

KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE



V předchozích částech byl důraz kladen na reálná čísla a na reálné funkce.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE



V předchozích částech byl důraz kladen na reálná čísla a na reálné funkce.



Pokud se komplexní čísla vyskytovala, bylo to z hlediska kartézského součinu dvou reálných přímk, např. při zkoumání funkcí dvou proměnných. Nebyly při tom brány v úvahu všechny algebraické vlastnosti komplexních čísel.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE



V předchozích částech byl důraz kladen na reálná čísla a na reálné funkce.



Pokud se komplexní čísla vyskytovala, bylo to z hlediska kartézského součinu dvou reálných přímk, např. při zkoumání funkcí dvou proměnných. Nebyly při tom brány v úvahu všechny algebraické vlastnosti komplexních čísel.



To jsem byla hodná, co?

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je známo, že některé úlohy zadané reálnými funkcemi nemají řešení v reálném oboru, ale mají řešení v komplexním oboru.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je známo, že některé úlohy zadané reálnými funkcemi nemají řešení v reálném oboru, ale mají řešení v komplexním oboru.



Takovým jednoduchým případem jsou kvadratické rovnice.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je známo, že některé úlohy zadané reálnými funkcemi nemají řešení v reálném oboru, ale mají řešení v komplexním oboru.



Takovým jednoduchým případem jsou kvadratické rovnice.



Kořeny kvadratické rovnice mi připomínají mládí. To jsem byl taky kořen.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Složitější situace bude probrána v kapitole o Fourierově transformaci: inverzní obrazy Laplaceovy transformace reálné funkce se vypočítají pomocí integrálu komplexních funkcí.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Složitější situace bude probrána v kapitole o Fourierově transformaci: inverzní obrazy Laplaceovy transformace reálné funkce se vypočítají pomocí integrálu komplexních funkcí.



A to je i pro mně složitější.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Složitější situace bude probrána v kapitole o Fourierově transformaci: inverzní obrazy Laplaceovy transformace reálné funkce se vypočítají pomocí integrálu komplexních funkcí.



A to je i pro mně složitější.



Jako když jsem jednou doma pověsil obrazy inverzně. Koukalo se na ně ode zdi.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla
komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod
topologie roviny
konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost
funkce
mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



I když mnoho vlastností komplexních čísel lze získat z vlastností reálných čísel, nelze tak získat všechny potřebné vlastnosti.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

I když mnoho vlastností komplexních čísel lze získat z vlastností reálných čísel, nelze tak získat všechny potřebné vlastnosti.



Navíc, už při zkoumání funkcí dvou proměnných byly vidět podstatné rozdíly ve složitosti jistých množin na přímce a v rovině.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

I když mnoho vlastností komplexních čísel lze získat z vlastností reálných čísel, nelze tak získat všechny potřebné vlastnosti.



Navíc, už při zkoumání funkcí dvou proměnných byly vidět podstatné rozdíly ve složitosti jistých množin na přímce a v rovině.



V této kapitole proto budou zopakovány některé vlastnosti roviny a funkcí dvou proměnných (a základy komplexních čísel ze střední školy).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

I když mnoho vlastností komplexních čísel lze získat z vlastností reálných čísel, nelze tak získat všechny potřebné vlastnosti.



Navíc, už při zkoumání funkcí dvou proměnných byly vidět podstatné rozdíly ve složitosti jistých množin na přímce a v rovině.



V této kapitole proto budou zopakovány některé vlastnosti roviny a funkcí dvou proměnných (a základy komplexních čísel ze střední školy).



Raději nejmenované střední školy.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL \mathbb{C}



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL \mathbb{C}



DEFINICE. Množina \mathbb{C} komplexních čísel je množina \mathbb{R}^2 všech dvojic (x, y) reálných čísel s euklidovskou vzdáleností dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2) rovnou

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

a algebraickými operacemi sčítání a násobení:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL \mathbb{C}



DEFINICE. Množina \mathbb{C} komplexních čísel je množina \mathbb{R}^2 všech dvojic (x, y) reálných čísel s euklidovskou vzdáleností dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2) rovnou

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

a algebraickými operacemi sčítání a násobení:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$



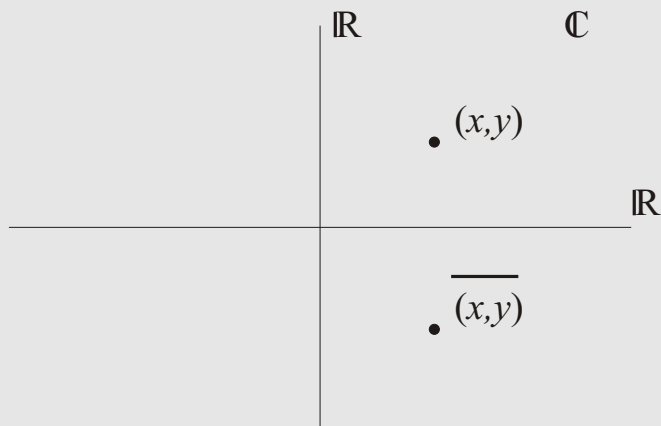
Číslo x se nazývá **reálná složka** komplexního čísla $z = (x, y)$ (značení $\Re(z)$) a y jeho **imaginární složka** (značení $\Im(z)$).



LEKCE31-KOM

- komplexní čísla
 - komplexně sdružené číslo
 - absolutní hodnota
 - imaginární jednotka
 - průvodič
 - argument
 - Moivreovy vzorce
 - nevlastní bod
- topologie roviny
 - konvergence
 - souvislá množina
 - oblast
 - křivková souvislost
 - jednoduchá souvislost
- funkce
 - mnohoznačná funkce
 - spojitost
 - limita funkce
- STANDARDY
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo $(x, -y)$ se nazývá **komplexně sdružené** k číslu (x, y) (značení $\overline{(x, y)}$).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

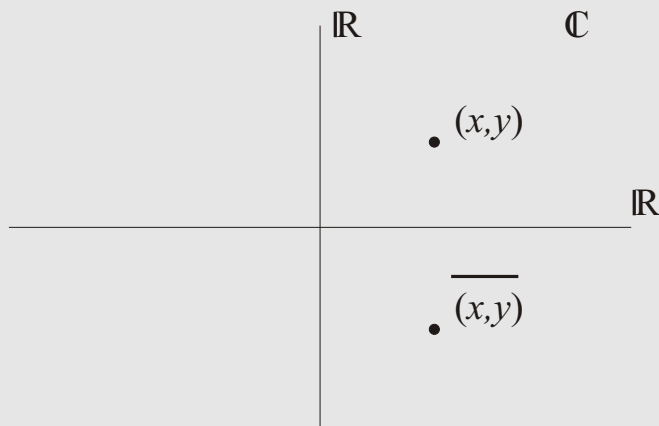
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo $(x, -y)$ se nazývá **komplexně sdružené** k číslu (x, y) (značení $\overline{(x, y)}$).



Pokud jste vybojnější povahy, tak raději komplexní čísla nestudujte.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



S uvedeným násobením a sčítáním tvoří \mathbb{C} těleso, s uvedenou vzdáleností tvoří metrický prostor.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

S uvedeným násobením a sčítáním tvoří \mathbb{C} těleso, s uvedenou vzdáleností tvoří metrický prostor.



Pokud se ztotožní reálná čísla $r \in \mathbb{R}$ s komplexními čísly $(r, 0)$, je \mathbb{R} podtěleso \mathbb{C} (a jeho metrický podprostor).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

S uvedeným násobením a sčítáním tvoří \mathbb{C} těleso, s uvedenou vzdáleností tvoří metrický prostor.



Pokud se ztotožní reálná čísla $r \in \mathbb{R}$ s komplexními čísly $(r, 0)$, je \mathbb{R} podtěleso \mathbb{C} (a jeho metrický podprostor).



Vzdálenost bodu $z = (x, y)$ od počátku se podobně jako v reálných číslech značí absolutní hodnotou $|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je potom $|z_1 - z_2|$. Pro absolutní hodnotu platí stejná pravidla jako v \mathbb{R} (viz *Otázky*).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

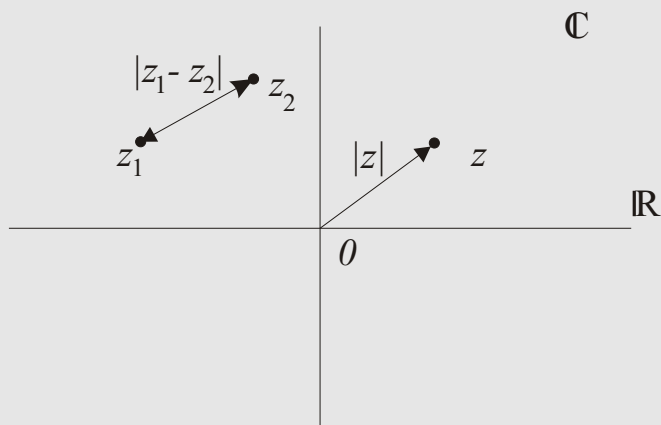
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Počátek, tj. bod $(0, 0)$, bude často značen jako 0 .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

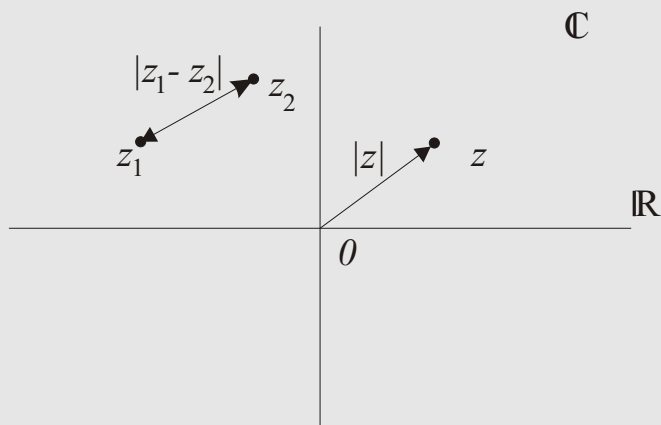
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Počátek, tj. bod $(0, 0)$, bude často značen jako 0 .



Óóóó.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

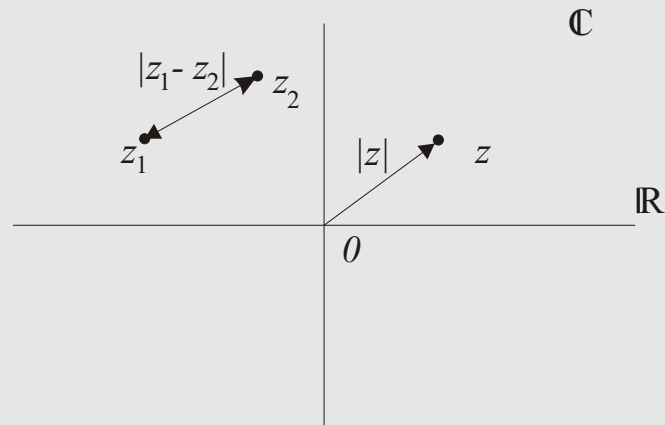
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Počátek, tj. bod $(0, 0)$, bude často značen jako 0 .



Óóóó.



Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 Cvičení 1

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Alternativní popis komplexních čísel



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

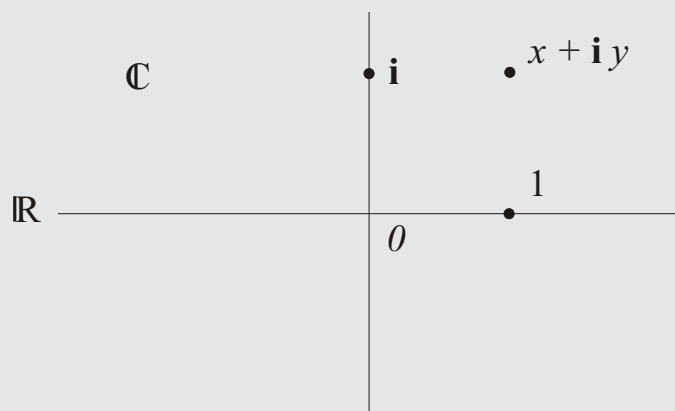
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Alternativní popis komplexních čísel



Jestliže se označí $i = (0, 1)$ (tzv. imaginární jednotka), lze psát komplexní čísla ve tvaru $(x, y) = x + iy$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

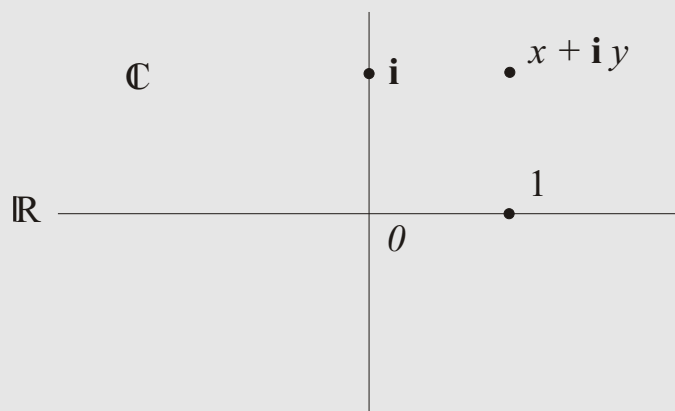
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Alternativní popis komplexních čísel



Jestliže se označí $i = (0, 1)$ (tzv. imaginární jednotka), lze psát komplexní čísla ve tvaru $(x, y) = x + iy$.



Jen jestli. Jednou jsem takhle čekala celý den, jestli dostanu zmrzlinu.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Další možností vyjádření komplexních čísel je použití polárních souřadnic: $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde r je vzdálenost bodu (x, y) od počátku. a φ je úhel mezi kladným směrem osy x a spojnicí bodu (x, y) s počátkem.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

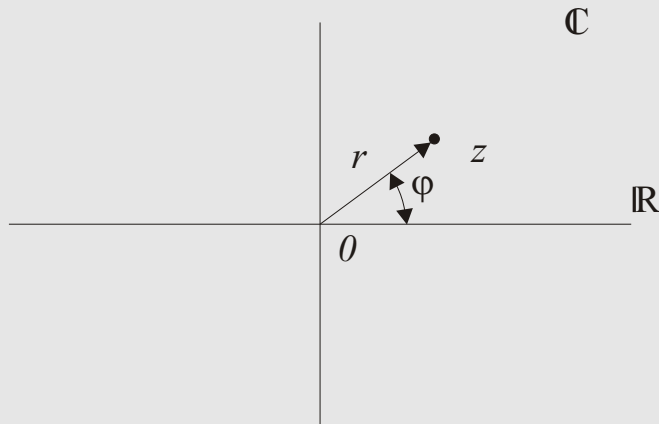
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Další možností vyjádření komplexních čísel je použití polárních souřadnic: $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde r je vzdálenost bodu (x, y) od počátku. a φ je úhel mezi kladným směrem osy x a spojnicí bodu (x, y) s počátkem.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$



Úhel φ je, kromě bodu $(0, 0)$, určen jednoznačně až na periodu 2π :

$$\cos \varphi = \frac{\Re z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\Im z}{|z|}.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$



Úhel φ je, kromě bodu $(0, 0)$, určen jednoznačně až na periodu 2π :

$$\cos \varphi = \frac{\Re z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\Im z}{|z|}.$$



Totéž komplexní číslo tedy vyjádříme různými způsoby. Vždy si můžeme vybrat ten způsob, který se nejlíp hodí.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popis φ pomocí funkce \arctg je uveden v *Otázkách*. Množina úhlů φ pro dané z se značí $\arg(z)$, takže $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popis φ pomocí funkce \arctg je uveden v *Otázkách*. Množina úhlů φ pro dané z se značí $\arg(z)$, takže $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$.



To je velmi důležitý vzoreček. Jde poplést.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popis pomocí polárních souřadnic je vhodný při násobení komplexních čísel. Platí totiž zobecněné **Moivreovy vzorce** pro z_1, z_2 s příslušnými argumenty φ_1, φ_2 :

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popis pomocí polárních souřadnic je vhodný při násobení komplexních čísel. Platí totiž zobecněné **Moivreovy vzorce** pro z_1, z_2 s příslušnými argumenty φ_1, φ_2 :

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$



Prostě to i je zakuklené otáčení v rovině.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná
- funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popis pomocí polárních souřadnic je vhodný při násobení komplexních čísel. Platí totiž zobecněné **Moivreovy vzorce** pro z_1, z_2 s příslušnými argumenty φ_1, φ_2 :

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$



Prostě to i je zakuklené otáčení v rovině.



Já se třeba celý den točím kolem plotny. i .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšířená komplexní rovina \mathbb{C}^*



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšířená komplexní rovina \mathbb{C}^*

↓
Stejně jako v \mathbb{R} je vhodné rozšířit rovinu o nevlastní body.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšířená komplexní rovina \mathbb{C}^*



Stejně jako v \mathbb{R} je vhodné rozšířit rovinu o nevlastní body.



