}(A) \notin \mathfrak{M}$.

Jinými slovy, aby $g^{-1}(A)$ nebyla spočetná ani kospočetná.

T.j. mými slovy.

Protože funkce g je identita, lze volit například

$$A = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Pak

$$g^{-1}(A) = \left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad [0, 1] \setminus g^{-1}(A) = \{0\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

a vidíme, že ani jedna z těchto množin není spočetná.

Dokázali jsme, že funkce g není měřitelná.

Míra nebyla dána. BTW, míra není Miroslava.

Konec cvičení 4.

STANDARDY z kapitoly

TEORIE MÍRY

Algebra množin

DEFINICE. Nechť X je neprázdná množina. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá algebra, jestliže $\mathcal{S}$ je uzavřená na konečná sjednocení, doplňky a obsahuje $\emptyset$.

Algebra se nazývá σ-algebra, jestliže je uzavřená na spočetná sjednocení.

POZOROVÁNÍ.

1. Každá algebra (resp. σ-algebra) je uzavřená i na konečné (resp. spočetné) průniky a obsahuje X.
2. Průnik algeber (resp. σ-algeber) v X je opět algebra (resp. σ-algebra).
3. Pro každý systém podmnožin X existuje nejmenší algebra (resp. σ-algebra), která tento systém obsahuje.

Míra

DEFINICE. Míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ je zobrazení $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mající vlastnosti

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, jakmile $\{A_n\}$ je posloupnost navzájem disjunktních množin z $\mathcal{S}$.

Poslední vlastnost míry se nazývá σ-aditivita.

POZOROVÁNÍ.

1. Je-li $A, B \in \mathcal{S}$ a $A \subset B$, je $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Je-li $\{A_n\}$ posloupnost z $\mathcal{S}$, je $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
3. Je-li $\{A_n\}$ rostoucí posloupnost z $\mathcal{S}$, je $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.
4. Je-li $\{A_n\}$ klesající posloupnost z $\mathcal{S}$ a $\mu(A_1) < \infty$, je $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

Druhá uvedená vlastnost se nazývá σ-subaditivita, obě poslední vlastnosti vyjadřují jistou spojitost míry.

Trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$, kde $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X a μ je míra na $\mathcal{S}$, se nazývá prostor s mírou (dvojice $(X, \mathcal{S})$ se obvykle nazývá měřitelný prostor).

Tento prostor s mírou (nebo míra samotná) se nazývá pravděpodobnostní, pokud je $\mu(X) = 1$.

Prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se nazývá úplný, pokud platí

$$A \subset B \in \mathcal{S}, \mu(B) = 0, \text{ pak } A \in \mathcal{S}\,.$$

VĚTA. Pro prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se označí $\overline{\mathcal{S}} = \{A \cup N; A \in \mathcal{S}, N \subset B, \mu(B) = 0\}$ a pro $P = A \cup N$ z definice $\overline{\mathcal{S}}$ se definuje $\overline{\mu}(P) = \mu(A)$. Pak $\overline{\mathcal{S}}$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$ a $\overline{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\mathcal{S}}$, která rozšiřuje μ.

Prostor s mírou $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ se nazývá *zúplněním* prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

POZOROVÁNÍ. Je-li $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ zúplnění měřitelného prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $\widetilde{\mu}$ je míra na $\overline{\mathcal{S}}$, která rozšiřuje μ, pak $\widetilde{\mu} = \overline{\mu}$.

Příklad. Ukažte (pro libovolnou neprázdnou X), že následující funkce definované na všech podmnožinách X, jsou mírami:

1. $\mu(A) = 0$ pro všechna $A \subset X$;

2. Funkce rovna 0 na $\emptyset$ a nekonečnu na neprázdných množinách.

3. Funkce, přiřazující podmnožině X počet jejích prvků (nekonečno, je-li podmnožina nekonečná). (Tato míra je obzvláště důležitá na $\mathbb{N}$ a nazývá se *čítací* nebo *aritmetická míra*.)

