TEORIE MÍRY

V některých předchozích kapitolách jste se setkali s měřením velikostí množin a víte, jaké byly těžkosti s měřením množin i na reálné ose.

Kvůli těmto těžkostem se měření zúžilo jen na délku intervalů a jejich spočetná sjednocení.

Velikost (neboli míra) takovéto množiny byl součet délek intervalů.

Je možné najít metodu, jak měřit libovolné podmnožiny přímky (nebo euklidovského prostoru)?

Vzpomeňte si, že např. v rovině se obsah složitější množiny P počítal jako integrál z funkce konstantní na P s hodnotou 1 (taková funkce, která se dodefinuje na zbylých bodech prostoru hodnotou 0, se nazývá charakteristická funkce množiny A).

Pokud se vezme obecný integrál (například Lebesgueův) a míra množiny se definuje jako integrál z charakteristické funkce této množiny, dostane se již veliká třída množin, které se tímto způsobem dají měřit (nikoli však všechny).

V abstraktní teorii míry se postupuje podobně jako v metrických prostorech.

Z vlastností velikostí množin se vyberou ty podstatné a ty se určí jako axiomy pro míru.

..

Míra a integrál spolu úzce souvisí.

Jak bylo řečeno výše, integrál určuje míru.

Ale existuje i opačný postup: z abstraktního pojmu míry lze vytvořit teorii integrálu.

Míra udává nejen velikost množin, ale používá se i jako pravděpodobnost.

Algebra množin

Jak bylo naznačeno v úvodu, míry získané z integrálu nejsou definovány na všech podmnožinách.

Soustava množin, na kterých je taková míra snadno definována, má jisté vlastnosti shrnuté v následující definici.

DEFINICE. Nechť X je neprázdná množina. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá algebra, jestliže $\mathcal{S}$ je uzavřená na konečná sjednocení, doplňky a obsahuje $\emptyset$.

Algebra se nazývá σ-algebra, jestliže je uzavřená na spočetná sjednocení.

POZOROVÁNÍ.

1. Každá algebra (resp. σ-algebra) je uzavřená i na konečné (resp. spočetné) průniky a obsahuje X.
2. Průnik algeber (resp. σ-algeber) v X je opět algebra (resp. σ-algebra).
3. Pro každý systém podmnožin X existuje nejmenší algebra (resp. σ-algebra), která tento systém obsahuje.

Míra

DEFINICE. Míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ je zobrazení $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mající vlastnosti

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, jakmile $\{A_n\}$ je posloupnost navzájem disjunktních množin z $\mathcal{S}$.

Poslední vlastnost míry se nazývá σ-aditivita.

POZOROVÁNÍ.

1. Je-li $A, B \in \mathcal{S}$ a $A \subset B$, je $\mu(A) \le \mu(B)$.

2. Je-li $\{A_n\}$ posloupnost z $\mathcal{S}$, je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

3. Je-li $\{A_n\}$ rostoucí posloupnost z $\mathcal{S}$, je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_n \mu(A_n)$.

4. Je-li $\{A_n\}$ klesající posloupnost z $\mathcal{S}$ a $\mu(A_1) < \infty$, je $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_n \mu(A_n)$.

Druhá uvedená vlastnost se nazývá σ-subaditivita, obě poslední vlastnosti vyjadřují jistou spojitost míry (viz též *Otázky*). ´

Trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$, kde $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X a μ je míra na $\mathcal{S}$, se nazývá prostor s mírou (dvojice $(X, \mathcal{S})$ se obvykle nazývá měřitelný prostor).

Tento prostor s mírou (nebo míra samotná) se nazývá pravděpodobnostní, pokud je $\mu(X) = 1$.

Prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se nazývá úplný, pokud platí

$$A \subset B \in \mathcal{S}, \mu(B) = 0, \text{ pak } A \in \mathcal{S}\,.$$

VĚTA. Pro prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se označí $\overline{\mathcal{S}} = \{A \cup N; A \in \mathcal{S}, N \subset B, \mu(B) = 0\}$ a pro $P = A \cup N$ z definice $\overline{\mathcal{S}}$ se definuje $\overline{\mu}(P) = \mu(A)$. Pak $\overline{\mathcal{S}}$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$ a $\overline{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\mathcal{S}}$, která rozšiřuje μ.