Na rozdíl od \mathbb{R} se však \mathbb{C} rozšiřuje jen o jedno nevlastní číslo, které bude značeno ∞ a rozšířená rovina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bude označena jako \mathbb{C}^* .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

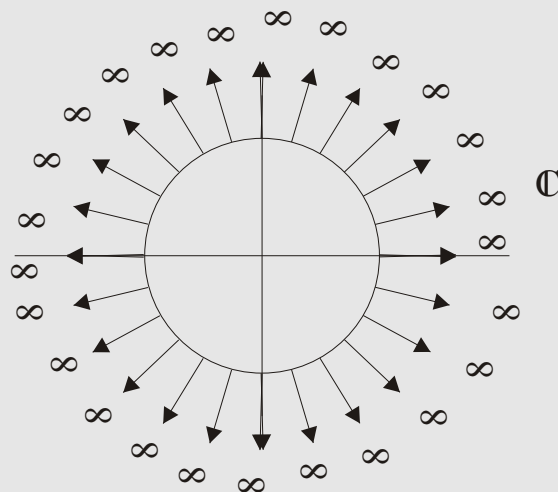
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšířená komplexní rovina \mathbb{C}^*

↓
Stejně jako v \mathbb{R} je vhodné rozšířit rovinu o nevlastní body.

↓
Na rozdíl od \mathbb{R} se však \mathbb{C} rozšiřuje jen o jedno nevlastní číslo, které bude značeno ∞ a rozšířená rovina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bude označena jako \mathbb{C}^* .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Nevim nevim, jestli je to
fakt jednodušší.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nevim nevim, jestli je to fakt jednodušší.



Jednou jsem se na rovině komplexně vyboural. A to ještě nebyla rozšířená jako dneska.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0.$$



Operace

$$\infty + \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

nemají smysl (neurčité výrazy).

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0.$$



Operace

$$\infty + \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{\infty}$$

nemají smysl (neurčité výrazy).

Je vhodné zavést $|\infty| = \infty, \overline{\infty} = \infty$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0.$$



Operace

$$\infty + \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{\infty}$$

nemají smysl (neurčité výrazy).

Je vhodné zavést $|\infty| = \infty, \overline{\infty} = \infty$.



A nad komplexní rovinou se
snesla algebraická mlha ...

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota
imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





BTW. Jednou jsem takové i
viděl na Václaváku.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Topologie roviny



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

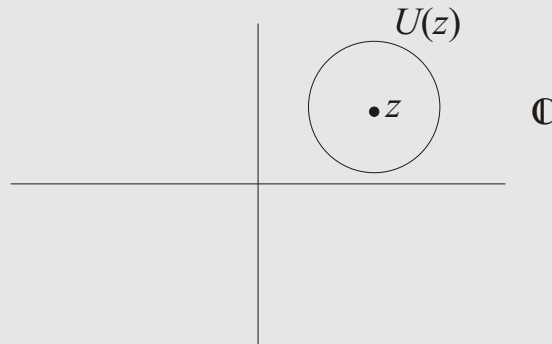
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Topologie roviny



V kapitole o funkcích více proměnných byla pomocí vzdálenosti popsána konvergence v \mathbb{R}^2 a její vlastnosti, dále pak jisté vlastnosti podmnožin roviny, jako otevřenost, uzavřenost, omezenost, kompaktnost, okolí bodů, hromadné body.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

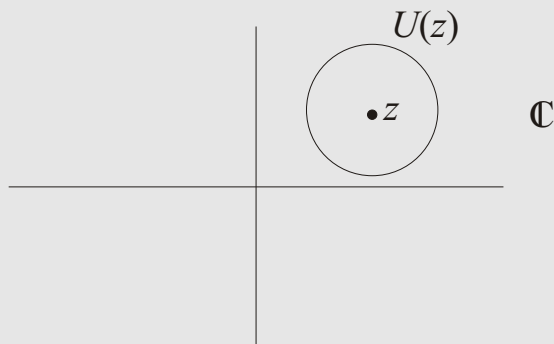
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Topologie roviny



V kapitole o funkcích více proměnných byla pomocí vzdálenosti popsána konvergence v \mathbb{R}^2 a její vlastnosti, dále pak jisté vlastnosti podmnožin roviny, jako otevřenost, uzavřenost, omezenost, kompaktnost, okolí bodů, hromadné body.



Pro úplnost:

- *okolí* bodu z je libovolná množina obsahující nějaký kruh o středu z ;
- podmnožina \mathbb{C} je *otevřená*, jestliže je okolím každého svého bodu;
- podmnožina \mathbb{C} je *uzavřená*, jestliže její doplněk je otevřený;
- podmnožina \mathbb{C} je *kompaktní*, jestliže je uzavřená a omezená;
- posloupnost z_n konverguje k $z \in \mathbb{C}$, jestliže libovolné okolí bodu z obsahuje skoro všechna z_n .

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V *Poznámkách, Příkladech a Otázkách* je probráno rozšíření uvedených pojmů na \mathbb{C}^* .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V *Poznámkách, Příkladech a Otázkách* je probráno rozšíření uvedených pojmů na \mathbb{C}^* .



Pil jsem pětihvězdičkový koňak a spal v pětihvězdičkovém hotelu. Jedna hvězdička mně neláká.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Kromě tvrzení obsahujících pojmy z uspořádání, platí stejné věty pro konvergenci jako v \mathbb{R} :

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Kromě tvrzení obsahujících pojmy z uspořádání, platí stejné věty pro konvergenci jako v \mathbb{R} :

VĚTA.

1. $\{z_n\}$ má nejvýše jednu limitu,
2. je-li posloupnost $\{z_n\}$ konstantní, $z_n = u$, pak $\lim z_n = u$,
3. jestliže $\lim z_n = u$, pak $\lim z_{k_n} = u$ pro každou podposloupnost $\{z_{k_n}\}$ posloupnosti $\{z_n\}$,
4. jestliže z každé podposloupnosti $\{z_n\}$ lze vybrat podposloupnost konvergující k u , pak $\{z_n\}$ konverguje k u .
5. jestliže $\{z_n\}$ konverguje v \mathbb{C} , pak $\{z_n\}$ je omezená posloupnost.
6. posloupnost $\{z_n\}$ konverguje v \mathbb{C} právě když je cauchyovská (tj. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n, k > n_0 \Rightarrow |z_n - z_k| < \varepsilon)$),
7. platí tvrzení o limitě součtu, součinu a podílu.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla
komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod
topologie roviny
konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce
mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Beze změny zůstává definice hromadných bodů posloupností nebo množin v \mathbb{C} a všechna tvrzení o nich, která mají smysl v \mathbb{C} (tj. musí se vynechat tvrzení používající uspořádání, např. nemá smysl hovořit o největším a nejmenším hromadném bodě posloupnosti). V Cantorově větě se místo omezeného uzavřeného intervalu bere kompaktní množina (viz *Otázky*).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Beze změny zůstává definice hromadných bodů posloupností nebo množin v \mathbb{C} a všechna tvrzení o nich, která mají smysl v \mathbb{C} (tj. musí se vynechat tvrzení používající uspořádání, např. nemá smysl hovořit o největším a nejmenším hromadném bodě posloupnosti). V Cantorově větě se místo omezeného uzavřeného intervalu bere kompaktní množina (viz *Otázky*).



Toto mimojiné znamená, že přibylo zadarmo kupa tvrzení. Máte radost?



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bude potřeba další důležitý pojem, a to souvislost množiny.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bude potřeba další důležitý pojem, a to souvislost množiny.



Množina A se nazývá **souvislá**, jestliže každá funkce spojitá na A mající jen konečně mnoho hodnot je konstantní.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

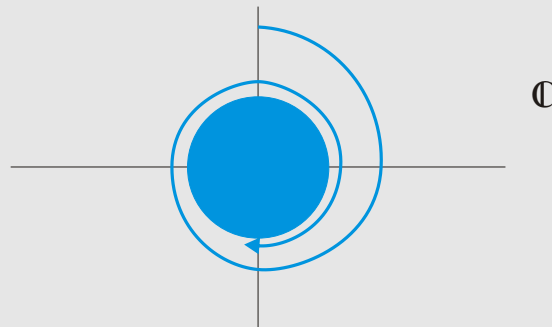
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bude potřeba další důležitý pojem, a to souvislost množiny.



Množina A se nazývá **souvislá**, jestliže každá funkce spojitá na A mající jen konečně mnoho hodnot je konstantní.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

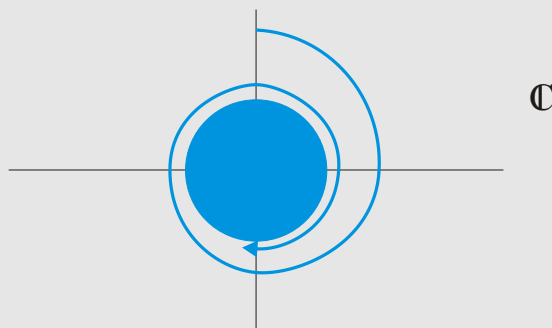
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bude potřeba další důležitý pojem, a to souvislost množiny.



Množina A se nazývá **souvislá**, jestliže každá funkce spojitá na A mající jen konečně mnoho hodnot je konstantní.



Jestliže je funkce nulová na spirále obtáčející kruh, bude nulová i na tom kruhu. Víc na tom není.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro účely této kapitoly bude stačit silnější pojem než souvislost. Množina je **křivkově souvislá**, jestliže každé její dva body lze spojit křivkou ležící v oné množině.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

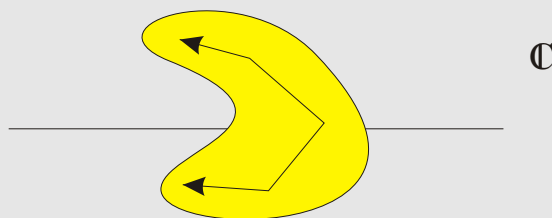
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro účely této kapitoly bude stačit silnější pojem než souvislost. Množina je **křivkově souvislá**, jestliže každé její dva body lze spojit křivkou ležící v oné množině.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

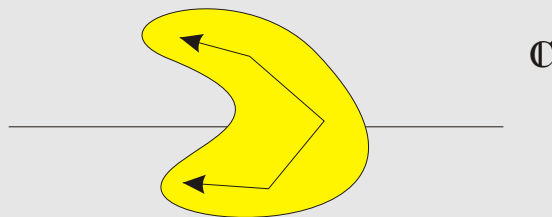
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro účely této kapitoly bude stačit silnější pojem než souvislost. Množina je **křivkově souvislá**, jestliže každé její dva body lze spojit křivkou ležící v oné množině.



Když pečou koblížky, rozdělím křivkově souvislé těsto na malé křivkově souvislé množiny a pečou dozlatova.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zřejmě je každá křivkově souvislá množina je souvislá.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zřejmě je každá křivkově souvislá množina je souvislá.



A upečené koblížky jsou souvislé, jinak bych se jako kuchařka styděla.



LEKCE31-KOM

- komplexní čísla
 - komplexně sdružené číslo
 - absolutní hodnota
 - imaginární jednotka
 - průvodič
 - argument
 - Moivreovy vzorce
 - nevlastní bod
- topologie roviny
 - konvergence
 - souvislá množina
 - oblast
 - křivková souvislost
 - jednoduchá souvislost
- funkce
 - mnohoznačná funkce
 - spojitost
 - limita funkce
- STANDARDY**
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.



Otevřené souvislé množiny se nazývají **oblastmi**.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.



Otevřené souvislé množiny se nazývají **oblastmi**.



Oblast spolu se svou hranicí se nazývá **uzavřená oblast**.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.



Otevřené souvislé množiny se nazývají **oblastmi**.



Oblast spolu se svou hranicí se nazývá **uzavřená oblast**.



Pro podrobnější pohled na souvislost viz *Poznámky, Příklady a Otázky*.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

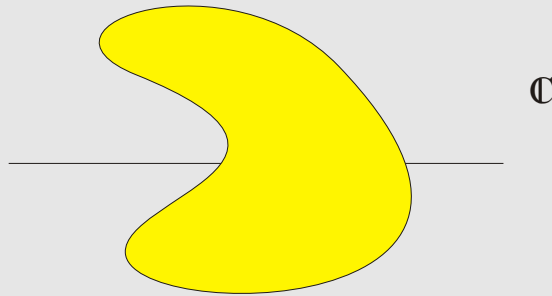
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Souvislá množina se nazývá **jednoduše souvislá**, jestliže její doplněk je souvislá množina.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

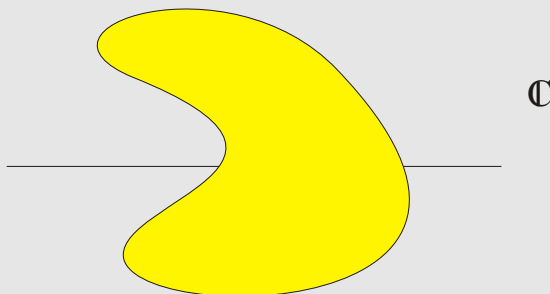
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Souvislá množina se nazývá **jednoduše souvislá**, jestliže její doplněk je souvislá množina.



Oblast G je jednoduše souvislá, jestliže s každou Jordanovou křivkou v G leží v G i její vnitřek.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

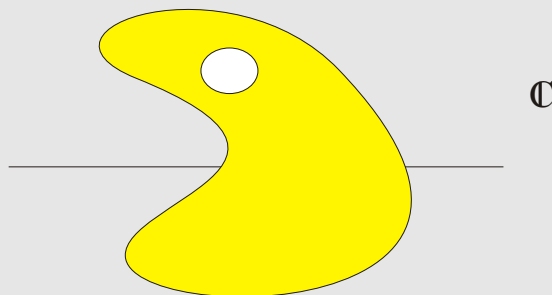
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A toto je množina, která není jednoduše souvislá.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

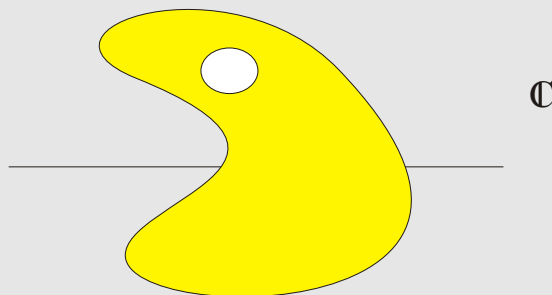
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A toto je množina, která není jednoduše souvislá.



Je to děravý. Vidíte to jasně.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4 Cvičení 4



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ



Komplexní funkce komplexní proměnné zobrazuje nějakou podmnožinu \mathbb{C} do \mathbb{C} . Můžeme se na ni tedy dívat jako na dvojrozměrné vektorové pole (reálné) definované na podmnožině roviny, neboli $f(z) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ ($f_1 = \Re f$ je reálná složka a $f_2 = \Im f$ je imaginární složka funkce f).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ



Komplexní funkce komplexní proměnné zobrazuje nějakou podmnožinu \mathbb{C} do \mathbb{C} . Můžeme se na ni tedy dívat jako na dvojrozměrné vektorové pole (reálné) definované na podmnožině roviny, neboli $f(z) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$ ($f_1 = \Re f$ je reálná složka a $f_2 = \Im f$ je imaginární složka funkce f).



Jde o jakousi deformaci roviny. Na té funkci nevidíme ten proces deformace, ale vidíme až výsledný tvar.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

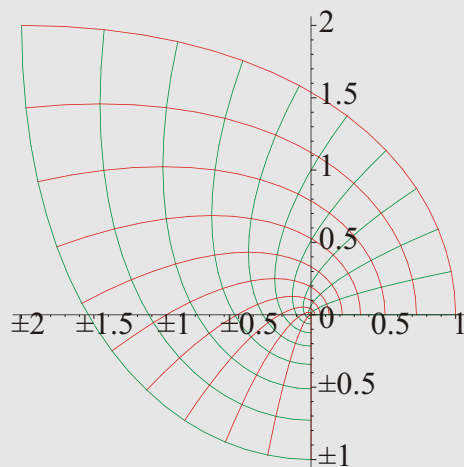
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Takhle například vypadá obraz jednotkového čtverce pomocí zobrazení $z \mapsto z^3$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Ta funkce ten čtverec pěkně zřídila. A to se to mohlo ještě překrejvat.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ta funkce ten čtverec pěkně zřídila. A to se to mohlo ještě překrejvat.



Já dovedu s dobře rozváleným těstem jinší kouzla.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Abychom mohli úspěšně pracovat s komplexními funkcemi komplexní proměnné, bývá mimo výše uvedený model typu "rozválené těsto" užitečné zkoumat odděleně reálnou a imaginární složku zvlášť.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

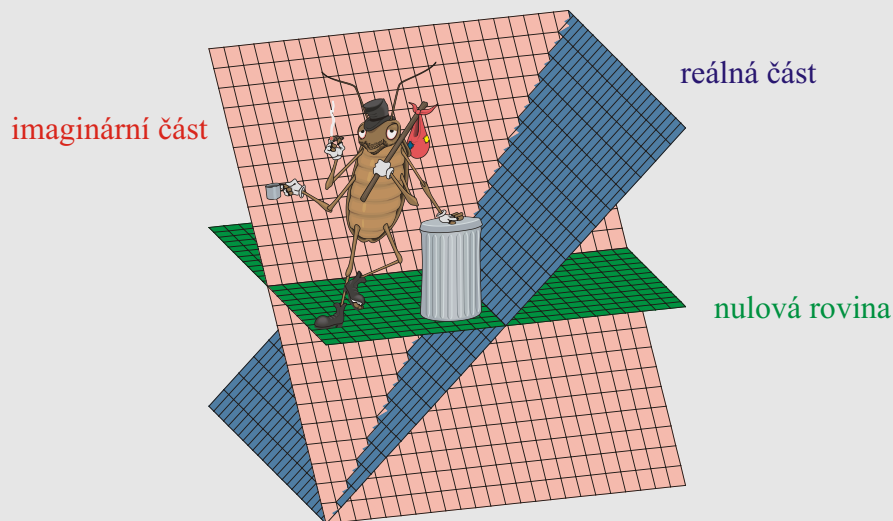
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Abychom mohli úspěšně pracovat s komplexními funkcemi komplexní proměnné, bývá mimo výše uvedený model typu "rozcvičené těsto" užitečné zkoumat odděleně reálnou a imaginární složku zvlášť.