4. Funkce, která má hodnotu 1 na množinách obsahující předem daný bod a 0 jinde (Diracova míra).

Pokud vezmeme funkci μ délku intervalů, Aproximací vznikne míra na otevřených a uzavřených množinách, následně na borelovských množinách (nejmenší σ-algebra obsahující otevřené množiny) v $\mathbb{R}$. Zúplnění této míry se nazývá *Lebesgueova míra*.

Tento postup lze zobecnit následovně. Nechť F je spojitá neklesající funkce na $\mathbb{R}$. Pak se pro interval $A = (a, b)$ definuje $\mu_F(A) = F(b) - F(a)$. Zúplnění vzniklé míry na borelovských množinách se nazývá *Lebesgueova–Stieltjesova míra*. (Lze brát funkce jen zprava spojité, ale pak se musí startovat s intervaly typu $(a, b]$ – takto lze získat Diracovu míru). Funkce F bývá tzv. distribuční funkce jisté pravděpodobnosti.

Příklad. Jaká funkce F (zprava spojitá) vytváří Diracovu míru umístěnou v bodě $a \in \mathbb{R}$?

Soustava borelovských množin na $\mathbb{R}$ má mohutnost 2^ω, tj. stejnou jako je mohutnost $\mathbb{R}$. (Uvědomte si, že každý otevřený interval je sjednocenim spočetně mnoha intervalů s racionálními konci).

Odtud vyplývá, že soustava borelovských množin na $\mathbb{R}$ není úplná vzhledem k Lebesgueově míře λ, protože $\lambda(C) = 0$ pro Cantorovu množinu (ukažte to) a ta má mohutnost 2^ω. Mohutnost soustavy všech jejích podmnožin má proto mohutnost 2^{2^ω} a tedy větší než 2^ω.

Příklad. Nechť X je nespočetná množina. Označme $\mathfrak{M}$ systém všech spočetných a kospočetných podmnožin X. Definujme množinovou funkci $\mu : \mathfrak{M} \to \{0, 1\}$ takto

$$\mu(E) = 0,$$

pokud E je spočetná a

$$\mu(E) = 1,$$

pokud E je kospočetná. Dokažte, že $\mathfrak{M}$ je σ-algebra a μ je míra.

Řešení. Nejprve dokažme, že $\mathfrak{M}$ je σ-algebra.

Podle definice máme ověřit, že
1) $\mathfrak{M}$ obsahuje prázdnou množinu: to je pravda, neboť $\emptyset$ považujeme za spočetnou.

2) $\mathfrak{M}$ je uzavřená na doplňky: to je také pravda, protože pro A spočetnou je A^c kospočetná a pro A kospočetnou je A^c spočetná.

3) $A_n \in \mathfrak{M},\ n = 1, 2, \ldots$ implikuje $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}$: pokud jsou všechny A_n spočetné, stačí si vzpomenout, že spočetné sjednocení spočetných množin je množina spočetná. Pokud je aspoň jedna z množin A_n kospočetná, pak je zřejmě i sjednocení kospočetná množina.

Zbývá ukázat, že μ je míra.

Ověřme tedy, že platí

1) $\mu(\emptyset) = 0$: to je jasné (řekli jsme, že prázdná množina je spočetná).

2) spočetná aditivita: zde stačí odkázat na bod 3) a definici μ.

Submíra

DEFINICE. Submíra na množině X je zobrazení $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mající vlastnosti

1. $\nu(\emptyset) = 0$;
2. $\nu(A) \le \nu(B)$ pro $A \subset B \subset X$;
3. $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$, jakmile $\{A_n\}$ je posloupnost podmnožin X.

VĚTA. Pro míru μ na σ-algebře $\mathcal{S}$ na X je následující funkce μ^* submíra:

$$\mu^*(P) = \inf\{\mu(A); A \in \mathcal{S}, P \subset A\}.$$

Důkaz. Jedině důkaz subaditivity může být méně snadný. Nechť $P = \bigcup P_n$ a $\varepsilon > 0$. Pro každé n se najde $A_n \in \mathcal{S}$ tak, že $P_n \subset A_n$ a $\mu(A_n) < \mu^*(P_n) + \varepsilon/2^n$. Potom

$$\mu^*(P) \le \mu(\bigcup A_n) \le \sum \mu(A_n) < \sum \mu^*(P_n) + \varepsilon,$$

což dokazuje subaditivitu μ^*. $\diamond$

Uvedená submíra je μ^* *generovaná mírou* μ a nazývá se vnější submíra míry μ.