Prostor s mírou $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ se nazývá *zúplněním* prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

POZOROVÁNÍ. Je-li $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ zúplnění měřitelného prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $\widetilde{\mu}$ je míra na $\overline{\mathcal{S}}$, která rozšiřuje μ, pak $\widetilde{\mu} = \overline{\mu}$.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Cvičení 1

Učení 1

Submíra

V této části bude uveden jiný způsob rozšíření míry, který v přirozených situacích vede opět ke zúplnění.

Nejdříve se μ rozšíří na všechny podmnožiny X, ale nelze očekávat, že takovéto rozšíření bude mírou (bude nutné oslabit σ-aditivitu). Potom se vezme maximální σ-algebra, na které je toto rozšíření mírou.

DEFINICE. Submíra na množině X je zobrazení $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mající vlastnosti

1. $\nu(\emptyset) = 0$;

2. $\nu(A) \le \nu(B)$ pro $A \subset B \subset X$;

3. $\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$, jakmile $\{A_n\}$ je posloupnost podmnožin X.

VĚTA. Pro míru μ na σ-algebře $\mathcal{S}$ na X je následující funkce μ^* submíra:

$$\mu^*(P) = \inf\{\mu(A); A \in \mathcal{S}, P \subset A\} .$$

Uvedená submíra je μ^* *generovaná mírou* μ a nazývá se vnější submíra míry μ.

DEFINICE. Nechť ν je submíra na X. Podmnožina $A \subset X$ se nazývá ν-měřitelná, pokud pro libovolné $P \subset X$ platí

$$\nu(P) = \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) .$$

VĚTA. Nechť ν je submíra na X.

- Systém $\mathcal{M}$ všech ν-měřitelných množin je σ-algebra na X a zúžení $\overline{\nu}$ submíry ν na $\mathcal{M}$ je úplná míra.
- Je-li submíra ν generovaná mírou μ definovanou na $\mathcal{S}$, pak $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ a zúžení ν na $\mathcal{S}$ je rovno μ.

Je-li $(X, \mathcal{M}, \overline{\nu})$ vytvořeno z vnější submíry μ^* míry μ, značí se jako $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ a nazývá se *Carathéodoryho rozšíření* prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Následující pozorování ukazuje jednoznačnost předchozího rozšíření v případě tzv. σ-konečné míry, která je definována požadavkem $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, kde $\mu(X_n) < \infty$ pro každé n.

V důkazu použijte nejdříve předpoklad $\mu(X) < \infty$ a rovnost $\overline{\nu}(A) + \overline{\nu}(X \setminus A) = \widetilde{\mu}(A) + \widetilde{\nu}(X \setminus A)$.

POZOROVÁNÍ. Je-li $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ Carathéodoryho rozšíření σ-konečného prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $\widetilde{\mu}$ je míra na $\mathcal{M}$, která rozšiřuje μ, pak $\widetilde{\mu} = \overline{\mu}$.

VĚTA. Carathéodoryho rozšíření σ-konečného prostoru je jeho zúplnění.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

Cvičení 2

Učení 2

Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$

V této části bude $X = \mathbb{R}$.

Jak již bylo zmíněno, abstraktní definice míry nemůže obsahovat požadavek, aby posunutí množiny neměnilo hodnotu míry.

Pro euklidovské prostory je tento požadavek zcela přirozený (pokud se jedná o geometrický pohled).

Navíc je tu další požadavek, aby míra intervalu byla jeho délka a míra bodu byla 0.

Nechť μ je úplná míra (pokud existuje) na nějaké σ-algebře $\mathcal{M}$ na $\mathbb{R}$, která vyhovuje oběma předchozím požadavkům.

Systém všech konečných sjednocení intervalů a konečných množin je algebra $\mathcal{S}$ a každé takovéto sjednocení lze vyjádřit jako konečné sjednocení disjunktních intervalů a konečné množiny.

Odtud plynou hodnoty μ na $\mathcal{S}$ (součet délek těchto disjunktních intervalů).

Dalším krokem je zjištění hodnot μ na σ-algebře $\mathcal{B}$ borelovských množin. Algebra $\mathcal{B}$ se konstruuje transfinitní indukcí: k $\mathcal{S}$ se přidají všechna spočetná sjednocení prvků $\mathcal{S}$ a jejich doplňky, k získanému systému se opět přidají všechna spočetná sjednocení prvků nového systému a jejich doplňky. Pokračuje se až do kroku ω_1, kde se postup zastaví.