Například pro funkci $z \mapsto z$ je reálná složka zobrazení $(x, y) \mapsto x$ a imaginární složka zobrazení $(x, y) \mapsto y$. Jde tedy vlastně o dvě plochy nad rovinou (x, y) .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Takže, světe div se! Identita jsou dvě roviny. Ani nechci domyslet, co bude s dalšíma funkcema.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Takže, světe div se! Identita jsou dvě roviny. Ani nechci domyslet, co bude s dalšíma funkcema.



U mnohých funkcí je to přesně jako u identity (lokálně a až na konstantu). Pokud tomu jednou porozumíte, budu slavit.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nevím sice o co jde, ale budu taky slavit.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je zřejmé, jak se definuje součet, součin a podíl komplexních funkcí (vše bodově), jejich složení, inverzní funkce, jejich bodová limita.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je zřejmé, jak se definuje součet, součin a podíl komplexních funkcí (vše bodově), jejich složení, inverzní funkce, jejich bodová limita.



Nemá smysl hovořit o monotónních funkcích, o extrémech, o konvexních funkcích.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je zřejmé, jak se definuje součet, součin a podíl komplexních funkcí (vše bodově), jejich složení, inverzní funkce, jejich bodová limita.



Nemá smysl hovořit o monotónních funkcích, o extrémech, o konvexních funkcích.



Ale má smysl pojem omezená funkce, sudá, lichá nebo periodická funkce.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je zřejmé, jak se definuje součet, součin a podíl komplexních funkcí (vše bodově), jejich složení, inverzní funkce, jejich bodová limita.



Nemá smysl hovořit o monotónních funkcích, o extrémech, o konvexních funkcích.



Ale má smysl pojem omezená funkce, sudá, lichá nebo periodická funkce.



Abych byla přesnější. Když nemá smysl znamená, že má smysl, ale skoro nulový. A když má smysl, tak velmi nenulový.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si rozdíl oproti kapitole o funkcích více proměnných, kde se součin a podíl funkcí uvažoval pouze pro funkce s hodnotami v \mathbb{R} .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si rozdíl oproti kapitole o funkcích více proměnných, kde se součin a podíl funkcí uvažoval pouze pro funkce s hodnotami v \mathbb{R} .



Úmluva: Pokud nebude řečeno jinak, bude v této i následujících kapitolách termín *funkce* znamenat *komplexní funkce komplexní proměnné*.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

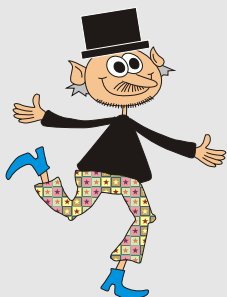
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si rozdíl oproti kapitole o funkcích více proměnných, kde se součin a podíl funkcí uvažoval pouze pro funkce s hodnotami v \mathbb{R} .



Úmluva: Pokud nebude řečeno jinak, bude v této i následujících kapitolách termín *funkce* znamenat *komplexní funkce komplexní proměnné*.



Pokud jde o funkce, tak mezi kouzelníky mám nejvyšší funkci já.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si rozdíl oproti kapitole o funkcích více proměnných, kde se součin a podíl funkcí uvažoval pouze pro funkce s hodnotami v \mathbb{R} .



Úmluva: Pokud nebude řečeno jinak, bude v této i následujících kapitolách termín *funkce* znamenat *komplexní funkce komplexní proměnné*.



Pokud jde o funkce, tak mezi kouzelníky mám nejvyšší funkci já.



Je to imaginární část logaritmu a to ví každé malé děcko.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9





Je tu opravdu něco kouzelně jednoduchého. Komplexní exponenciála není prostá a její inverze je zdrojem nesčetných kouzel v komplexní rovině. Tak se na to připravíme.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Budou se vyskytovat přiřazení, která jednomu bodu přiřadí více hodnot (jako např. $\arg z$). Takovéto přiřazení se nazývá **mnohoznačné zobrazení** a v případě, že je definováno na komplexních číslech a hodnoty jsou opět komplexní čísla, bude se nazývat **mnohoznačná funkce**.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

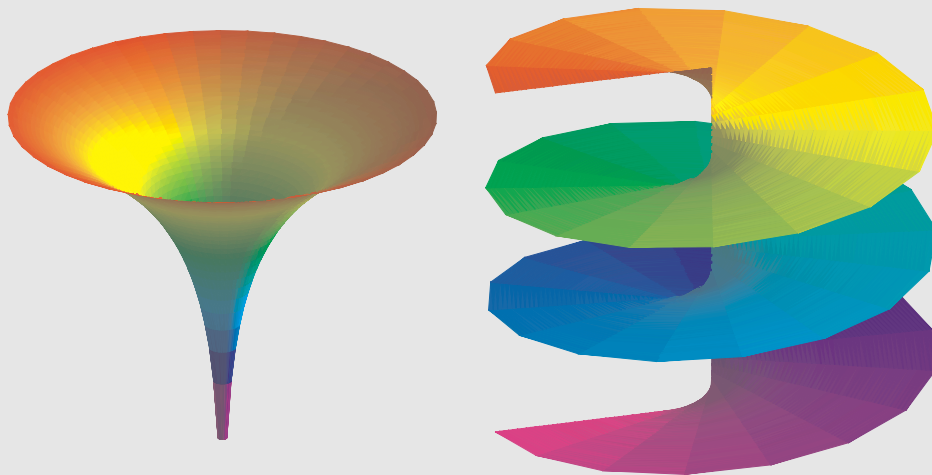
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tady například vidíme reálnou a imaginární část komplexního logaritmu.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9





BTW, ta imaginární část asi nemá daleko k funkci \arg , O.K. ?



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitosť



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitosť
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojítost



Protože \mathbb{C} je metrický prostor, je spojitost funkce f definována jako **spojitost zobrazení mezi metrickými prostory** (v bodě nebo na množině).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitosť



Protože \mathbb{C} je metrický prostor, je spojitost funkce f definována jako **spojitosť zobrazení mezi metrickými prostory** (v bodě nebo na množině).



Je však možné vzít za definici spojitosti funkce f jednu z následujících ekvivalentních vlastností plynoucí ze spojitosti reálných funkcí a z rozkladu f na reálnou a imaginární složku:

1. složky $\Re f$ a $\Im f$ spojitě;
2. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé okolí U bodu $f(z)$ existuje okolí V bodu z takové, že $f(V \cap \mathcal{D}(f)) \subset U$.
3. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ jakmile $|z - w| < \delta$ a $z \in \mathcal{D}(f)$.
4. jestliže $z_n \rightarrow z$ v $\mathcal{D}(f)$, pak $f(z_n) \rightarrow f(z)$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitosť

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitosť



Protože \mathbb{C} je metrický prostor, je spojitost funkce f definována jako **spojitosť zobrazení mezi metrickými prostory** (v bodě nebo na množině).



Je však možné vzít za definici spojitosti funkce f jednu z následujících ekvivalentních vlastností plynoucí ze spojitosti reálných funkcí a z rozkladu f na reálnou a imaginární složku:

1. složky $\Re f$ a $\Im f$ spojitě;
2. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé okolí U bodu $f(z)$ existuje okolí V bodu z takové, že $f(V \cap \mathcal{D}(f)) \subset U$.
3. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ jakmile $|z - w| < \delta$ a $z \in \mathcal{D}(f)$.
4. jestliže $z_n \rightarrow z$ v $\mathcal{D}(f)$, pak $f(z_n) \rightarrow f(z)$.



Stejnomořná spojitost je definovaná třetí podmínkou, jestliže volba δ nezávisí na volbě z (tj., kvantifikátor „pro každé z “ se přesouvá za kvantifikátor „existuje δ “).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitosť
limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z kapitoly o funkcích více proměnných nyní vyplývají některé základní vlastnosti spojitých funkcí, např. o zachování souvislosti složením a zachování kompaktnosti spojitým obrazem. Platí o něco více (použijí se příslušná tvrzení o spojitosti pro funkce z roviny do přímky).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z kapitoly o funkcích více proměnných nyní vyplývají některé základní vlastnosti spojitých funkcí, např. o zachování souvislosti složením a zachování kompaktnosti spojitým obrazem. Platí o něco více (použijí se příslušná tvrzení o spojitosti pro funkce z roviny do přímky).



VĚTA.

1. Součet, součin a podíl spojitých k funkcí je spojitá funkce.
2. Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.
3. Spojitý obraz křivkově souvislé množiny je křivkově souvislá množina.
4. Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.
5. Spojitá funkce na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá.
6. Prostá spojitá funkce na kompaktní množině má spojitou inverzní funkci.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla
komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod
topologie roviny
konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce
mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg . Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg . Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.



2. Spojitost složení je dokázána v kapitole o funkcích více proměnných (a plyne jednoduše z poslední charakterizující vlastnosti spojitosti o zachovávání limit posloupností).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg . Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.



2. Spojitost složení je dokázána v kapitole o funkcích více proměnných (a plyne jednoduše z poslední charakterizující vlastnosti spojitosti o zachovávání limit posloupností).



3. Necht' A je křivkově souvislá a f je spojitá funkce definovaná na A . Necht' $x, y \in f(A)$. Existují body $a, b \in A$ tak, že $f(a) = x, f(b) = y$ a křivka $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$ tak, že $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. Pak křivka $f \circ \varphi$ leží v $f(A)$ a spojuje body x, y .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg . Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.



2. Spojitost složení je dokázána v kapitole o funkcích více proměnných (a plyne jednoduše z poslední charakterizující vlastnosti spojitosti o zachovávání limit posloupností).



3. Necht' A je křivkově souvislá a f je spojitá funkce definovaná na A . Necht' $x, y \in f(A)$. Existují body $a, b \in A$ tak, že $f(a) = x, f(b) = y$ a křivka $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$ tak, že $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. Pak křivka $f \circ \varphi$ leží v $f(A)$ a spojuje body x, y .



4. Necht' A je kompaktní v \mathbb{C} a $\{z_n\}$ je posloupnost v $f(A)$. Zvolí se body $w_n \in A \cap f^{-1}(z_n)$. Protože A je kompaktní, existuje podposloupnost $\{w_{k_n}\}$ konvergující k nějakému $w \in A$. Protože f je spojitá, konverguje $\{z_{k_n}\}$ k $f(w) \in f(A)$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg . Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.



2. Spojitost složení je dokázána v kapitole o funkcích více proměnných (a plyne jednoduše z poslední charakterizující vlastnosti spojitosti o zachovávání limit posloupností).



3. Necht' A je křivkově souvislá a f je spojitá funkce definovaná na A . Necht' $x, y \in f(A)$. Existují body $a, b \in A$ tak, že $f(a) = x, f(b) = y$ a křivka $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$ tak, že $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. Pak křivka $f \circ \varphi$ leží v $f(A)$ a spojuje body x, y .



4. Necht' A je kompaktní v \mathbb{C} a $\{z_n\}$ je posloupnost v $f(A)$. Zvolí se body $w_n \in A \cap f^{-1}(z_n)$. Protože A je kompaktní, existuje podposloupnost $\{w_{k_n}\}$ konvergující k nějakému $w \in A$. Protože f je spojitá, konverguje $\{z_{k_n}\}$ k $f(w) \in f(A)$.



5. Necht' f je spojitá funkce na kompaktní množině A , která není stejnoměrně spojitá. Pak existuje $\varepsilon > 0$ a body $u_n, v_n \in A$ tak, že $|u_n - v_n| < 1/n$ a $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$. Protože A je kompaktní, lze najít konvergentní podposloupnosti $\{u_{k_n}\}, \{v_{k_n}\}$ konvergující k $u \in A$. Tím se dostává spor, protože $|f(u_{k_n}) - f(v_{k_n})|$ nekonverguje k 0.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Necht' je spojitá komplexní funkce f na kompaktní množině A prostá. Pro libovolný bod $b \in f(A)$ se ukáže, že f^{-1} je spojitá v b . Necht' tedy $\{b_n\}$ je posloupnost v $f(A)$ konvergující k b . Má se ukázat, že $f^{-1}(b_n)$ konverguje k $f^{-1}(b)$. Je-li $\{c_n\}$ libovolná podposloupnost posloupnosti $f^{-1}(b_n)$, lze z ní vybrat podposloupnost $\{c_{k_n}\}$ s nějakou limitou c . Protože f je spojitá, konverguje $f(c_{k_n})$ k $f(c)$ a tedy $f(c) = b$. Takže $\{c_{k_n}\}$ konverguje k $f^{-1}(b)$. Podle čtvrté vlastnosti konvergence posloupností konverguje $f^{-1}(b_n)$ k $f^{-1}(b)$. \diamond



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita funkce



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita funkce



Lze opět použít definice a tvrzení z kapitoly o funkcích více proměnných, takže pro funkci f je $\lim_{z \rightarrow u} f(z) = \lim_{z \rightarrow u} \Re(f)(z) + i \lim_{z \rightarrow u} \Im(f)(z)$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita funkce



Lze opět použít definice a tvrzení z kapitoly o funkcích více proměnných, takže pro funkci f je $\lim_{z \rightarrow u} f(z) = \lim_{z \rightarrow u} \Re(f)(z) + i \lim_{z \rightarrow u} \Im(f)(z)$.



Všechny základní vlastnosti limity reálné funkce platí i pro funkce v komplexním oboru, samozřejmě kromě těch používajících uspořádání. Ale i pro funkce v komplexním oboru lze dokázat některá tvrzení u kterých se v reálných funkcích používá uspořádání, např.

$$\lim_{z \rightarrow u} f(z) = 0, g \text{ je omezená v okolí } u \Rightarrow \lim_{z \rightarrow u} f(z)g(z) = 0.$$

Je to proto, že i pro komplexní funkce platí $\lim_{z \rightarrow u} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow u} |f(z)| = 0$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení lze výhodně použít v některých situacích, protože převádí limitu z komplexního oboru na reálný obor jinak než je rozklad na složky.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení lze výhodně použít v některých situacích, protože převádí limitu z komplexního oboru na reálný obor jinak než je rozklad na složky.



VĚTA. Necht' f je definována na otevřené množině M a $u \in M$. Pak $\lim_{z \rightarrow u} f(z) = A$ právě když pro každou křivku φ na $[0, 1]$ s vlastnostmi

$$\varphi(0) = u, \varphi : (0, 1] \rightarrow M$$

je $\lim_{t \rightarrow 0+} f(\varphi(t)) = A$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

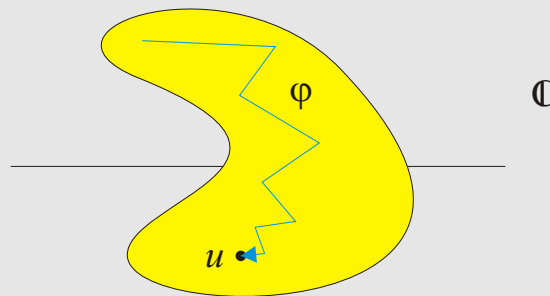
Následující tvrzení lze výhodně použít v některých situacích, protože převádí limitu z komplexního oboru na reálný obor jinak než je rozklad na složky.



VĚTA. Necht' f je definována na otevřené množině M a $u \in M$. Pak $\lim_{z \rightarrow u} f(z) = A$ právě když pro každou křivku φ na $[0, 1]$ s vlastnostmi

$$\varphi(0) = u, \varphi : (0, 1] \rightarrow M$$

je $\lim_{t \rightarrow 0+} f(\varphi(t)) = A$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Protože φ je spojitá, je nutnost podmínky zřejmá. Zbývá dokázat postačitelnost podmínky. Pro jednoduchost značení lze předpokládat, že $u = 0$ a že $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset M$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Protože φ je spojitá, je nutnost podmínky zřejmá. Zbývá dokázat postačitelnost podmínky. Pro jednoduchost značení lze předpokládat, že $u = 0$ a že $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset M$.



Nechť tedy $\lim_{z \rightarrow u} f(z) \neq A$. Pak existuje posloupnost $\{z_n\} \subset (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \{0\}$ konvergující k 0, přičemž $\lim f(z_n) \neq A$. Zřejmě lze posloupnost $\{z_n\}$ vybrat tak, že $\Re z_n$ a $\Im z_n$ konvergují k 0 monotónně, např. jsou klesající.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Protože φ je spojitá, je nutnost podmínky zřejmá. Zbývá dokázat postačitelnost podmínky. Pro jednoduchost značení lze předpokládat, že $u = 0$ a že $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset M$.



Nechť tedy $\lim_{z \rightarrow u} f(z) \neq A$. Pak existuje posloupnost $\{z_n\} \subset (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \{0\}$ konvergující k 0, přičemž $\lim f(z_n) \neq A$. Zřejmě lze posloupnost $\{z_n\}$ vybrat tak, že $\Re z_n$ a $\Im z_n$ konvergují k 0 monotónně, např. jsou klesající.