DEFINICE. Nechť ν je submíra na X. Podmnožina $A \subset X$ se nazývá ν-měřitelná, pokud pro libovolné $P \subset X$ platí

$$\nu(P) = \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A).$$

VĚTA. Nechť ν je submíra na X.

- Systém $\mathcal{M}$ všech ν-měřitelných množin je σ-algebra na X a zúžení $\overline{\nu}$ submíry ν na $\mathcal{M}$ je úplná míra.
- Je-li submíra ν generovaná mírou μ definovanou na $\mathcal{S}$, pak $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ a zúžení ν na $\mathcal{S}$ je rovno μ.

Je-li $(X, \mathcal{M}, \overline{\nu})$ vytvořeno z vnější submíry μ^* míry μ, značí se jako $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ a nazývá se *Carathéodoryho rozšíření* prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

σ-konečná míra je míra, pro kterou platí, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, kde $\mu(X_n) < \infty$ pro každé n.

POZOROVÁNÍ. Je-li $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ Carathéodoryho rozšíření σ-konečného prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $\widetilde{\mu}$ je míra na $\mathcal{M}$, která rozšiřuje μ, pak $\widetilde{\mu} = \overline{\mu}$.

VĚTA. Carathéodoryho rozšíření σ-konečného prostoru je jeho zúplnění.

Příklad. Je-li F Cantorova funkce (tzv. ďábelské schodiště) na $[0, 1]$, jakou má hodnotu μ_F na Cantorové množině? [1]. A jakou má hodnotu Lebesgueova míra na Cantorově množině?[0].

Příklad. Na množině $\mathbb{R}$ mějme algebru $\mathcal{A}$ generovanou systémem všech intervalů. Definujme množinovou funkci $\mu : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ takto

$$\mu(A) = 1,$$

pokud A obsahuje pravé prstencové okolí nuly a

$$\mu(A) = 0,$$

jinak. Dokažte, že μ je aditivní, ale není spočetně aditivní.

Řešení. Pro důkaz aditivity uvažujme disjunktní množiny $M, N \in \mathcal{A}$.

Neobsahuje-li žádná z nich pravé prstencové okolí nuly, neobsahuje ani $M \cup N$ pravé prstencové okolí nuly. Tedy $\mu(M) = 0, \mu(N) = 0, \mu(M \cup N) = 0$, a proto

$$\mu(M) + \mu(N) = \mu(M \cup N).$$

Obsahuje-li jedna z množin M, N pravé prstencové okolí nuly (nechť je to M), pak i sjednocení obsahuje pravé prstencové okolí nuly.

Tedy $\mu(M) = 1, \mu(N) = 0, \mu(M \cup N) = 1$, a proto

$$\mu(M) + \mu(N) = \mu(M \cup N).$$

Abychom ukázali, že funkce μ není spočetně aditivní, definujme množiny

$$A_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Potom

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 2) \in \mathcal{A}.$$

Jelikož ale

$$\mu(A_n) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

a

$$\mu(0, 2) = 1$$

dostáváme

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Funkce μ tedy není spočetně aditivní.

Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$

V této části bude $X = \mathbb{R}$.

Definujme množinovou funkci μ tak, aby míra μ intervalu byla jeho délka a míra bodu byla 0.

Systém všech konečných sjednocení intervalů a konečných množin je algebra $\mathcal{S}$. Každé takovéto sjednocení lze vyjádřit jako konečné sjednocení disjunktních intervalů a konečné množiny.

Odtud plynou hodnoty μ na $\mathcal{S}$ (součet délek těchto disjunktních intervalů).

Dalším krokem je zjištění hodnot μ na σ-algebře $\mathcal{B}$ borelovských množin. Algebra $\mathcal{B}$ se konstruuje transfinitní indukcí: k $\mathcal{S}$ se přidají všechna spočetná sjednocení prvků $\mathcal{S}$ a jejich doplňky, k získanému systému se opět přidají všechna spočetná sjednocení prvků nového systému a jejich doplňky. Pokračuje se až do kroku ω_1, kde se postup zastaví.