Je velmi snadné si uvědomit, že přidávaná spočetná sjednocení mohou být brána jako spočetná sjednocení disjunktních množin. Z toho vyplývá, že μ má hodnoty na množinách z $\mathcal{B}$ opět jednoznačné dány. Tedy (podle předchozí části) je má jednoznačně dány i na zúplnění $(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}}, \mu)$.

Stejný výsledek se dostane použitím zúplnění $(\mathcal{S}, \mu)$). Dá se ukázat, že toto zúplnění už je rovno $\mathcal{M}$. Prvky $\mathcal{M}$ se nazývají lebesgueovsky měřitelné množiny. Míra μ na $\mathcal{M}$ se nazývá Lebesgueova míra.

VĚTA.

1. Lesgueova míra λ je σ-konečná.
2. Pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu P a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \supset P$ tak, že $\lambda(G \setminus P) < \varepsilon$. Je-li navíc P omezená, existuje kompaktní množina $C \subset P$ tak, že $\lambda(P \setminus C) < \varepsilon$.
3. Existuje lebesgueovsky měřitelná množina, která není borelovská.
4. Existuje podmnožina $\mathbb{R}$, která není lebesgueovsky měřitelná.

Poznámky 3 Otázky 3

Měřitelná zobrazení

Tak jako se definovala spojitá zobrazení mezi metrickými prostory, je potřebné definovat vhodná zobrazení mezi měřitelnými prostory.

Zobrazení mezi strukturami musí v nějakém smyslu zachovávat strukturu.

V metrických prostorech to bylo zachovávání konvergence, nebo inverzní zachovávání otevřených množin.

V měřitelných prostorech je situace podobná jako v metrických prostorech, uvažují-li se soustavy měřitelných množin, resp. soustavy otevřených množin. Pak se již snadno usoudí, že následující definice je právě ta vhodná.

DEFINICE. Zobrazení $f : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{M})$ se nazývá měřitelné zobrazení, jestliže $f^{-1}(M) \in \mathcal{S}$ pro každé $M \in \mathcal{M}$.

Měřitelná zobrazení tu nebudou studována v plné obecnosti. Vzhledem k použití se v dalším textu výklad zúží na reálné měřitelné funkce, tj. měřitelná zobrazení $(X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{M})$, kde $\mathcal{M}$ je soustava všech lebesgueovsky měřitelných množin.

POZOROVÁNÍ.

- Součet, součin, podíl, maximum a minimum měřitelných funkcí jsou opět měřitelné funkce.
- Je-li $\{f_n\}$ posloupnost měřitelných funkcí, jsou i $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ (a tedy i $\lim f_n$, existuje-li) měřitelné funkce.

Jednoduchá funkce je funkce, jejíž obor hodnot je konečná množina. Je to tedy lineární kombinace konečně mnoha charakteristických funkcí a může se značit jako konečný součet $\sum \alpha_i \chi_{A_i}$, kde χ_A je charakteristická funkce množiny A, tj. má hodnotu 1 na A a 0 jinde.

POZOROVÁNÍ.

1. Jednoduchá funkce $\sum \alpha_i \chi_{A_i}$ je měřitelná právě když jsou množiny A_i měřitelné.
2. Každá nezáporná měřitelná funkce je limitou rostoucí posloupnosti jednoduchých funkcí.
3. Každá měřitelná funkce je limitou posloupnosti jednoduchých jednoduchých funkcí.

Pro důkaz druhého tvrzení rozdělte v n-tém kroku obor hodnot $[0,\infty)$ na malé intervalky v $[0,n]$ a na interval $[n,\infty)$, vezměte charakteristické funkce vzorů těchto intervalů a jejich vhodné lineární kombinace. V důkazu třetího tvrzení využijte vztah $f = f_+ - f_-$.

Integrál

V této části budou opět zkoumána jen měřitelná zobrazení $(X,\mathcal{S},\mu) \to (\mathbb{R},\mathcal{M},\lambda)$, kde $\mathcal{M}$ je soustava všech lebesgueovsky měřitelných množin a λ je Lebesgueova míra.

Navíc se bude předpokládat, že všechny používané míry jsou σ-konečné.

DEFINICE. Pro jednoduchou funkci $f = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ se definuje její integrál vztahem

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i)\,.$$

Snadno se ukáže, že definice nezávisí na volbě vyjádření jednoduché funkce, že integrál je na jednoduchých funkcích lineární a zachovává nerovnosti.