Nyní stačí vzít spojitou funkci na $[0, 1]$, která má v bodech $\Re z_n$ hodnoty $\Im z_n$. ◇



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Za křivku spojující body z_n lze vzít lomenou čáru. Není těžké ukázat, že lze vzít i hladkou křivku (navíc mající všechny derivace).

Cvičení 6

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZNÁMKY

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

1. Komplexně sdružené číslo $k z$ je v rovině znázorněno jako symetrické $k z$ podle reálné osy.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Zobrazení f , které přiřazuje komplexnímu číslu jeho komplexně sdružené číslo, je idempotentní, tj. $f^2 = f$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Protože $|rz| = |r||z|$ pro libovolné reálné číslo r , je absolutní hodnota na \mathbb{C} norma a \mathbb{C} s touto normou je Banachův prostor (viz kapitolu o Banachových prostorech). To ovšem platí pro libovolný Euklidovský prostor.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Protože $|rz| = |r||z|$ pro libovolné reálné číslo r , je absolutní hodnota na \mathbb{C} norma a \mathbb{C} s touto normou je Banachův prostor (viz kapitolu o Banachových prostorech). To ovšem platí pro libovolný Euklidovský prostor.



Vezme-li se však v úvahu i násobení komplexních čísel, tvoří \mathbb{C} Banachovu algebru a to už nastane jen pro \mathbb{R}^4 (tzv. kvaterniony), kde je ale násobení nekomutativní.

Konec poznámek 1.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

1. Zápisy pomocí i jsou mnohem pružnější než pomocí dvojic. Vzhledem ke komutativnosti sčítání a násobení znamenají následující zápisy totéž komplexní číslo:

$$-3 + i5, \quad -3 + 5i, \quad 5i - 3, \quad i5 - 3.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

1. Zápisy pomocí i jsou mnohem pružnější než pomocí dvojic. Vzhledem ke komutativnosti sčítání a násobení znamenají následující zápisy totéž komplexní číslo:

$$-3 + i5, \quad -3 + 5i, \quad 5i - 3, \quad i5 - 3.$$



Protože $i^2 = -1$, snadno se pomocí zápisu $x + iy$ provádí násobení a dělení čísel.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. V polárním zápisu čísla z se r nazývá *průvodič* a φ *argument* čísla z . Zobrazení \arg , které přiřazuje komplexnímu číslu jeho argument, není jednoznačné.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. V polárním zápisu čísla z se r nazývá *průvodič* a φ *argument* čísla z . Zobrazení \arg , které přiřazuje komplexnímu číslu jeho argument, není jednoznačné.



Lze se omezit jen na některé hodnoty argumentu, např. interval $[0, 2\pi)$ a potom je \arg jednoznačnou funkcí (kromě 0). Podrobnosti budou uvedeny v kapitole o elementárních funkcích.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. V polárním zápisu čísla z se r nazývá *průvodič* a φ *argument* čísla z . Zobrazení \arg , které přiřazuje komplexnímu číslu jeho argument, není jednoznačné.



Lze se omezit jen na některé hodnoty argumentu, např. interval $[0, 2\pi)$ a potom je \arg jednoznačnou funkcí (kromě 0). Podrobnosti budou uvedeny v kapitole o elementárních funkcích.



Bod $z = 0$ se obvykle nevyjadřuje pomocí polárních souřadnic. Pokud je to však nutné z formálních důvodů, je $r = |z| = 0$ a úhel φ může mít libovolnou velikost (tu je možné podmínkami omezit).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. V polárním zápisu čísla z se r nazývá *průvodič* a φ *argument* čísla z . Zobrazení \arg , které přiřazuje komplexnímu číslu jeho argument, není jednoznačné.



Lze se omezit jen na některé hodnoty argumentu, např. interval $[0, 2\pi)$ a potom je \arg jednoznačnou funkcí (kromě 0). Podrobnosti budou uvedeny v kapitole o elementárních funkcích.



Bod $z = 0$ se obvykle nevyjadřuje pomocí polárních souřadnic. Pokud je to však nutné z formálních důvodů, je $r = |z| = 0$ a úhel φ může mít libovolnou velikost (tu je možné podmínkami omezit).



BTW, nikdy nevíte, jakou nulu v životě potkáte. V polárních souřadnicích se nuly nemusíte bát vůbec.

Konec poznámek 2.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Někteří z vás si asi uvědomili, co je vlastně podstatné na rozšířené reálné přímce. Je to kompaktnost \mathbb{R}^* . A z téhož důvodu se rozšiřuje i \mathbb{C} .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Někteří z vás si asi uvědomili, co je vlastně podstatné na rozšířené reálné přímce. Je to kompaktnost \mathbb{R}^* . A z téhož důvodu se rozšiřuje i \mathbb{C} .



Jedno nekonečno.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Někteří z vás si asi uvědomili, co je vlastně podstatné na rozšířené reálné přímce. Je to kompaktnost \mathbb{R}^* . A z téhož důvodu se rozšiřuje i \mathbb{C} .



Jedno nekonečno.



Proč se rozšiřuje komplexní rovina jen o jedno nevlastní číslo, kdežto reálná přímka o dvě? Podívejte se na situaci z pohledu geometrie.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Někteří z vás si asi uvědomili, co je vlastně podstatné na rozšířené reálné přímce. Je to kompaktnost \mathbb{R}^* . A z téhož důvodu se rozšiřuje i \mathbb{C} .



Jedno nekonečno.



Proč se rozšiřuje komplexní rovina jen o jedno nevlastní číslo, kdežto reálná přímka o dvě? Podívejte se na situaci z pohledu geometrie.



Přímka „běží na dvě strany“ a může se uzavřít „dvěma konci“. Je možné si to přiblížit zúžením (zdeformováním) přímky na interval $(-1, 1)$, přičemž čím více se blížíme k bodu -1 nebo 1 , tím jdeme pomaleji (abychom vyjádřili fakt, že k těmto bodům nelze dojít). Nevlastní body pak odpovídají oběma „koncům“, neboli hranici intervalu na přímce.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Někteří z vás si asi uvědomili, co je vlastně podstatné na rozšířené reálné přímce. Je to kompaktnost \mathbb{R}^* . A z téhož důvodu se rozšiřuje i \mathbb{C} .



Jedno nekonečno.



Proč se rozšiřuje komplexní rovina jen o jedno nevlastní číslo, kdežto reálná přímka o dvě? Podívejte se na situaci z pohledu geometrie.



Přímka „běží na dvě strany“ a může se uzavřít „dvěma konci“. Je možné si to přiblížit zúžením (zdeformováním) přímky na interval $(-1, 1)$, přičemž čím více se blížíme k bodu -1 nebo 1 , tím jdeme pomaleji (abychom vyjádřili fakt, že k těmto bodům nelze dojít). Nevlastní body pak odpovídají oběma „koncům“, neboli hranici intervalu na přímce.



To je přesné. ANO.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobná interpretace v rovině je komplikovanější. Zúženou rovinu může někdo vidět jako vnitřek kruhu nebo jako vnitřek čtverce, nebo obdélníka, mnohoúhelníka, apod. Všechny tyto případy mají jedno společné. Jejich hranice je jednoduchá uzavřená křivka. Bylo by možné vzít za nevlastní body jednotlivé body této hranice, ale tím by existovalo nekonečně mnoho (nespočetně mnoho) nevlastních bodů, což není vhodné (a navíc tyto body nemají potřebné vlastnosti).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobná interpretace v rovině je komplikovanější. Zúženou rovinu může někdo vidět jako vnitřek kruhu nebo jako vnitřek čtverce, nebo obdélníka, mnohoúhelníka, apod. Všechny tyto případy mají jedno společné. Jejich hranice je jednoduchá uzavřená křivka. Bylo by možné vzít za nevlastní body jednotlivé body této hranice, ale tím by existovalo nekonečně mnoho (nespočetně mnoho) nevlastních bodů, což není vhodné (a navíc tyto body nemají potřebné vlastnosti).



Lze vzít jen konečně mnoho nevlastních čísel? Ano, pokud se vezme celá křivka jako jeden bod. Tím se dostává jedno nekonečno. Mít dvě nekonečna by znamenalo rozdělit křivku na dvě disjunktní části, ale které? Křivka je souvislá množina, kdežto předchozí hranice u reálné přímky byla nespojitá a skládala se ze dvou souvislých částí.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobná interpretace v rovině je komplikovanější. Zúženou rovinu může někdo vidět jako vnitřek kruhu nebo jako vnitřek čtverce, nebo obdélníka, mnohoúhelníka, apod. Všechny tyto případy mají jedno společné. Jejich hranice je jednoduchá uzavřená křivka. Bylo by možné vzít za nevlastní body jednotlivé body této hranice, ale tím by existovalo nekonečně mnoho (nespočetně mnoho) nevlastních bodů, což není vhodné (a navíc tyto body nemají potřebné vlastnosti).



Lze vzít jen konečně mnoho nevlastních čísel? Ano, pokud se vezme celá křivka jako jeden bod. Tím se dostává jedno nekonečno. Mít dvě nekonečna by znamenalo rozdělit křivku na dvě disjunktní části, ale které? Křivka je souvislá množina, kdežto předchozí hranice u reálné přímky byla nespojitá a skládala se ze dvou souvislých částí.



To je ten podstatný rozdíl mezi přímkou a Euklidovským prostorem dimenze aspoň dvě. Dá se ukázat, že není možné získat z roviny kompaktní prostor přidáním n bodů, $n > 1$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sféra versus \mathbb{C} .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sféra versus \mathbb{C} .



Kdo má dobrou představivost, může poznat, že předchozí ztotožnění hranice kruhu do jednoho bodu vytvořilo útvar podobný sféře, tj. hranici koule v \mathbb{R}^3 .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sféra versus \mathbb{C} .



Kdo má dobrou představivost, může poznat, že předchozí ztotožnění hranice kruhu do jednoho bodu vytvořilo útvar podobný sféře, tj. hranici koule v \mathbb{R}^3 .



Takhle dělám jablka v županu.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sféra versus \mathbb{C} .



Kdo má dobrou představivost, může poznat, že předchozí ztotožnění hranice kruhu do jednoho bodu vytvořilo útvar podobný sféře, tj. hranici koule v \mathbb{R}^3 .



Takhle dělám jablka v županu.



Následující řádky to popíší přesněji.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Necht' S je sféra $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól“ $(0,0,1)$.
Rovina \mathbb{C} se ztotožní s rovinou os x, y , tj. množinou $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' S je sféra $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól“ $(0,0,1)$.
Rovina \mathbb{C} se ztotožní s rovinou os x, y , tj. množinou $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.



Tzv. stereografická projekce je prosté zobrazení $S \setminus \{P\}$ na \mathbb{C} : vezme se přímka procházející bodem P , která není rovnoběžná s \mathbb{C} – ta protíná sféru S přesně v jednom dalším bodě a rovinu \mathbb{C} taky přesně v jednom bodě, jeho stereografickém obraze.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

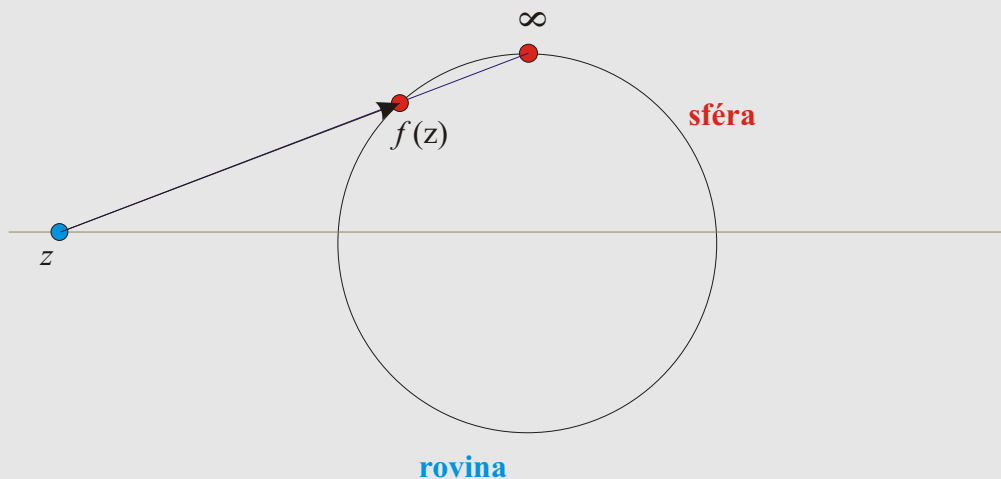
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' S je sféra $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól“ $(0,0,1)$. Rovina \mathbb{C} se ztotožní s rovinou os x, y , tj. množinou $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.



Tzv. stereografická projekce je prosté zobrazení $S \setminus \{P\}$ na \mathbb{C} : vezme se přímka procházející bodem P , která není rovnoběžná s \mathbb{C} – ta protíná sféru S přesně v jednom dalším bodě a rovinu \mathbb{C} taky přesně v jednom bodě, jeho stereografickém obraze.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Sféra S tedy slouží jako model rozšířené komplexní roviny \mathbb{C}^* , přičemž P odpovídá nevlastnímu bodu ∞ .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sféra S tedy slouží jako model rozšířené komplexní roviny \mathbb{C}^* , přičemž P odpovídá nevlastnímu bodu ∞ .



Tento model není vhodný pro algebraické operace, ale je velmi vhodný pro interpretace topologických vlastností, protože je to hezký kompaktní prostor.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sféra S tedy slouží jako model rozšířené komplexní roviny \mathbb{C}^* , přičemž P odpovídá nevlastnímu bodu ∞ .



Tento model není vhodný pro algebraické operace, ale je velmi vhodný pro interpretace topologických vlastností, protože je to hezký kompaktní prostor.



Samozřejmě, metrika v S je jiná než v \mathbb{C} , ale tyto dvě metriky jsou ekvivalentní, tj. dávají stejnou konvergenci (viz *Otázky*). Takže např. podmnožina $S \setminus \{P\}$ je otevřená právě když její stereografický obraz je otevřený v \mathbb{C} .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sféra S tedy slouží jako model rozšířené komplexní roviny \mathbb{C}^* , přičemž P odpovídá nevlastnímu bodu ∞ .



Tento model není vhodný pro algebraické operace, ale je velmi vhodný pro interpretace topologických vlastností, protože je to hezký kompaktní prostor.



Samozřejmě, metrika v S je jiná než v \mathbb{C} , ale tyto dvě metriky jsou ekvivalentní, tj. dávají stejnou konvergenci (viz *Otázky*). Takže např. podmnožina $S \setminus \{P\}$ je otevřená právě když její stereografický obraz je otevřený v \mathbb{C} .



Uvedený model \mathbb{C}^* ve tvaru sféry bude v dalším nazýván *Riemannova sféra*.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je možné použít jinou projekci koule na rovinu, např. se za \mathbb{C} vezme tečná rovina v „jižním pólu“ koule a vezme se projekce ze severního pólu na tuto tečnou rovinu.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

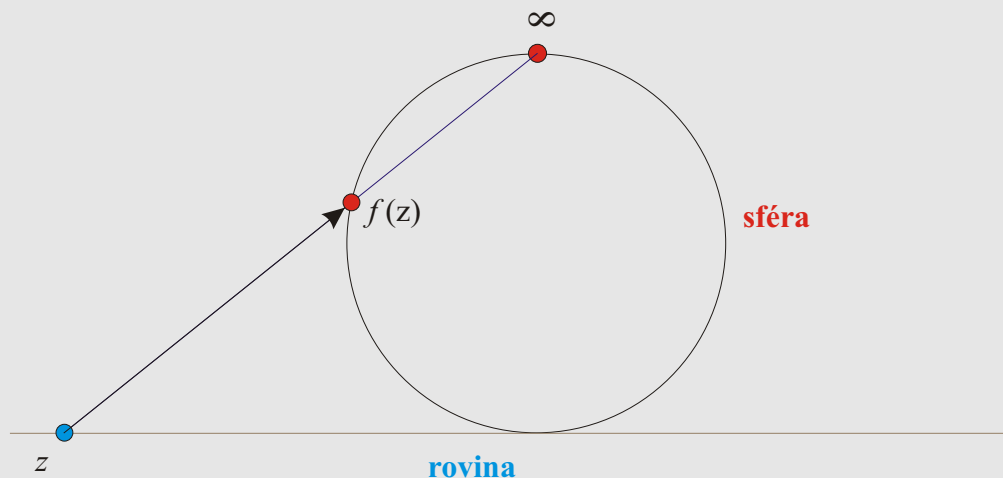
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je možné použít jinou projekci koule na rovinu, např. se za \mathbb{C} vezme tečná rovina v „jižním pólu“ koule a vezme se projekce ze severního pólu na tuto tečnou rovinu.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Aneb, tak se nám pěkně zakulatila.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Aneb, tak se nám pěkně za-
kulatila.



A jak bývala pěkně placatá.

Konec poznámek 3.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

Pojem souvislosti je pojem závisející jen na konvergenci (spojitost funkce). Stejně tomu tak je i u křivkově souvislých množin a jednoduše souvislých množin.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

Pojem souvislosti je pojem závisející jen na konvergenci (spojitost funkce). Stejně tomu tak je i u křivkově souvislých množin a jednoduše souvislých množin.