Je velmi snadné si uvědomit, že přidávaná spočetná sjednocení mohou být brána jako spočetná sjednocení disjunktních množin. Z toho vyplývá, že μ má hodnoty na množinách z $\mathcal{B}$ opět jednoznačné dány. Tedy (podle předchozí části) je má jednoznačně dány i na zúplnění $(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}}, \mu)$.

Místo $(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}}, \mu)$ budeme psát $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$. Prvky $\mathcal{M}$ se nazývají lebesgueovsky měřitelné množiny. Míra λ na $\mathcal{M}$ se nazývá Lebesgueova míra.

VĚTA.

1. Lesgueova míra λ je σ-konečná.

2. Pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu P a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \supset P$ tak, že $\lambda(G \setminus P) < \varepsilon$. Je-li navíc P omezená, existuje kompaktní množina $C \subset P$ tak, že $\lambda(P \setminus C) < \varepsilon$.

3. Existuje lebesgueovsky měřitelná množina, která není borelovská.

4. Existuje podmnožina $\mathbb{R}$, která není lebesgueovsky měřitelná.

Příklad. Jakou hodnotu má λ na množině racionálních čísel a jakou na množině iracionálních čísel (třeba na intervalu $[0, 1]$)?

Příklad. Najděte nespočetnou množinu, která má Lebesgueovu míru 0?

Lebesgueovsky měřitelné množiny s Lebesgueovou mírou tvoří zúplnění borelovských množin, proto existují pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu P borelovské množiny $A \subset P \subset B$ tak, že $\lambda(A) = \lambda(B)$.

A lze sestrojit jako spočetné sjednocení uzavřených množin (takovéto množiny se nazývají F_σ-množiny), a B jako průnik spočetného systému otevřených množin (takovéto množiny se nazývají G_δ-množiny).

Příklad. Sestrojte podmnožinu $\mathbb{R}$, která není lebesgueovsky měřitelná.

Řešení. Na $\mathbb{R}$ se definuje ekvivalence $t \sim s$ vztahem $t - s$ je racionální. Vybereme z každé třídy ekvivalence jeden prvek – tyto prvky tvoří nespočetnou množinu P, která není měřitelná.

Měřitelná zobrazení

DEFINICE. Zobrazení $f : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{M})$ se nazývá měřitelné zobrazení, jestliže $f^{-1}(M) \in \mathcal{S}$ pro každé $M \in \mathcal{M}$.

Měřitelná zobrazení tu nebudou studována v plné obecnosti. Vzhledem k použití se v dalším textu výklad zúží na reálné měřitelné funkce, tj. měřitelná zobrazení $(X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{M})$, kde $\mathcal{M}$ je soustava všech lebesgueovsky měřitelných množin.

POZOROVÁNÍ.

- Součet, součin, podíl, maximum a minimum měřitelných funkcí jsou opět měřitelné funkce.
- Je-li $\{f_n\}$ posloupnost měřitelných funkcí, jsou i $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ (a tedy i $\lim f_n$, existuje-li) měřitelné funkce.

Jednoduchá funkce je funkce, jejíž obor hodnot je konečná množina. Je to tedy lineární kombinace konečně mnoha charakteristických funkcí a může se značit jako konečný součet $\sum \alpha_i \chi_{A_i}$, kde χ_A je charakteristická funkce množiny A, tj. má hodnotu 1 na A a 0 jinde.

POZOROVÁNÍ.

1. Jednoduchá funkce $\sum \alpha_i \chi_{A_i}$ je měřitelná právě když jsou množiny A_i měřitelné.

2. Každá nezáporná měřitelná funkce je limitou rostoucí posloupnosti jednoduchých funkcí.

3. Každá měřitelná funkce je limitou posloupnosti jednoduchých jednoduchých funkcí.

Pro důkaz druhého tvrzení rozdělte v n-tém kroku obor hodnot $[0, \infty)$ na malé intervalky v $[0, n]$ a na interval $[n, \infty)$, vezměte charakteristické funkce vzorů těchto intervalů a jejich vhodné lineární kombinace. V důkazu třetího tvrzení využijte vztah $f = f_+ - f_-$.