Pro obecnější funkce se použije jejich vyjádření pomocí jednoduchých funkcí:

DEFINICE.

1. Nechť f je měřitelná nezáporná funkce. Pak se definuje její integrál rovností

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int g \, \mathrm{d}\mu ; g \le f \text{ je jednoduchá funkce} \right\}.$$

2. Nechť f je měřitelná funkce. Pak se definuje její integrál rovností

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int f_- \, \mathrm{d}\mu\,.$$

3. Je-li $a \in \mathcal{S}$ a f je měřitelná funkce. Pak se definuje její integrál na množině A rovností

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int f \chi_A \, \mathrm{d}\mu\,.$$

Pokud je $\int f \, \mathrm{d}\mu$ konečný, nazývá se f integrovatelná a říká se, že integrál z f konverguje.

POZOROVÁNÍ.

1. Integrál je lineární.
2. Integrál zachovává nerovnosti mezi funkcemi.
3. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ konverguje pokud je $\mu(A)$ konečná a f omezená měřitelná.
4. $\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu$.
5. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ konverguje právě když $\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu$ konverguje.
6. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$ pokud je $\mu(A) = 0$.
7. Je-li $\{f_n\}$ monotónní posloupnost měřitelných funkcí, je $\int \lim f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \, \mathrm{d}\mu$.

Jestliže $(X, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$, pak právě zkonstruovaný integrál je totožný s dříve popsaným (L)-integrálem.

Na začátku této kapitoly byla míra popisována jako integrál z charakteristických funkcí.
Je zřejmé, že pro $A \in \mathcal{S}$ je $\mu(A) = \int \chi_A \, \mathrm{d}\mu = \int_A 1 \, \mathrm{d}\mu$.

Je zřejmě nutné vzít nezápornou funkci.
Důkaz následujícího tvrzení není těžký.

VĚTA. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce a pro $A \in \mathcal{S}$ se definuje $\nu_f(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$. Pak ν_f je míra na $\mathcal{S}$.

Vztah mezi takto získanou mírou a původní mírou vyjadřuje následující věta.

VĚTA. Míra ν na $\mathcal{S}$ lze vyjádřit jako $\nu_f(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$ pro nějakou nezápornou μ-měřitelnou funkci f právě když platí

$$A \in \mathcal{S}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0\,.$$

Míra ν na $\mathcal{S}$ s vlastností z předchozí věty se nazývá *absolutně spojitá vzhledem k* μ. Předchozí věta se nazývá Radonova–Nikodýmova věta a její důkaz je složitější.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Cvičení 4

STANDARDY z kapitoly

TEORIE MÍRY

Algebra množin

DEFINICE. Nechť X je neprázdná množina. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá algebra, jestliže $\mathcal{S}$ je uzavřená na konečná sjednocení, doplňky a obsahuje $\emptyset$.

Algebra se nazývá σ-algebra, jestliže je uzavřená na spočetná sjednocení.

POZOROVÁNÍ.

1. Každá algebra (resp. σ-algebra) je uzavřená i na konečné (resp. spočetné) průniky a obsahuje X.
2. Průnik algeber (resp. σ-algeber) v X je opět algebra (resp. σ-algebra).
3. Pro každý systém podmnožin X existuje nejmenší algebra (resp. σ-algebra), která tento systém obsahuje.

Míra

DEFINICE. Míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ je zobrazení $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mající vlastnosti

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, jakmile $\{A_n\}$ je posloupnost navzájem disjunktních množin z $\mathcal{S}$.

Poslední vlastnost míry se nazývá σ-aditivita.

POZOROVÁNÍ.

1. Je-li $A, B \in \mathcal{S}$ a $A \subset B$, je $\mu(A) \leq \mu(B)$.

2. Je-li $\{A_n\}$ posloupnost z $\mathcal{S}$, je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

3. Je-li $\{A_n\}$ rostoucí posloupnost z $\mathcal{S}$, je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_n \mu(A_n)$.

4. Je-li $\{A_n\}$ klesající posloupnost z $\mathcal{S}$ a $\mu(A_1) < \infty$, je $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_n \mu(A_n)$.

Druhá uvedená vlastnost se nazývá σ-subaditivita, obě poslední vlastnosti vyjadřují jistou spojitost míry.

Trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$, kde $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X a μ je míra na $\mathcal{S}$, se nazývá prostor s mírou (dvojice $(X, \mathcal{S})$ se obvykle nazývá měřitelný prostor).

Tento prostor s mírou (nebo míra samotná) se nazývá pravděpodobnostní, pokud je $\mu(X) = 1$.

Prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se nazývá úplný, pokud platí

$$A \subset B \in \mathcal{S}, \mu(B) = 0, \text{ pak } A \in \mathcal{S}\,.$$

VĚTA. Pro prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se označí $\overline{\mathcal{S}} = \{A \cup N; A \in \mathcal{S}, N \subset B, \mu(B) = 0\}$ a pro $P = A \cup N$ z definice $\overline{\mathcal{S}}$ se definuje $\overline{\mu}(P) = \mu(A)$. Pak $\overline{\mathcal{S}}$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$ a $\overline{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\mathcal{S}}$, která rozšiřuje μ.

Prostor s mírou $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ se nazývá *zúplněním* prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

POZOROVÁNÍ. Je-li $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ zúplnění měřitelného prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $\widetilde{\mu}$ je míra na $\overline{\mathcal{S}}$, která rozšiřuje μ, pak $\widetilde{\mu} = \overline{\mu}$.

Příklad. Ukažte (pro libovolnou neprázdnou X), že následující funkce definované na všech podmnožinách X, jsou mírami:

1. $\mu(A) = 0$ pro všechna $A \subset X$;

2. Funkce rovna 0 na $\emptyset$ a nekonečnu na neprázdných množinách.

3. Funkce, přiřazující podmnožině X počet jejích prvků (nekonečno, je-li podmnožina nekonečná). (Tato míra je obzvláště důležitá na $\mathbb{N}$ a nazývá se *čítací* nebo *aritmetická míra*.)

4. Funkce, která má hodnotu 1 na množinách obsahující předem daný bod a 0 jinde (Diracova míra).

Pokud vezmeme funkci μ délku intervalů, Aproximací vznikne míra na otevřených a uzavřených množinách, následně na borelovských množinách (nejmenší σ-algebra obsahující otevřené množiny) v $\mathbb{R}$. Zúplnění této míry se nazývá *Lebesgueova míra*.

Tento postup lze zobecnit následovně. Nechť F je spojitá neklesající funkce na $\mathbb{R}$. Pak se pro interval $A = (a, b)$ definuje $\mu_F(A) = F(b) - F(a)$. Zúplnění vzniklé míry na borelovských množinách se nazývá *Lebesgueova–Stieltjesova míra*. (Lze brát funkce jen zprava spojité, ale pak se musí startovat s intervaly typu $(a, b]$ – takto lze získat Diracovu míru). Funkce F bývá tzv. distribuční funkce jisté pravděpodobnosti.

Příklad. Jaká funkce F (zprava spojitá) vytváří Diracovu míru umístěnou v bodě $a \in \mathbb{R}$?

Soustava borelovských množin na $\mathbb{R}$ má mohutnost 2^ω, tj. stejnou jako je mohutnost $\mathbb{R}$. (Uvědomte si, že každý otevřený interval je sjednocenim spočetně mnoha intervalů s racionálními konci).

Odtud vyplývá, že soustava borelovských množin na $\mathbb{R}$ není úplná vzhledem k Lebesgueově míře λ, protože $\lambda(C) = 0$ pro Cantorovu množinu (ukažte to) a ta má mohutnost 2^ω. Mohutnost soustavy všech jejích podmnožin má proto mohutnost 2^{2^ω} a tedy větší než 2^ω.

Příklad. Nechť X je nespočetná množina. Označme $\mathfrak{M}$ systém všech spočetných a kospočetných podmnožin X. Definujme množinovou funkci $\mu : \mathfrak{M} \to \{0, 1\}$ takto

$$\mu(E) = 0,$$

pokud E je spočetná a

$$\mu(E) = 1,$$

pokud E je kospočetná. Dokažte, že $\mathfrak{M}$ je σ-algebra a μ je míra.

Řešení. Nejprve dokažme, že $\mathfrak{M}$ je σ-algebra.

Podle definice máme ověřit, že
1) $\mathfrak{M}$ obsahuje prázdnou množinu: to je pravda, neboť $\emptyset$ považujeme za spočetnou.

2) $\mathfrak{M}$ je uzavřená na doplňky: to je také pravda, protože pro A spočetnou je A^c kospočetná a pro A kospočetnou je A^c spočetná.