V praxi se vyskytující oblasti mívají za hranice jen konečně mnoho po částech hladkých křivek nebo bodů nebo (polo)přímek. Pokud je pak takováto oblast jednoduše souvislá a omezená, její hranice je jednoduchá po částech hladká uzavřená křivka.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

Pojem souvislosti je pojem závisející jen na konvergenci (spojitost funkce). Stejně tomu tak je i u křivkově souvislých množin a jednoduše souvislých množin.



V praxi se vyskytující oblasti mívají za hranice jen konečně mnoho po částech hladkých křivek nebo bodů nebo (polo)přímek. Pokud je pak takováto oblast jednoduše souvislá a omezená, její hranice je jednoduchá po částech hladká uzavřená křivka.



Podobně, jako tomu bylo u intervalů, se používá občas i u oblastí pojem polouzavřená oblast, což je oblast spolu s některými body své hranice. V některých textech se pod pojmem oblast míní jen omezená oblast, pak uzavřená oblast je kompaktní.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

Pojem souvislosti je pojem závisející jen na konvergenci (spojitost funkce). Stejně tomu tak je i u křivkově souvislých množin a jednoduše souvislých množin.



V praxi se vyskytující oblasti mívají za hranice jen konečně mnoho po částech hladkých křivek nebo bodů nebo (polo)přímek. Pokud je pak takováto oblast jednoduše souvislá a omezená, její hranice je jednoduchá po částech hladká uzavřená křivka.



Podobně, jako tomu bylo u intervalů, se používá občas i u oblastí pojem polouzavřená oblast, což je oblast spolu s některými body své hranice. V některých textech se pod pojmem oblast míní jen omezená oblast, pak uzavřená oblast je kompaktní.



Dá se ukázat (ale důkaz je složitý), že spojitý prostý obraz oblasti je zase oblast. Odtud již jednoduše plyne, že příslušná funkce má spojitou inverzi.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

Pojem souvislosti je pojem závisející jen na konvergenci (spojitost funkce). Stejně tomu tak je i u křivkově souvislých množin a jednoduše souvislých množin.



V praxi se vyskytující oblasti mívají za hranice jen konečně mnoho po částech hladkých křivek nebo bodů nebo (polo)přímek. Pokud je pak takováto oblast jednoduše souvislá a omezená, její hranice je jednoduchá po částech hladká uzavřená křivka.



Podobně, jako tomu bylo u intervalů, se používá občas i u oblastí pojem polouzavřená oblast, což je oblast spolu s některými body své hranice. V některých textech se pod pojmem oblast míní jen omezená oblast, pak uzavřená oblast je kompaktní.



Dá se ukázat (ale důkaz je složitý), že spojitý prostý obraz oblasti je zase oblast. Odtud již jednoduše plyne, že příslušná funkce má spojitou inverzi.



Bavíme se zde o těstě na pizzu. Tomu dobře rozumím.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec poznámek 4.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

Termín *mnohoznačná funkce* je nutné brát jako celek.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

Termín *mnohoznačná funkce* je nutné brát jako celek.



Některá matematická pojmenování jsou vytvořena "v dobré víře", a tak nelze za takové věci nikoho odsoudit ani potrestat. Ale do průvanu bych semtam někoho strčil.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

Termín *mnohoznačná funkce* je nutné brát jako celek.



Některá matematická pojmenování jsou vytvořena "v dobré víře", a tak nelze za takové věci nikoho odsoudit ani potrestat. Ale do průvanu bych semtam někoho strčil.



Podle definice je funkce vždy jednoznačná a tedy chápání uvedeného termínu jako spojení dvou termínů *mnohoznačná a funkce* by bylo nesmyslné.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla
komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod
topologie roviny
konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost
funkce
mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

Termín *mnohoznačná funkce* je nutné brát jako celek.



Některá matematická pojmenování jsou vytvořena "v dobré víře", a tak nelze za takové věci nikoho odsoudit ani potrestat. Ale do průvanu bych semtam někoho strčil.



Podle definice je funkce vždy jednoznačná a tedy chápání uvedeného termínu jako spojení dvou termínů *mnohoznačná a funkce* by bylo nesmyslné.



Nicméně, vzhledem k průhlednosti situace se používají bez problému se srozumitelností výrazy typu „funkce f je mnohoznačná”.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla
komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod
topologie roviny
konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost
funkce
mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Mnohoznačná funkce v tomto textu bude mít na svém definičním oboru vždy nějaké hodnoty (tj., pro $z \in \mathcal{D}_f$ je množina $f(z)$ neprázdná).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Mnohoznačná funkce v tomto textu bude mít na svém definičním oboru vždy nějaké hodnoty (tj., pro $z \in \mathcal{D}_f$ je množina $f(z)$ neprázdná).



Je-li f mnohoznačné zobrazení na G , pro každé $z \in G$ vyberte jen jednu hodnotu z množiny $f(z)$ (označte ji $F(z)$), dostane se funkce F na G , která se nazývá (jednoznačná) větev funkce f .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Mnohoznačná funkce v tomto textu bude mít na svém definičním oboru vždy nějaké hodnoty (tj., pro $z \in \mathcal{D}_f$ je množina $f(z)$ neprázdná).



Je-li f mnohoznačné zobrazení na G , pro každé $z \in G$ vyberte jen jednu hodnotu z množiny $f(z)$ (označte ji $F(z)$), dostane se funkce F na G , která se nazývá (jednoznačná) větev funkce f .



Jsem z toho na větvi.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

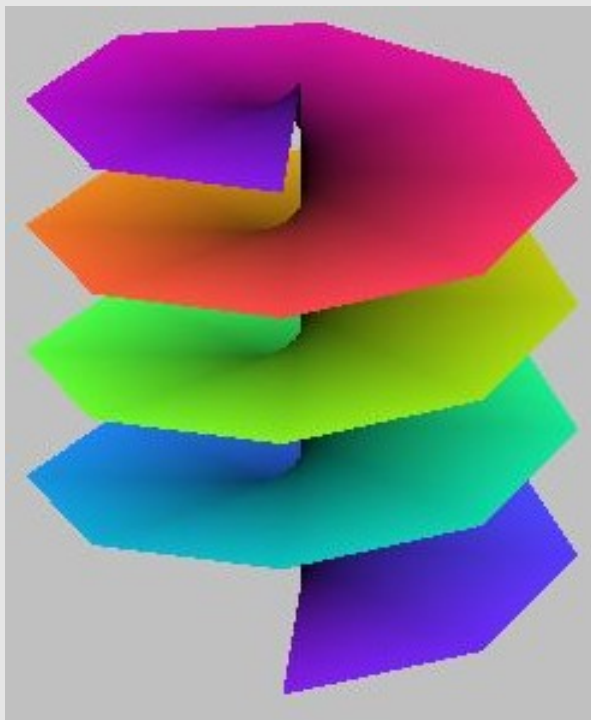
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Grafem mnohoznačné funkce imaginární část logaritmu je schodiště.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ty větve tu byly ty patra.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

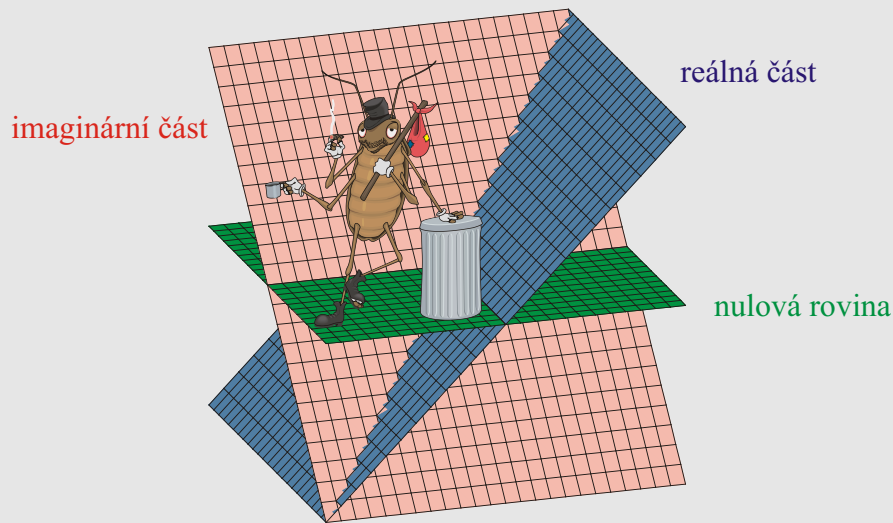
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Veliký rozdíl oproti reálným funkcím je ve znázornění funkcí v komplexním oboru. Graf reálné funkce (jedné nebo dvou proměnných) si lze představit, nebo i narýsovat, ale u funkce s komplexními hodnotami to nejde. Částečnou možností je představa grafu reálné složky a grafu imaginární složky.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
 absolutní hodnota
 imaginární jednotka
 průvodič
 argument
 Moivreovy vzorce
 nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
 souvislá množina
 oblast
 křivková souvislost
 jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
 spojitost
 limita funkce

STANDARDY

Poznámky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jak bylo poznamenáno, nemá smysl hovořit u funkcí s komplexními hodnotami o extrémích. Pokud má funkce f jen reálné hodnoty, smysl to má. To jsou např. funkce $\Re(z)$, $\Im(z)$, $|z|$ a zvláště u poslední funkce se existence maxima a minima na kompaktních množinách používá.

Konec poznámek 5.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PŘÍKLADY

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Množina komplexních čísel z splňujících nerovnost $|z - z_0| < \varepsilon$, pro dané komplexní číslo z_0 a reálné číslo $\varepsilon > 0$, je vnitřek kruhu o středu z_0 a poloměru ε . To se snadno ukáže použitím vzdálenosti místo absolutní hodnoty.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Pokud je třeba vyjádřit podíl dvou komplexních čísel jako dvojice reálných čísel, rozšíří se zlomek komplexně sdruženým jmenovatelem. Například pro podíl z/w , kde $z = (x, y)$, $w = (u, v)$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \left(\frac{xu - yv}{u^2 + v^2}, \frac{xv + yu}{u^2 + v^2} \right).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Pokud je třeba vyjádřit podíl dvou komplexních čísel jako dvojice reálných čísel, rozšíří se zlomek komplexně sdruženým jmenovatelem. Například pro podíl z/w , kde $z = (x, y)$, $w = (u, v)$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \left(\frac{xu - yv}{u^2 + v^2}, \frac{xv + yu}{u^2 + v^2} \right).$$



Pěkně ošklivé.

Konec příkladů 1.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

1. Pomocí imaginárního čísla i vypočítejte součin $(8-2i)(3i-1)$ a podíl $(3-2i)/(i-7)$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Popište množinu bodů z splňující rovnost $|z - i| = |z + i|$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Popište množinu bodů z splňující rovnost $|z - i| = |z + i|$.



Kouká z toho reálná osa.



LEKCE31-KOM

- komplexní čísla
 - komplexně sdružené číslo
 - absolutní hodnota
 - imaginární jednotka
 - průvodič
 - argument
 - Moivreovy vzorce
 - nevlastní bod
- topologie roviny
 - konvergence
 - souvislá množina
 - oblast
 - křivková souvislost
 - jednoduchá souvislost
- funkce
 - mnohoznačná funkce
 - spojitost
 - limita funkce
- STANDARDY**
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Popište množiny bodů z splňující nerovnosti $\Re(z) > 4$ nebo $|\Im(z)| < 1$ nebo $\Re(1/z) < 2$ nebo $\Im(z^2) > 0$ nebo $\arg(z) \in (\pi/4, \pi)$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Popište množiny bodů z splňující nerovnosti $\Re(z) > 4$ nebo $|\Im(z)| < 1$ nebo $\Re(1/z) < 2$ nebo $\Im(z^2) > 0$ nebo $\arg(z) \in (\pi/4, \pi)$.



A za chvíli budete v komplexní rovině jako doma.

Konec příkladů 2.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

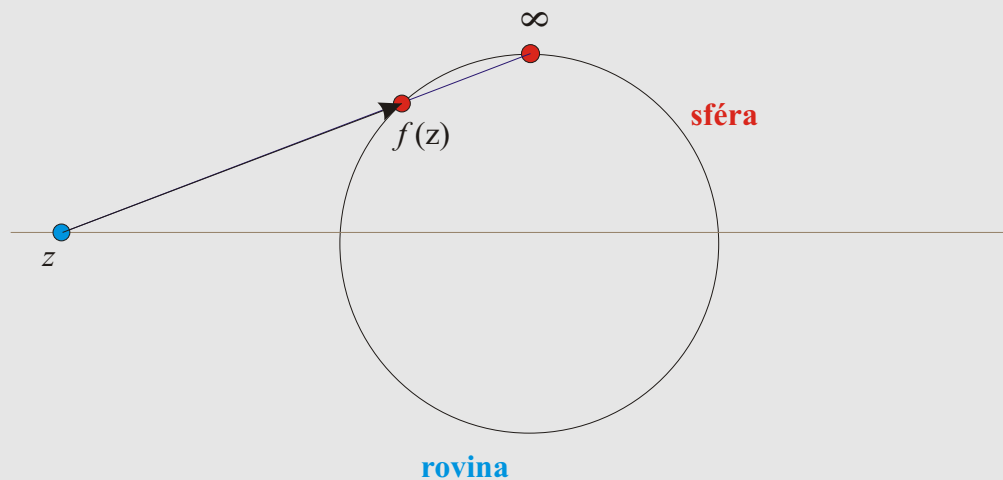
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

1. Vezměte na Riemannově sféře libovolný bod w odpovídající bodu z v \mathbb{C} . Kde budou ležet na Riemannově sféře body odpovídající bodům \bar{z} , $-z$, $1/z$?



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

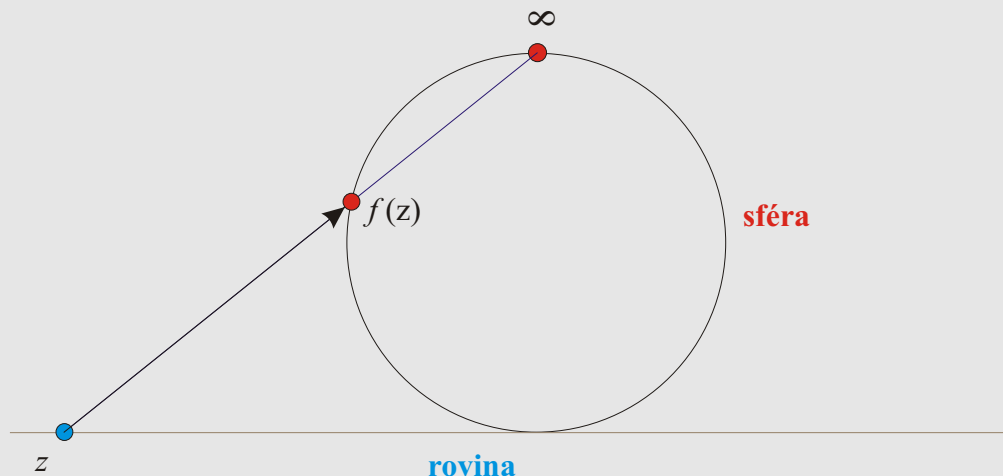
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Jak se změní situace, když vezmete místo Riemannovy sféry sféru, jejíž je \mathbb{C} tečnou rovinou a jižní pól je bod 0 v \mathbb{C} . Kam se zobrazí „rovník“ v tomto případě a v případě Riemannovy sféry?



LEKCE31-KOM

- komplexní čísla
 - komplexně sdružené číslo
 - absolutní hodnota
 - imaginární jednotka
 - průvodič
 - argument
 - Moivreovy vzorce
 - nevlastní bod
- topologie roviny
 - konvergence
 - souvislá množina
 - oblast
 - křivková souvislost
 - jednoduchá souvislost
- funkce
 - mnohoznačná funkce
 - spojitost
 - limita funkce
- STANDARDY**
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ukažte, že $z_n \rightarrow \infty$ právě když $|z_n| \rightarrow +\infty$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ukažte, že okolí ∞ v \mathbb{C}^* jsou právě doplňky omezených množin v \mathbb{C} spolu s bodem ∞ .

Konec příkladů 3.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

1. Každá křivka je křivkově souvislá.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Vnitřky kruhu, elipsy, čtverce, apod., jsou jednoduše souvislé. Mezikružní není jednoduše souvislé.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Jaké z vlastností *křivkově souvislá množina*, *jednoduše souvislá množina*, *oblast*, *uzavřená oblast* mají následující množiny komplexních čísel dané nerovnostmi

$$0 < |z| < 1, 1 < |\Re(z)| < 3, \Im(z) \in [0, 1], |z^2 - 1| < 1, 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2?$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

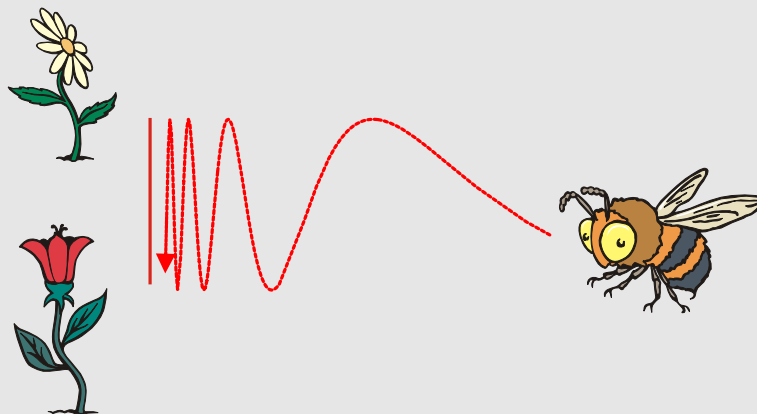
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Kompaktní množina $K = \{(x, \sin(1/x)); x \in (0, 1/\pi]\} \cup \{(0, y); y \in [-1, 1]\}$ je souvislá a není křivkově souvislá. (Uvědomte si, že první množina v uvedeném sjednocení je graf spojitě funkce a každá konečněhodnotová spojitá funkce na ní bude konstantní – druhý sčítanec leží v uzávěru první množiny. Ukažte, že body $(0, 0)$, $(1/\pi, 0)$ nelze spojit křivkou ležící v K .)