Integrál

V této části budou opět zkoumána jen měřitelná zobrazení $(X, \mathcal{S}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$, kde $\mathcal{M}$ je soustava všech lebesgueovsky měřitelných množin a λ je Lebesgueova míra.

Navíc se bude předpokládat, že všechny používané míry jsou σ-konečné.

DEFINICE. Pro jednoduchou funkci $f = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ se definuje její integrál vztahem

$$\int f \, d\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i)\,.$$

Pro obecnější funkce se použije jejich vyjádření pomocí jednoduchých funkcí:

DEFINICE.

1. Nechť f je měřitelná nezáporná funkce. Pak se definuje její integrál rovností

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int g \, d\mu; g \le f \text{ je jednoduchá funkce} \right\}.$$

2. Nechť f je měřitelná funkce. Pak se definuje její integrál rovností

$$\int f \, d\mu = \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu\,.$$

3. Je-li $a \in \mathcal{S}$ a f je měřitelná funkce. Pak se definuje její integrál na množině A rovností

$$\int_A f \, d\mu = \int f \chi_A \, d\mu\,.$$

Pokud je $\int f \, d\mu$ konečný, nazývá se f integrovatelná a říká se, že integrál z f konverguje.

POZOROVÁNÍ.

1. Integrál je lineární.
2. Integrál zachovává nerovnosti mezi funkcemi.
3. $\int_A f \, d\mu$ konverguje pokud je $\mu(A)$ konečná a f omezená měřitelná.
4. $\left| \int_A f \, d\mu \right| \le \int_A |f| \, d\mu$.
5. $\int_A f \, d\mu$ konverguje právě když $\int_A |f| \, d\mu$ konverguje.
6. $\int_A f \, d\mu = 0$ pokud je $\mu(A) = 0$.
7. Je-li $\{f_n\}$ monotónní posloupnost měřitelných funkcí, je $\int \lim f_n \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$.

Jestliže $(X, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$, pak právě zkonstruovaný integrál je totožný s dříve popsaným (L)-integrálem.

Je zřejmé, že pro $A \in \mathcal{S}$ je $\mu(A) = \int \chi_A \, d\mu = \int_A 1 \, d\mu$.

A místo konstantní funkce 1 se může vzít jiná funkce.

VĚTA. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce a pro $A \in \mathcal{S}$ se definuje $\nu_f(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$. Pak ν_f je míra na $\mathcal{S}$.

VĚTA. (Radon–Nikodýmova věta) Míra ν na $\mathcal{S}$ lze vyjádřit jako $\nu_f(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$ pro nějakou nezápornou μ-měřitelnou funkci f právě když platí

$$A \in \mathcal{S}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \,.$$

Míra ν na $\mathcal{S}$ s vlastností z předchozí věty se nazývá *absolutně spojitá vzhledem k* μ.

Integrace podle Lebesgueovy–Stieltjesovy míry μ_F se často značí $\int f(x) \, \mathrm{d}F(x)$.

Příklad. Charakteristická funkce množiny A je měřitelná právě když A je měřitelná.

VĚTA. (Věta Jegorova.) Nechť na prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$, kde $\mu(X) < \infty$, konvergují měřitelné reálné funkce f_n bodově k funkci f. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $A \in \mathcal{S}$ s mírou $\mu(A) < \varepsilon$ tak, že konvergence je stejnoměrná na $X \setminus A$.

VĚTA. (Věta Lusinova.) Nechť f je lebesgueovsky měřitelná reálná funkce na omezeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje existuje $A \in \mathcal{S}$ s mírou $\mu(A) < \varepsilon$ tak, že zúžení f na $J \setminus A$ je spojité.

VĚTA. (Věta Lebesgueova.) Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí (na σ-konečném prostoru) konvergující skoro všude k f. Jestliže existuje integrovatelná funkce g tak, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ skoro všude, pak $\lim_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$.