3) $A_n \in \mathfrak{M},\ n = 1, 2, \ldots$ implikuje $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}$: pokud jsou všechny A_n spočetné, stačí si vzpomenout, že spočetné sjednocení spočetných množin je množina spočetná. Pokud je aspoň jedna z množin A_n kospočetná, pak je zřejmě i sjednocení kospočetná množina.

Zbývá ukázat, že μ je míra.

Ověřme tedy, že platí

1) $\mu(\emptyset) = 0$: to je jasné (řekli jsme, že prázdná množina je spočetná).

2) spočetná aditivita: zde stačí odkázat na bod 3) a definici μ.

Submíra

DEFINICE. Submíra na množině X je zobrazení $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mající vlastnosti

1. $\nu(\emptyset) = 0$;
2. $\nu(A) \leq \nu(B)$ pro $A \subset B \subset X$;
3. $\nu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$, jakmile $\{A_n\}$ je posloupnost podmnožin X.

VĚTA. Pro míru μ na σ-algebře $\mathcal{S}$ na X je následující funkce μ^* submíra:

$$\mu^*(P) = \inf\{\mu(A); A \in \mathcal{S}, P \subset A\}\,.$$

Uvedená submíra je μ^* *generovaná mírou* μ a nazývá se vnější submíra míry μ.

DEFINICE. Nechť ν je submíra na X. Podmnožina $A \subset X$ se nazývá ν-měřitelná, pokud pro libovolné $P \subset X$ platí

$$\nu(P) = \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A)\,.$$

VĚTA. Nechť ν je submíra na X.

- Systém $\mathcal{M}$ všech ν-měřitelných množin je σ-algebra na X a zúžení $\overline{\nu}$ submíry ν na $\mathcal{M}$ je úplná míra.
- Je-li submíra ν generovaná mírou μ definovanou na $\mathcal{S}$, pak $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ a zúžení ν na $\mathcal{S}$ je rovno μ.

Je-li $(X, \mathcal{M}, \overline{\nu})$ vytvořeno z vnější submíry μ^* míry μ, značí se jako $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ a nazývá se *Carathéodoryho rozšíření* prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

σ-konečná míra je míra, pro kterou platí, že $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, kde $\mu(X_n) < \infty$ pro každé n.

POZOROVÁNÍ. Je-li $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ Carathéodoryho rozšíření σ-konečného prostoru $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $\widetilde{\mu}$ je míra na $\mathcal{M}$, která rozšiřuje μ, pak $\widetilde{\mu} = \overline{\mu}$.

VĚTA. Carathéodoryho rozšíření σ-konečného prostoru je jeho zúplnění.

Příklad. Je-li F Cantorova funkce (tzv. ďábelské schodiště) na $[0, 1]$, jakou má hodnotu μ_F na Cantorové množině? [1]. A jakou má hodnotu Lebesgueova míra na Cantorově množině?[0].

Příklad. Na množině $\mathbb{R}$ mějme algebru $\mathcal{A}$ generovanou systémem všech intervalů. Definujme množinovou funkci $\mu : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ takto

$$\mu(A) = 1,$$

pokud A obsahuje pravé prstencové okolí nuly a

$$\mu(A) = 0,$$

jinak. Dokažte, že μ je aditivní, ale není spočetně aditivní.

Řešení. Pro důkaz aditivity uvažujme disjunktní množiny $M, N \in \mathcal{A}$.

Neobsahuje-li žádná z nich pravé prstencové okolí nuly, neobsahuje ani $M \cup N$ pravé prstencové okolí nuly.

Tedy $\mu(M) = 0, \mu(N) = 0, \mu(M \cup N) = 0$, a proto

$$\mu(M) + \mu(N) = \mu(M \cup N).$$

Obsahuje-li jedna z množin M, N pravé prstencové okolí nuly (nechť je to M), pak i sjednocení obsahuje pravé prstencové okolí nuly.

Tedy $\mu(M) = 1, \mu(N) = 0, \mu(M \cup N) = 1$, a proto

$$\mu(M) + \mu(N) = \mu(M \cup N).$$

Abychom ukázali, že funkce μ není spočetně aditivní, definujme množiny

$$A_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Potom

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 2) \in \mathcal{A}.$$

Jelikož ale

$$\mu(A_n) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

a

$$\mu(0, 2) = 1$$

dostáváme

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Funkce μ tedy není spočetně aditivní.

Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$

V této části bude $X = \mathbb{R}$.

Definujme množinovou funkci μ tak, aby míra μ intervalu byla jeho délka a míra bodu byla 0.

Systém všech konečných sjednocení intervalů a konečných množin je algebra $\mathcal{S}$. Každé takovéto sjednocení lze vyjádřit jako konečné sjednocení disjunktních intervalů a konečné množiny.

Odtud plynou hodnoty μ na $\mathcal{S}$ (součet délek těchto disjunktních intervalů).

Dalším krokem je zjištění hodnot μ na σ-algebře $\mathcal{B}$ borelovských množin. Algebra $\mathcal{B}$ se konstruuje transfinitní indukcí: k $\mathcal{S}$ se přidají všechna spočetná sjednocení prvků $\mathcal{S}$ a jejich doplňky, k získanému systému se opět přidají všechna spočetná sjednocení prvků nového systému a jejich doplňky. Pokračuje se až do kroku ω_1, kde se postup zastaví.

Je velmi snadné si uvědomit, že přidávaná spočetná sjednocení mohou být brána jako spočetná sjednocení disjunktních množin. Z toho vyplývá, že μ má hodnoty na množinách z $\mathcal{B}$ opět jednoznačné dány. Tedy (podle předchozí části) je má jednoznačně dány i na zúplnění $(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}}, \mu)$.

Místo $(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}}, \mu)$ budeme psát $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$. Prvky $\mathcal{M}$ se nazývají lebesgueovsky měřitelné množiny. Míra λ na $\mathcal{M}$ se nazývá Lebesgueova míra.

VĚTA.

1. Lesgueova míra λ je σ-konečná.

2. Pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu P a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \supset P$ tak, že $\lambda(G \setminus P) < \varepsilon$. Je-li navíc P omezená, existuje kompaktní množina $C \subset P$ tak, že $\lambda(P \setminus C) < \varepsilon$.

3. Existuje lebesgueovsky měřitelná množina, která není borelovská.

4. Existuje podmnožina $\mathbb{R}$, která není lebesgueovsky měřitelná.

Příklad. Jakou hodnotu má λ na množině racionálních čísel a jakou na množině iracionálních čísel (třeba na intervalu $[0, 1]$)?

Příklad. Najděte nespočetnou množinu, která má Lebesgueovu míru 0?

Lebesgueovsky měřitelné množiny s Lebesgueovou mírou tvoří zúplnění borelovských množin, proto existují pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu P borelovské množiny $A \subset P \subset B$ tak, že $\lambda(A) = \lambda(B)$.

A lze sestrojit jako spočetné sjednocení uzavřených množin (takovéto množiny se nazývají F_σ-množiny), a B jako průnik spočetného systému otevřených množin (takovéto množiny se nazývají G_δ-množiny).

Příklad. Sestrojte podmnožinu $\mathbb{R}$, která není lebesgueovsky měřitelná.

Řešení. Na $\mathbb{R}$ se definuje ekvivalence $t \sim s$ vztahem $t - s$ je racionální. Vybereme z každé třídy ekvivalence jeden prvek – tyto prvky tvoří nespočetnou množinu P, která není měřitelná.

Měřitelná zobrazení

DEFINICE. Zobrazení $f : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{M})$ se nazývá měřitelné zobrazení, jestliže $f^{-1}(M) \in \mathcal{S}$ pro každé $M \in \mathcal{M}$.

Měřitelná zobrazení tu nebudou studována v plné obecnosti. Vzhledem k použití se v dalším textu výklad zúží na reálné měřitelné funkce, tj. měřitelná zobrazení $(X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{M})$, kde $\mathcal{M}$ je soustava všech lebesgueovsky měřitelných množin.

POZOROVÁNÍ.

- Součet, součin, podíl, maximum a minimum měřitelných funkcí jsou opět měřitelné funkce.
- Je-li $\{f_n\}$ posloupnost měřitelných funkcí, jsou i $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ (a tedy i $\lim f_n$, existuje-li) měřitelné funkce.

Jednoduchá funkce je funkce, jejíž obor hodnot je konečná množina. Je to tedy lineární kombinace konečně mnoha charakteristických funkcí a může se značit jako konečný součet $\sum \alpha_i \chi_{A_i}$, kde χ_A je charakteristická funkce množiny A, tj. má hodnotu 1 na A a 0 jinde.