Konec příkladů 4.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

1. Jaký je definiční obor funkce

$$f(x, y) = y^3 \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt + i \sum_{n=0}^{+\infty} y^n ?$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Jako příklady funkcí mohou sloužit výrazy

$$|z|, \Re(z), \Im(z), \bar{z}.$$

Zjistěte jejich definiční obor a body, ve kterých jsou spojité.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Polynom je funkce tvaru $c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$, racionální funkce je podíl dvou polynomů. Zjistěte definiční obor těchto funkcí a body, ve kterých jsou spojité.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Najděte reálnou a imaginární složku polynomu $z^2 + 2iz - 3$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Dokažte, že Arg je funkce spojitá všude kromě polopřímky $(-\infty, 0]$. Ve kterých bodech je spojitá funkce na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, která bodu z přiřazuje jeho argument ležící v intervalu $[0, 2\pi)$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Ukažte, že funkce $1/z : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá. Je spojitá i funkce $1/z : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, která zobrazí 0 do ∞ a ∞ do 0?



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Je-li w izolovaný bod definičního oboru funkce f , je f v bodě w spojitá.

Konec příkladů 5.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OTÁZKY

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

Komplexně sdružená čísla.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

Komplexně sdružená čísla.



1. Ukažte, že $\bar{z} = z$ právě když je z reálné číslo.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

Komplexně sdružená čísla.



1. Ukažte, že $\bar{z} = z$ právě když je z reálné číslo.



2. Dokažte následující vlastnosti:

$$\begin{aligned}z + \bar{z} &= 2\Re(z), \quad z - \bar{z} = 2\Im(z) \\ \overline{\bar{z}} &= z \\ \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\end{aligned}$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla	
komplexně sdružené číslo	
absolutní hodnota	
imaginární jednotka	
průvodič	
argument	
Moivreovy vzorce	
nevlastní bod	
topologie roviny	
konvergence	
souvislá množina	
oblast	
křivková souvislost	
jednoduchá souvislost	
funkce	
mnohoznačná funkce	
spojitost	
limita funkce	
STANDARDY	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vzdálenost.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vzdálenost.



3. Ukažte, že vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je rovna $|z_1 - z_2|$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vzdálenost.



3. Ukažte, že vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je rovna $|z_1 - z_2|$.



4. Dokažte následující vlastnosti absolutní hodnoty:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$|z| = |-z|$$

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$\Re(z) \leq |z|, \Im(z) \leq |z|, \Re(z) + \Im(z) \leq |z|\sqrt{2}.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Ukažte, že bod $(z_1 + z_2)/2$ je středem úsečky spojující body z_1, z_2 .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Ukažte, že vzdálenost komplexních čísel je *invariantní vůči posunutí*, tj. vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je stejná jako vzdálenost čísel $z_1 + z, z_2 + z$ pro libovolné komplexní číslo z . Platí obdobné tvrzení pro násobení místo sčítání?

Konec otázek 1.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota
imaginární jednotka

průvodič
argument

Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce

spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Dokažte následující vyjádření argumentu bodu $z = x + iy$ pomocí funkce arctg :

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (2k + 1)\pi, & x < 0. \end{cases}$$

Zjistěte, zda uvedené rovnosti platí (pomocí limit) i pro $x = 0, y \neq 0$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Dokažte uvedené Moivreovy vzorce. Nejdříve ukažte pomocí součtových vzorců pro sin, cos, že platí

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ukažte pomocí indukce platnost klasického Moivreova vzorce

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Tento vzorec platí i pro $z = 0$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ukažte pomocí indukce platnost klasického Moivreova vzorce

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Tento vzorec platí i pro $z = 0$.



Uvědomte si důsledek Moivreova vzorce pro dělení a volbu $z_1 = 1$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} (\cos(\arg(z)) - i \sin(\arg(z)))$$

a jeho zobecnění pro z^{-n} .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Jestliže pro $n \in \mathbb{N}$ značí $\sqrt[n]{z}$ ta komplexní čísla w , pro která je $w^n = z$, pak

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\varphi/n) + i \sin(\varphi/n)).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Jestliže pro $n \in \mathbb{N}$ značí $\sqrt[n]{z}$ ta komplexní čísla w , pro která je $w^n = z$, pak

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\varphi/n) + i \sin(\varphi/n)).$$



V kapitole o elementárních funkcích se dozvíte o existenci a nejednoznačnosti odmocnin a problémech s tím spojených. Předchozí rovnost byste si měli promyslet např. pro $n = 2$, kdy pro každé $z \neq 0$ existují dvě různé druhé odmocniny.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Jestliže pro $n \in \mathbb{N}$ značí $\sqrt[n]{z}$ ta komplexní čísla w , pro která je $w^n = z$, pak

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\varphi/n) + i \sin(\varphi/n)).$$



V kapitole o elementárních funkcích se dozvíte o existenci a nejednoznačnosti odmocnin a problémech s tím spojených. Předchozí rovnost byste si měli promyslet např. pro $n = 2$, kdy pro každé $z \neq 0$ existují dvě různé druhé odmocniny.



Odmocnina je test celistvosti vašeho myšlení. Už o ní vlastně všechno víte, ale zatím to nedává smysl.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Vlastně myslíme na takovouhle blbinku, není-liž pravda?

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

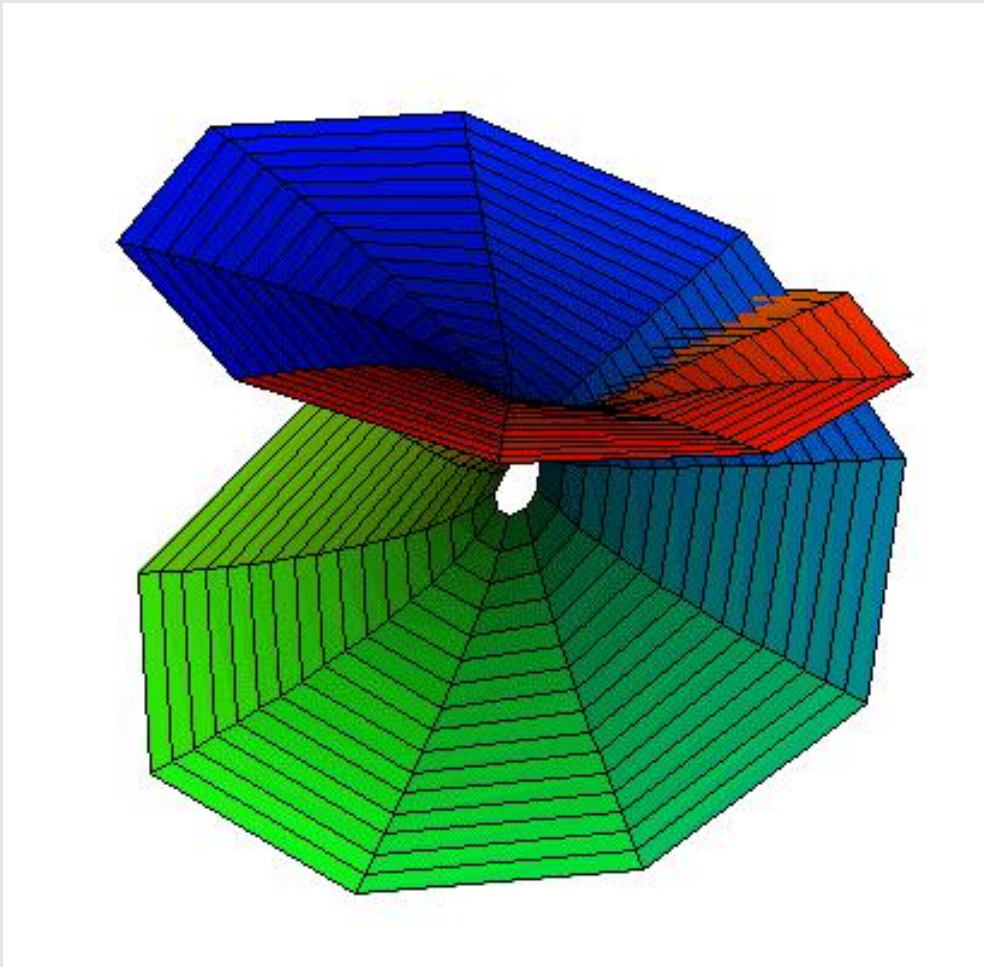
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Konec otázek 2.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

1. Uvažte, proč součet $\infty + \infty$ je nyní neurčitým výrazem (v reálných číslech se tento součet rovná ∞).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Uvažte, proč lze, na rozdíl od reálných čísel, definovat $z/0 = \infty$ pro libovolná $z \neq 0$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

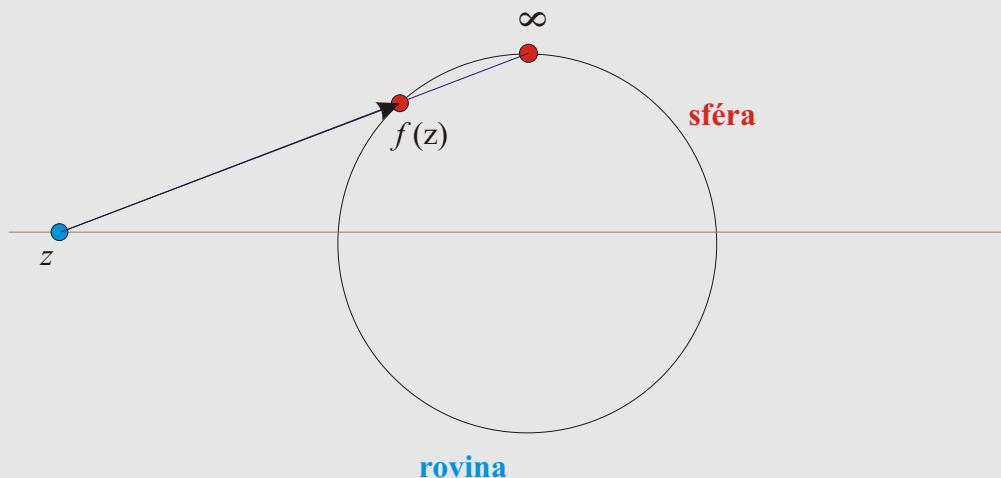
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Označí-li se projekce Riemannovy sféry na \mathbb{C} písmenem p , bude nová metrika ρ na \mathbb{C} definována rovností $\rho(z, w) = d(p^{-1}(z), p^{-1}(w))$, kde d je obvyklá Euklidovská metrika v \mathbb{R}^3 .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

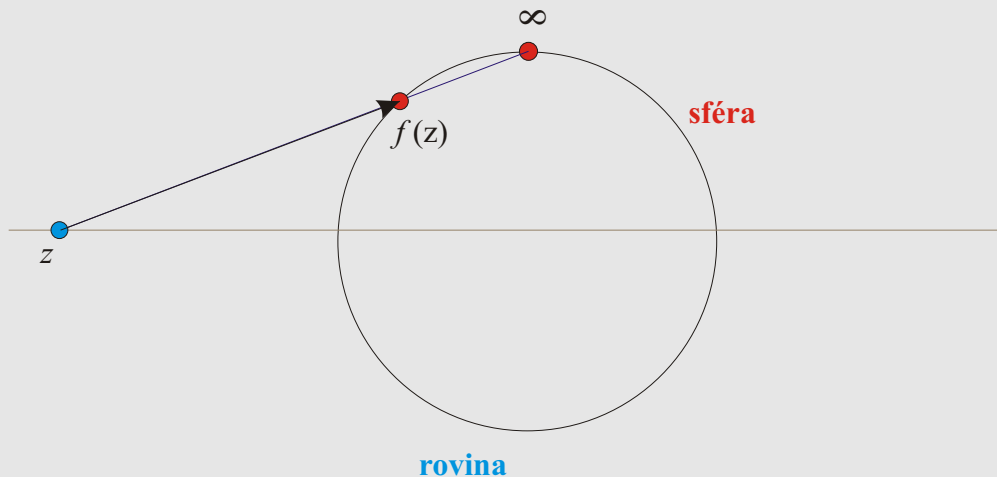
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Označí-li se projekce Riemannovy sféry na \mathbb{C} písmenem p , bude nová metrika ρ na \mathbb{C} definována rovností $\rho(z, w) = d(p^{-1}(z), p^{-1}(w))$, kde d je obvyklá Euklidovská metrika v \mathbb{R}^3 .



Ukažte, že platí:

$$\rho(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

(a) Ukažte, že metriky d a ρ jsou ekvivalentní (tj., mají stejné konvergentní posloupnosti).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

(a) Ukažte, že metriky d a ρ jsou ekvivalentní (tj., mají stejné konvergentní posloupnosti).



(b) Jestliže se bod w blíží k ∞ , konverguje vzdálenost k

$$\rho(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}},$$

což rozšiřuje ρ na metriku na celém \mathbb{C}^* .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

(a) Ukažte, že metriky d a ρ jsou ekvivalentní (tj., mají stejné konvergentní posloupnosti).



(b) Jestliže se bod w blíží k ∞ , konverguje vzdálenost k

$$\rho(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}},$$

což rozšiřuje ρ na metriku na celém \mathbb{C}^* .



(c) Ukažte, že s touto rozšířenou metrikou ρ je \mathbb{C}^* kompaktní.

Konec otázek 3.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

1. Ukažte, že otevřená množina je křivkově souvislá, právě když je souvislá.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. V \mathbb{R} jsou jedinými souvislými množinami intervaly, body a prázdná množina. Které z těchto souvislých množin jsou jednoduše souvislé?

Konec otázek 4.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 5 :

1. Ukažte, že funkce $|z|$ nabývá na uzavřené (i nekompaktní) množině svého minima. Musí nabývat i svého maxima?



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Předpokládejte, že víte, že spojitý obraz omezené oblasti je oblast. Ukažte, že potom má každá spojitá a prostá funkce na oblasti spojitě inverzní zobrazení.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Napište přesně definici stejnoměrně spojitě funkce z \mathbb{C} do \mathbb{C} a uvažte, která z charakterizací spojitosti lze modifikovat na charakterizaci stejnoměrné spojitosti.

Konec otázek 5.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CVIČENÍ

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^3 .$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$



Řešení. Pro počítání mocnin a odmocnin komplexních čísel se hodí goniometrický tvar, ale v tomto případě si vystačíme bez něj.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$



Řešení. Pro počítání mocnin a odmocnin komplexních čísel se hodí goniometrický tvar, ale v tomto případě si vystačíme bez něj.



Neříkám ani tak ani tak, ale
na moje slova dojde.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$



Řešení. Pro počítání mocnin a odmocnin komplexních čísel se hodí goniometrický tvar, ale v tomto případě si vystačíme bez něj.



Neříkám ani tak ani tak, ale
na moje slova dojde.



Podíl dvou komplexních čísel spočítáme tak, že zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli:



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$



Řešení. Pro počítání mocnin a odmocnin komplexních čísel se hodí goniometrický tvar, ale v tomto případě si vystačíme bez něj.



Neříkám ani tak ani tak, ale na moje slova dojde.



Podíl dvou komplexních čísel spočítáme tak, že zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli:



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\frac{1+i}{1-x} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\frac{1+i}{1-x} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$$



Nyní už zbývá jen spočítat i^3 , což je samozřejmě $-i$. Reálná část je tedy 0, imaginární část je -1 .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

↓
Nyní už zbývá jen spočítat i^3 , což je samozřejmě $-i$. Reálná část je tedy 0, imaginární část je -1 .



To kouzlo se sdruženou je neuvěřitelně kruté.

↓

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$$



Nyní už zbývá jen spočítat i^3 , což je samozřejmě $-i$. Reálná část je tedy 0, imaginární část je -1 .



To kouzlo se sdruženou je neuvěřitelně kruté.



Já se taky rád družím.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 1.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte $(1 + i)^{20}$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte $(1 + i)^{20}$.



Řešení. Výraz typu $(a+b)^n$ jsme zvyklí počítat přes binomickou větu, jenže pro vysoké mocniny je to příliš pracné.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte $(1 + i)^{20}$.



Řešení. Výraz typu $(a+b)^n$ jsme zvyklí počítat přes binomickou větu, jenže pro vysoké mocniny je to příliš pracné.



Zkusil jsem.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte $(1 + i)^{20}$.



Řešení. Výraz typu $(a+b)^n$ jsme zvyklí počítat přes binomickou větu, jenže pro vysoké mocniny je to příliš pracné.



Zkusil jsem.



Proto zde s výhodou použijeme goniometrický tvar komplexního čísla



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte $(1 + i)^{20}$.



Řešení. Výraz typu $(a+b)^n$ jsme zvyklí počítat přes binomickou větu, jenže pro vysoké mocniny je to příliš pracné.



Zkusil jsem.



Proto zde s výhodou použijeme goniometrický tvar komplexního čísla



$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte $(1 + i)^{20}$.



Řešení. Výraz typu $(a+b)^n$ jsme zvyklí počítat přes binomickou větu, jenže pro vysoké mocniny je to příliš pracné.



Zkusil jsem.



Proto zde s výhodou použijeme goniometrický tvar komplexního čísla



$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na tu $\sqrt{2}$ jsme přišli tak, že jsme spočítali absolutní hodnotu

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na tu $\sqrt{2}$ jsme přišli tak, že jsme spočítali absolutní hodnotu

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$



Když si nakreslíte obrázek, okamžitě uvidíte, že úhel je $\frac{\pi}{4}$. Máme tedy číslo v goniometrickém tvaru a to již snadno umocníme:



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na tu $\sqrt{2}$ jsme přišli tak, že jsme spočítali absolutní hodnotu

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$



Když si nakreslíte obrázek, okamžitě uvidíte, že úhel je $\frac{\pi}{4}$. Máme tedy číslo v goniometrickém tvaru a to již snadno umocníme:



$$\begin{aligned}(1 + i)^{20} &= \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^{20} \\ &= 2^{10} \left(\cos \frac{20\pi}{4} + i \sin \frac{20\pi}{4} \right) = -2^{10}.\end{aligned}$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na tu $\sqrt{2}$ jsme přišli tak, že jsme spočítali absolutní hodnotu

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$



Když si nakreslíte obrázek, okamžitě uvidíte, že úhel je $\frac{\pi}{4}$. Máme tedy číslo v goniometrickém tvaru a to již snadno umocníme:



$$\begin{aligned}(1 + i)^{20} &= \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^{20} \\ &= 2^{10} \left(\cos \frac{20\pi}{4} + i \sin \frac{20\pi}{4} \right) = -2^{10}.\end{aligned}$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 2.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.



Řešení. Stejně jako při počítání mocnin, i tady se výpočet provede pomocí goniometrického vyjádření komplexního čísla.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.



Řešení. Stejně jako při počítání mocnin, i tady se výpočet provede pomocí goniometrického vyjádření komplexního čísla.



Podle zadání máme najít $z \in \mathbb{C}$ splňující vztah $z^3 = -8$, což je vlastně to samé jako hledání kořenů polynomu $z^3 + 8$. Předem tedy víme, že úloha má tři řešení; ta budeme hledat ve tvaru $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.



Řešení. Stejně jako při počítání mocnin, i tady se výpočet provede pomocí goniometrického vyjádření komplexního čísla.



Podle zadání máme najít $z \in \mathbb{C}$ splňující vztah $z^3 = -8$, což je vlastně to samé jako hledání kořenů polynomu $z^3 + 8$. Předem tedy víme, že úloha má tři řešení; ta budeme hledat ve tvaru $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.



Rovnice $z^3 = -8$ pak přejde v

$$|z|^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 8(\cos -\pi + i \sin -\pi).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.



Řešení. Stejně jako při počítání mocnin, i tady se výpočet provede pomocí goniometrického vyjádření komplexního čísla.



Podle zadání máme najít $z \in \mathbb{C}$ splňující vztah $z^3 = -8$, což je vlastně to samé jako hledání kořenů polynomu $z^3 + 8$. Předem tedy víme, že úloha má tři řešení; ta budeme hledat ve tvaru $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.



Rovnice $z^3 = -8$ pak přejde v

$$|z|^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 8(\cos -\pi + i \sin -\pi).$$



Ihned vidíme, že $|z| = 2$, a dále

$$3\varphi \pmod{2\pi} = -\pi \pmod{2\pi}.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.



Řešení. Stejně jako při počítání mocnin, i tady se výpočet provede pomocí goniometrického vyjádření komplexního čísla.



Podle zadání máme najít $z \in \mathbb{C}$ splňující vztah $z^3 = -8$, což je vlastně to samé jako hledání kořenů polynomu $z^3 + 8$. Předem tedy víme, že úloha má tři řešení; ta budeme hledat ve tvaru $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.



Rovnice $z^3 = -8$ pak přejde v

$$|z|^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 8(\cos -\pi + i \sin -\pi).$$



Ihned vidíme, že $|z| = 2$, a dále

$$3\varphi \pmod{2\pi} = -\pi \pmod{2\pi}.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poslední rovnice má tato řešení

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \pmod{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

což dává právě tři úhly $\pmod{2\pi}$

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad \varphi_2 = -\pi, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{3}.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poslední rovnice má tato řešení

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \pmod{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

což dává právě tři úhly $\pmod{2\pi}$

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad \varphi_2 = -\pi, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{3}.$$



Zbývá už jen zapsat, co jsme spočítali:



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poslední rovnice má tato řešení

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \pmod{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

což dává právě tři úhly $\pmod{2\pi}$

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad \varphi_2 = -\pi, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{3}.$$



Zbývá už jen zapsat, co jsme spočítali:



$$z_1 = 2(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_2 = 2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = -2,$$

$$z_3 = 2(\cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3) = 1 - i\sqrt{3}.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poslední rovnice má tato řešení

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \pmod{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

což dává právě tři úhly $\pmod{2\pi}$

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad \varphi_2 = -\pi, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{3}.$$



Zbývá už jen zapsat, co jsme spočítali:



$$z_1 = 2(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_2 = 2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = -2,$$

$$z_3 = 2(\cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3) = 1 - i\sqrt{3}.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Rozložení těchto řešení na kružnici o poloměru 2 si nakreslete.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 3.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$ taková, že

$$|z - i| + |z + i| < 4.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$ taková, že

$$|z - i| + |z + i| < 4.$$



Řešení. Pro snadnější zápis bude x značit reálnou část z a y imaginární část z . Nejprve budeme řešit rovnici

$$|z - i| + |z + i| = 4,$$

neboli

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$ taková, že

$$|z - i| + |z + i| < 4.$$



Řešení. Pro snadnější zápis bude x značit reálnou část z a y imaginární část z . Nejprve budeme řešit rovnici

$$|z - i| + |z + i| = 4,$$

neboli

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4.$$



Postupnými úpravami dostáváme

$$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4 - \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$x^2 + (y + 1)^2 = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + x^2 + (y - 1)^2$$

$$4y = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 4 - y$$

$$4x^2 + 3y^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$ taková, že

$$|z - i| + |z + i| < 4.$$



Řešení. Pro snadnější zápis bude x značit reálnou část z a y imaginární část z . Nejprve budeme řešit rovnici

$$|z - i| + |z + i| = 4,$$

neboli

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4.$$



Postupnými úpravami dostáváme

$$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4 - \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$x^2 + (y + 1)^2 = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + x^2 + (y - 1)^2$$

$$4y = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 4 - y$$

$$4x^2 + 3y^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tyto úpravy nejsou ekvivalentní, neboť jsme dvakrát umocňovali, a mohlo tedy přibýt řešení. Dosazením se však přesvědčíme, že každé řešení poslední rovnice je také řešením první. Poslední rovnice určuje elipsu, která rozděluje komplexní rovinu na dvě komponenty: vnitřek a vnějšek elipsy.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tyto úpravy nejsou ekvivalentní, neboť jsme dvakrát umocňovali, a mohlo tedy přibýt řešení. Dosazením se však přesvědčíme, že každé řešení poslední rovnice je také řešením první. Poslední rovnice určuje elipsu, která rozděluje komplexní rovinu na dvě komponenty: vnitřek a vnějšek elipsy.



Jelikož funkce

$$|z - i| + |z + i|$$

je spojitá a hodnoty 4 nabývá, jak jsme právě zjistili, na dané elipse, musí být na každé komponentě (tedy uvnitř nebo vně) buď ostře větší než 4, nebo ostře menší než 4. Dosazením nějakého bodu z dané komponenty určíme, který případ nastává.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tyto úpravy nejsou ekvivalentní, neboť jsme dvakrát umocňovali, a mohlo tedy přibýt řešení. Dosazením se však přesvědčíme, že každé řešení poslední rovnice je také řešením první. Poslední rovnice určuje elipsu, která rozděluje komplexní rovinu na dvě komponenty: vnitřek a vnějšek elipsy.



Jelikož funkce

$$|z - i| + |z + i|$$

je spojitá a hodnoty 4 nabývá, jak jsme právě zjistili, na dané elipse, musí být na každé komponentě (tedy uvnitř nebo vně) buď ostře větší než 4, nebo ostře menší než 4. Dosazením nějakého bodu z dané komponenty určíme, který případ nastává.



Můžeme tedy konstatovat, že zadané nerovnosti vyhovují komplexní čísla, jejichž reálná a imaginární část splňuje nerovnost

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} < 1.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Taky jsme na to mohli jít od začátku geometricky. Součet vzdáleností od daných dvou bodů v rovině je roven 4.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Taky jsme na to mohli jít od začátku geometricky. Součet vzdáleností od daných dvou bodů v rovině je roven 4.



Ty body byly $\pm i$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Taky jsme na to mohli jít od začátku geometricky. Součet vzdáleností od daných dvou bodů v rovině je roven 4.



Ty body byly $\pm i$.



BTW, ještě že byly dost blízko.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 4.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Zjistěte, zda funkce komplexní proměnné $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{x}{x + iy}$$

je spojitá.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Zjistěte, zda funkce komplexní proměnné $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{x}{x + iy}$$

je spojitá.



Řešení. Předně si musíme uvědomit, kde je tato funkce definována. Vidíme, že výraz

$$\frac{x}{x + iy}$$

má smysl pouze pro $z \neq 0$. Protože čítec i jmenovatel jsou funkce spojité, je f spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Zjistěte, zda funkce komplexní proměnné $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{x}{x + iy}$$

je spojitá.



Řešení. Předně si musíme uvědomit, kde je tato funkce definována. Vidíme, že výraz

$$\frac{x}{x + iy}$$

má smysl pouze pro $z \neq 0$. Protože číselník i jmenovatel jsou funkce spojité, je f spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.



Zabývejme se teď otázkou, zda je možné funkci f spojitě dodefinovat na celé \mathbb{C} . Budeme tedy počítat limitu

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Zjistěte, zda funkce komplexní proměnné $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{x}{x + iy}$$

je spojitá.



Řešení. Předně si musíme uvědomit, kde je tato funkce definována. Vidíme, že výraz

$$\frac{x}{x + iy}$$

má smysl pouze pro $z \neq 0$. Protože číselník i jmenovatel jsou funkce spojitě, je f spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.



Zabývejme se teď otázkou, zda je možné funkci f spojitě dodefinovat na celé \mathbb{C} . Budeme tedy počítat limitu

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z).$$



Jenže na první pohled je zřejmé, že tato limita neexistuje. Funkce f je na reálné ose (mimo počátek) rovna 1 a na imaginární ose (mimo počátek) rovna 0.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Zjistěte, zda funkce komplexní proměnné $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{x}{x + iy}$$

je spojitá.



Řešení. Předně si musíme uvědomit, kde je tato funkce definována. Vidíme, že výraz

$$\frac{x}{x + iy}$$

má smysl pouze pro $z \neq 0$. Protože číselník i jmenovatel jsou funkce spojitě, je f spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.



Zabývejme se teď otázkou, zda je možné funkci f spojitě dodefinovat na celé \mathbb{C} . Budeme tedy počítat limitu

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z).$$



Jenže na první pohled je zřejmé, že tato limita neexistuje. Funkce f je na reálné ose (mimo počátek) rovna 1 a na imaginární ose (mimo počátek) rovna 0.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Funkci tedy spojitě rozšířit nelze.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Funkci tedy spojitě rozšířit nelze.



Škoda, tolik jsem se těšila.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 5.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Příklad. Bud' $z = x + iy$ komplexní číslo. Určete imaginární část čísla

$$\frac{z - i}{z + i}$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Příklad. Bud' $z = x + iy$ komplexní číslo. Určete imaginární část čísla

$$\frac{z - i}{z + i}$$



Řešení. Abychom se zbavili komplexního čísla ve jmenovateli, rozšíříme zlomek číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli.

$$\begin{aligned} \frac{z - i}{z + i} &= \frac{x + iy - i}{x + iy + i} = \frac{x + iy - i}{x + iy + i} \cdot \frac{x - iy - i}{x - iy - i} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1 - 2xi}{x^2 + (y + 1)^2} \end{aligned}$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Příklad. Bud' $z = x + iy$ komplexní číslo. Určete imaginární část čísla

$$\frac{z - i}{z + i}$$



Řešení. Abychom se zbavili komplexního čísla ve jmenovateli, rozšíříme zlomek číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli.

$$\begin{aligned} \frac{z - i}{z + i} &= \frac{x + iy - i}{x + iy + i} = \frac{x + iy - i}{x + iy + i} \cdot \frac{x - iy - i}{x - iy - i} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1 - 2xi}{x^2 + (y + 1)^2} \end{aligned}$$



Čísla x, y jsou reálná, takže imaginární část je

$$\frac{-2x}{x^2 + (y + 1)^2}$$

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 6.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STANDARDY z kapitoly

KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STANDARDY z kapitoly

KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL \mathbb{C}



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL \mathbb{C}



DEFINICE. Množina \mathbb{C} komplexních čísel je množina \mathbb{R}^2 všech dvojic (x, y) reálných čísel s euklidovskou vzdáleností dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2) rovnou

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

a algebraickými operacemi sčítání a násobení:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL \mathbb{C}



DEFINICE. Množina \mathbb{C} komplexních čísel je množina \mathbb{R}^2 všech dvojic (x, y) reálných čísel s euklidovskou vzdáleností dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2) rovnou

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

a algebraickými operacemi sčítání a násobení:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$



Číslo x se nazývá **reálná složka** komplexního čísla $z = (x, y)$ (značení $\Re(z)$) a y jeho **imaginární složka** (značení $\Im(z)$).



LEKCE31-KOM

- komplexní čísla
 - komplexně sdružené číslo
 - absolutní hodnota
 - imaginární jednotka
 - průvodič
 - argument
 - Moivreovy vzorce
 - nevlastní bod
- topologie roviny
 - konvergence
 - souvislá množina
 - oblast
 - křivková souvislost
 - jednoduchá souvislost
- funkce
 - mnohoznačná funkce
 - spojitost
 - limita funkce
- STANDARDY
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo $(x, -y)$ se nazývá **komplexně sdružené** k číslu (x, y) (značení $\overline{(x, y)}$).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo $(x, -y)$ se nazývá **komplexně sdružené** k číslu (x, y) (značení $\overline{(x, y)}$).



Vzdálenost bodu $z = (x, y)$ od počátku se podobně jako v reálných číslech značí absolutní hodnotou $|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je potom $|z_1 - z_2|$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo $(x, -y)$ se nazývá **komplexně sdružené** k číslu (x, y) (značení $\overline{(x, y)}$).



Vzdálenost bodu $z = (x, y)$ od počátku se podobně jako v reálných číslech značí absolutní hodnotou $|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je potom $|z_1 - z_2|$.