POZOROVÁNÍ.

1. Jednoduchá funkce $\sum \alpha_i \chi_{A_i}$ je měřitelná právě když jsou množiny A_i měřitelné.

2. Každá nezáporná měřitelná funkce je limitou rostoucí posloupnosti jednoduchých funkcí.

3. Každá měřitelná funkce je limitou posloupnosti jednoduchých jednoduchých funkcí.

Pro důkaz druhého tvrzení rozdělte v n-tém kroku obor hodnot $[0, \infty)$ na malé intervalky v $[0, n]$ a na interval $[n, \infty)$, vezměte charakteristické funkce vzorů těchto intervalů a jejich vhodné lineární kombinace. V důkazu třetího tvrzení využijte vztah $f = f_+ - f_-$.

Integrál

V této části budou opět zkoumána jen měřitelná zobrazení $(X, \mathcal{S}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$, kde $\mathcal{M}$ je soustava všech lebesgueovsky měřitelných množin a λ je Lebesgueova míra.

Navíc se bude předpokládat, že všechny používané míry jsou σ-konečné.

DEFINICE. Pro jednoduchou funkci $f = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ se definuje její integrál vztahem

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i) \, .$$

Pro obecnější funkce se použije jejich vyjádření pomocí jednoduchých funkcí:

DEFINICE.

1. Nechť f je měřitelná nezáporná funkce. Pak se definuje její integrál rovností

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int g \, \mathrm{d}\mu ; g \leq f \text{ je jednoduchá funkce} \right\} .$$

2. Nechť f je měřitelná funkce. Pak se definuje její integrál rovností

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int f_- \, \mathrm{d}\mu \, .$$

3. Je-li $a \in \mathcal{S}$ a f je měřitelná funkce. Pak se definuje její integrál na množině A rovností

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int f \chi_A \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Pokud je $\int f \, \mathrm{d}\mu$ konečný, nazývá se f integrovatelná a říká se, že integrál z f konverguje.

POZOROVÁNÍ.

1. Integrál je lineární.
2. Integrál zachovává nerovnosti mezi funkcemi.
3. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ konverguje pokud je $\mu(A)$ konečná a f omezená měřitelná.
4. $\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu$.
5. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ konverguje právě když $\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu$ konverguje.
6. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$ pokud je $\mu(A) = 0$.
7. Je-li $\{f_n\}$ monotónní posloupnost měřitelných funkcí, je $\int \lim f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \, \mathrm{d}\mu$.

Jestliže $(X, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$, pak právě zkonstruovaný integrál je totožný s dříve popsaným (L)-integrálem.

Je zřejmé, že pro $A \in \mathcal{S}$ je $\mu(A) = \int \chi_A \, \mathrm{d}\mu = \int_A 1 \, \mathrm{d}\mu$.

VĚTA. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce a pro $A \in \mathcal{S}$ se definuje $\nu_f(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$. Pak ν_f je míra na $\mathcal{S}$.

VĚTA. (Radon–Nikodýmova věta) Míra ν na $\mathcal{S}$ lze vyjádřit jako $\nu_f(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$ pro nějakou nezápornou μ-měřitelnou funkci f právě když platí

$$A \in \mathcal{S}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \, .$$

Míra ν na $\mathcal{S}$ s vlastností z předchozí věty se nazývá *absolutně spojitá vzhledem k* μ.

Integrace podle Lebesgueovy–Stieltjesovy míry μ_F se často značí $\int f(x) \, \mathrm{d}F(x)$.

Příklad. Charakteristická funkce množiny A je měřitelná právě když A je měřitelná.

VĚTA. (Věta Jegorova.) Nechť na prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$, kde $\mu(X) < \infty$, konvergují měřitelné reálné funkce f_n bodově k funkci f. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $A \in \mathcal{S}$ s mírou $\mu(A) < \varepsilon$ tak, že konvergence je stejnoměrná na $X \setminus A$.

VĚTA. (Věta Lusinova.) Nechť f je lebesgueovsky měřitelná reálná funkce na omezeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje existuje $A \in \mathcal{S}$ s mírou $\mu(A) < \varepsilon$ tak, že zúžení f na $J \setminus A$ je spojité.

VĚTA. (Věta Lebesgueova.) Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí (na σ-konečném prostoru) konvergující skoro všude k f. Jestliže existuje integrovatelná funkce g tak, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ skoro všude, pak $\lim_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$.