Počátek, tj. bod $(0, 0)$, bude často značen jako 0.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Alternativní popis komplexních čísel



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

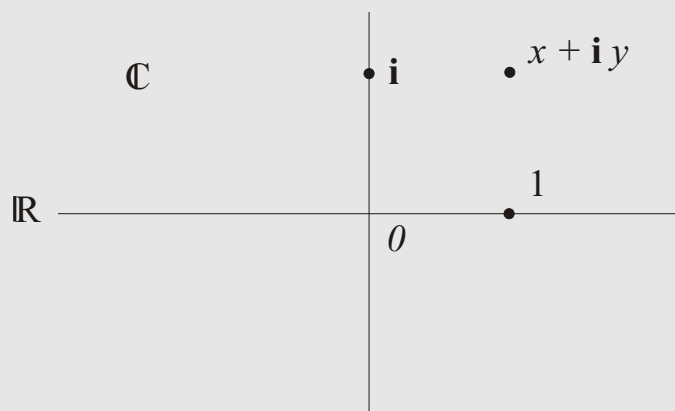
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Alternativní popis komplexních čísel



Jestliže se označí $i = (0, 1)$ (tzv. imaginární jednotka), lze psát komplexní čísla ve tvaru $(x, y) = x + iy$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Další možností vyjádření komplexních čísel je použití polárních souřadnic: $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde r je vzdálenost bodu (x, y) od počátku. a φ je úhel mezi kladným směrem osy x a spojnicí bodu (x, y) s počátkem.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

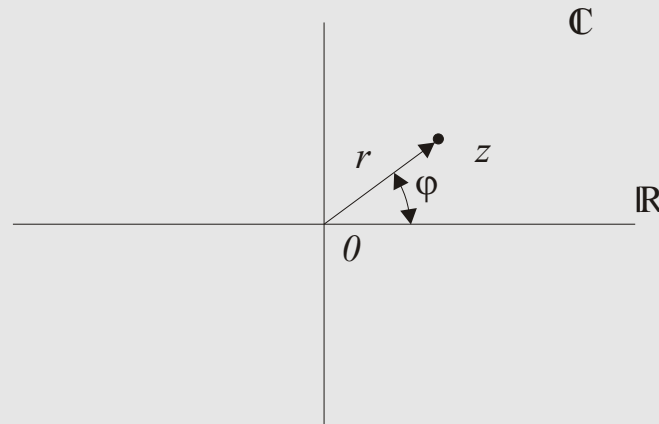
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Další možností vyjádření komplexních čísel je použití polárních souřadnic: $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde r je vzdálenost bodu (x, y) od počátku. a φ je úhel mezi kladným směrem osy x a spojnicí bodu (x, y) s počátkem.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$



Úhel φ je, kromě bodu $(0, 0)$, určen jednoznačně až na periodu 2π :

$$\cos \varphi = \frac{\Re z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\Im z}{|z|}.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$



Úhel φ je, kromě bodu $(0, 0)$, určen jednoznačně až na periodu 2π :

$$\cos \varphi = \frac{\Re z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\Im z}{|z|}.$$



Množina úhlů φ pro dané z se značí $\arg(z)$, takže $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Platí totiž zobecněné Moivreovy vzorce pro z_1, z_2 s příslušnými argumenty φ_1, φ_2 :

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšířená komplexní rovina \mathbb{C}^*



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšířená komplexní rovina \mathbb{C}^*



Na rozdíl od \mathbb{R} se však \mathbb{C} rozšiřuje jen o jedno nevlastní číslo, které bude značeno ∞ a rozšířená rovina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bude označena jako \mathbb{C}^* .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

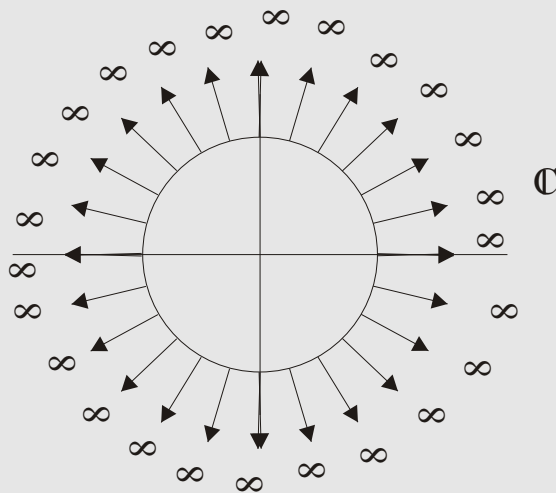
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšířená komplexní rovina \mathbb{C}^*



Na rozdíl od \mathbb{R} se však \mathbb{C} rozšiřuje jen o jedno nevlastní číslo, které bude značeno ∞ a rozšířená rovina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bude označena jako \mathbb{C}^* .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0.$$



Operace

$$\infty + \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{\infty}$$

nemají smysl (neurčité výrazy).

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0.$$



Operace

$$\infty + \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{\infty}$$

nemají smysl (neurčité výrazy).

Je vhodné zavést $|\infty| = \infty, \overline{\infty} = \infty$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Topologie roviny



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

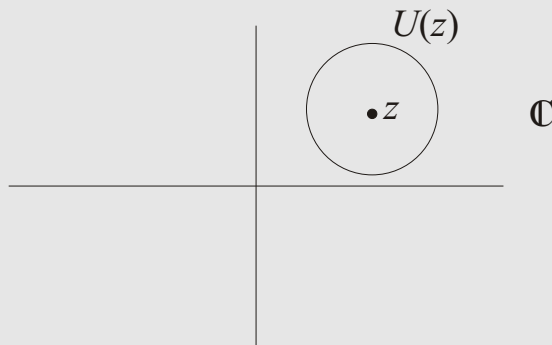
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Topologie roviny



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

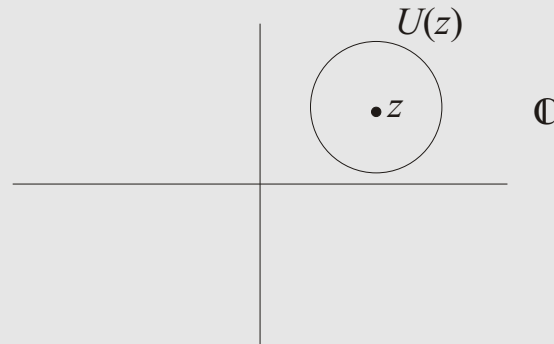
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Topologie roviny



Pro úplnost:

- *okolí* bodu z je libovolná množina obsahující nějaký kruh o středu z ;
- podmnožina \mathbb{C} je *otevřená*, jestliže je okolím každého svého bodu;
- podmnožina \mathbb{C} je *uzavřená*, jestliže její doplněk je otevřený;
- podmnožina \mathbb{C} je *kompaktní*, jestliže je uzavřená a omezená;
- posloupnost z_n konverguje k $z \in \mathbb{C}$, jestliže libovolné okolí bodu z obsahuje skoro všechna z_n .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Množina A se nazývá **souvislá**, jestliže každá funkce spojitá na A mající jen konečně mnoho hodnot je konstantní.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

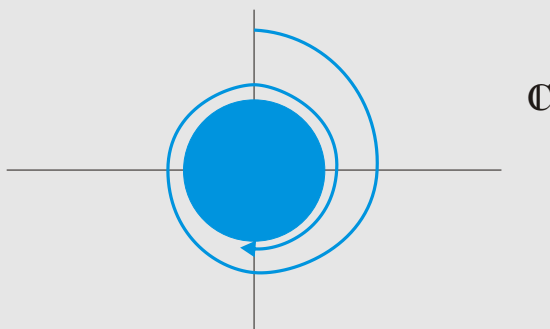
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Množina A se nazývá **souvislá**, jestliže každá funkce spojitá na A mající jen konečně mnoho hodnot je konstantní.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Množina je **křivkově souvislá**, jestliže každé její dva body lze spojit křivkou ležící v oné množině.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

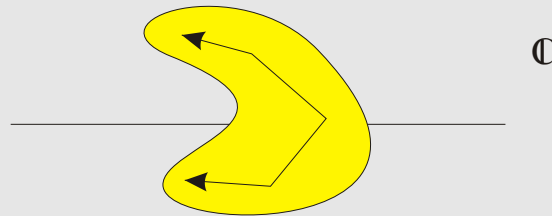
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Množina je **křivkově souvislá**, jestliže každé její dva body lze spojit křivkou ležící v oné množině.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.



Otevřené souvislé množiny se nazývají **oblastmi**.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.



Otevřené souvislé množiny se nazývají **oblastmi**.



Oblast spolu se svou hranicí se nazývá **uzavřená oblast**.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

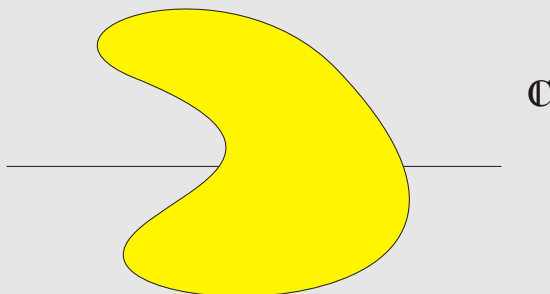
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Souvislá množina se nazývá **jednoduše souvislá**, jestliže její doplněk je souvislá množina.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

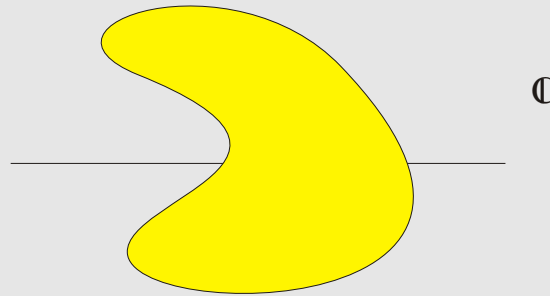
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Souvislá množina se nazývá **jednoduše souvislá**, jestliže její doplněk je souvislá množina.



Oblast G je jednoduše souvislá, jestliže s každou Jordanovou křivkou v G leží v G i její vnitřek.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

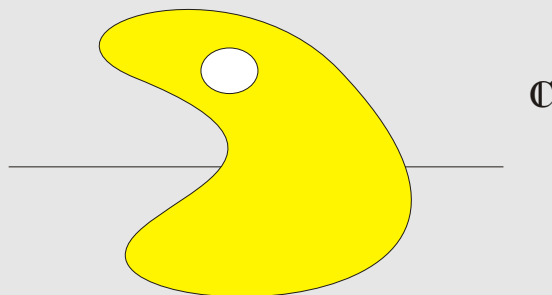
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A toto je množina, která není jednoduše souvislá.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

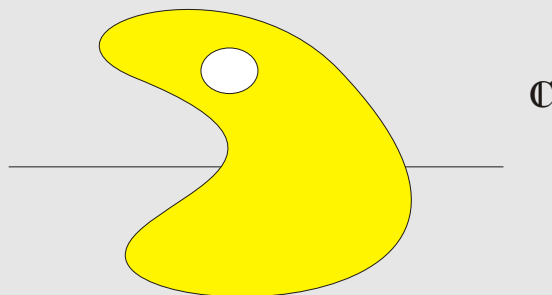
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A toto je množina, která není jednoduše souvislá.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ



Komplexní funkce komplexní proměnné zobrazuje nějakou podmnožinu \mathbb{C} do \mathbb{C} . Můžeme se na ni tedy dívat jako na dvojrozměrné vektorové pole (reálné) definované na podmnožině roviny, neboli $f(z) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ ($f_1 = \Re f$ je reálná složka a $f_2 = \Im f$ je imaginární složka funkce f).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ



Komplexní funkce komplexní proměnné zobrazuje nějakou podmnožinu \mathbb{C} do \mathbb{C} . Můžeme se na ni tedy dívat jako na dvojrozměrné vektorové pole (reálné) definované na podmnožině roviny, neboli $f(z) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ ($f_1 = \Re f$ je reálná složka a $f_2 = \Im f$ je imaginární složka funkce f).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Budou se vyskytovat přiřazení, která jednomu bodu přiřadí více hodnot (jako např. $\arg z$). Takovéto přiřazení se nazývá **mnohoznačné zobrazení** a v případě, že je definováno na komplexních číslech a hodnoty jsou opět komplexní čísla, bude se nazývat **mnohoznačná funkce**.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

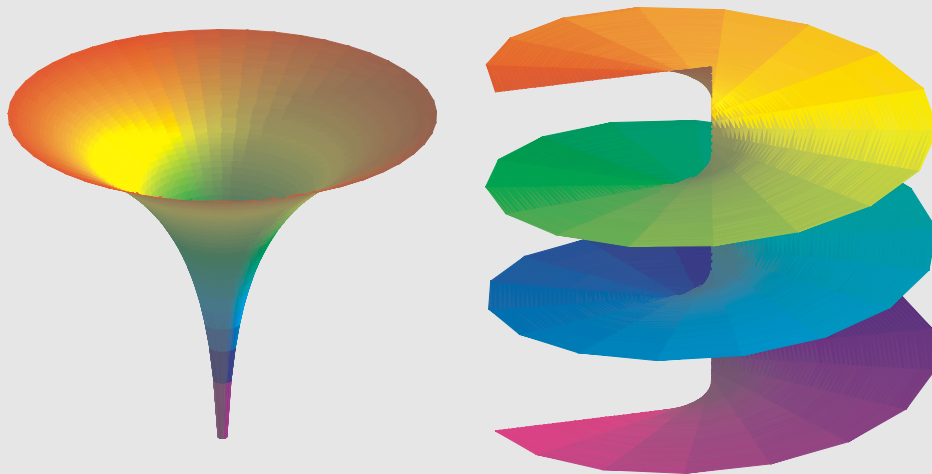
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tady vidíme reálnou a imaginární část komplexního logaritmu.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Spojitosť



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitosť
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojítost



Za definicí spojitosti funkce f lze vzít jednu z následujících ekvivalentních vlastností plynoucí ze spojitosti reálných funkcí a z rozkladu f na reálnou a imaginární složku:

1. složky $\Re f$ a $\Im f$ spojité;
2. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé okolí U bodu $f(z)$ existuje okolí V bodu z takové, že $f(V \cap \mathcal{D}(f)) \subset U$.
3. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ jakmile $|z - w| < \delta$ a $z \in \mathcal{D}(f)$.
4. jestliže $z_n \rightarrow z$ v $\mathcal{D}(f)$, pak $f(z_n) \rightarrow f(z)$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojítost



Za definici spojitosti funkce f lze vzít jednu z následujících ekvivalentních vlastností plynoucí ze spojitosti reálných funkcí a z rozkladu f na reálnou a imaginární složku:

1. složky $\Re f$ a $\Im f$ spojité;
2. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé okolí U bodu $f(z)$ existuje okolí V bodu z takové, že $f(V \cap \mathcal{D}(f)) \subset U$.
3. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ jakmile $|z - w| < \delta$ a $z \in \mathcal{D}(f)$.
4. jestliže $z_n \rightarrow z$ v $\mathcal{D}(f)$, pak $f(z_n) \rightarrow f(z)$.



Stejněměrná spojitost je definovaná třetí podmínkou, jestliže volba δ nezávisí na volbě z (tj., kvantifikátor „pro každé z “ se přesouvá za kvantifikátor „existuje δ “).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA.

1. Součet, součin a podíl spojitých k funkcí je spojitá funkce.
2. Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.
3. Spojitý obraz křivkově souvislé množiny je křivkově souvislá množina.
4. Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.
5. Spojitá funkce na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá.
6. Prostá spojitá funkce na kompaktní množině má spojitou inverzní funkci.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg . Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg . Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.



2. Spojitost složení je dokázána v kapitole o funkcích více proměnných (a plyne jednoduše z poslední charakterizující vlastnosti spojitosti o zachovávání limit posloupností).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg . Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.



2. Spojitost složení je dokázána v kapitole o funkcích více proměnných (a plyne jednoduše z poslední charakterizující vlastnosti spojitosti o zachovávání limit posloupností).



3. Necht' A je křivkově souvislá a f je spojitá funkce definovaná na A . Necht' $x, y \in f(A)$. Existují body $a, b \in A$ tak, že $f(a) = x, f(b) = y$ a křivka $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$ tak, že $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. Pak křivka $f \circ \varphi$ leží v $f(A)$ a spojuje body x, y .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg . Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.



2. Spojitost složení je dokázána v kapitole o funkcích více proměnných (a plyne jednoduše z poslední charakterizující vlastnosti spojitosti o zachovávání limit posloupností).



3. Necht' A je křivkově souvislá a f je spojitá funkce definovaná na A . Necht' $x, y \in f(A)$. Existují body $a, b \in A$ tak, že $f(a) = x, f(b) = y$ a křivka $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$ tak, že $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. Pak křivka $f \circ \varphi$ leží v $f(A)$ a spojuje body x, y .



4. Necht' A je kompaktní v \mathbb{C} a $\{z_n\}$ je posloupnost v $f(A)$. Zvolí se body $w_n \in A \cap f^{-1}(z_n)$. Protože A je kompaktní, existuje podposloupnost $\{w_{k_n}\}$ konvergující k nějakému $w \in A$. Protože f je spojitá, konverguje $\{z_{k_n}\}$ k $f(w) \in f(A)$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg . Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.



2. Spojitost složení je dokázána v kapitole o funkcích více proměnných (a plyne jednoduše z poslední charakterizující vlastnosti spojitosti o zachovávání limit posloupností).



3. Necht' A je křivkově souvislá a f je spojitá funkce definovaná na A . Necht' $x, y \in f(A)$. Existují body $a, b \in A$ tak, že $f(a) = x, f(b) = y$ a křivka $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$ tak, že $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. Pak křivka $f \circ \varphi$ leží v $f(A)$ a spojuje body x, y .



4. Necht' A je kompaktní v \mathbb{C} a $\{z_n\}$ je posloupnost v $f(A)$. Zvolí se body $w_n \in A \cap f^{-1}(z_n)$. Protože A je kompaktní, existuje podposloupnost $\{w_{k_n}\}$ konvergující k nějakému $w \in A$. Protože f je spojitá, konverguje $\{z_{k_n}\}$ k $f(w) \in f(A)$.



5. Necht' f je spojitá funkce na kompaktní množině A , která není stejnoměrně spojitá. Pak existuje $\varepsilon > 0$ a body $u_n, v_n \in A$ tak, že $|u_n - v_n| < 1/n$ a $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$. Protože A je kompaktní, lze najít konvergentní podposloupnosti $\{u_{k_n}\}, \{v_{k_n}\}$ konvergující k $u \in A$. Tím se dostává spor, protože $|f(u_{k_n}) - f(v_{k_n})|$ nekonverguje k 0.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Necht' je spojitá komplexní funkce f na kompaktní množině A prostá. Pro libovolný bod $b \in f(A)$ se ukáže, že f^{-1} je spojitá v b . Necht' tedy $\{b_n\}$ je posloupnost v $f(A)$ konvergující k b . Má se ukázat, že $f^{-1}(b_n)$ konverguje k $f^{-1}(b)$. Je-li $\{c_n\}$ libovolná podposloupnost posloupnosti $f^{-1}(b_n)$, lze z ní vybrat podposloupnost $\{c_{k_n}\}$ s nějakou limitou c . Protože f je spojitá, konverguje $f(c_{k_n})$ k $f(c)$ a tedy $f(c) = b$. Takže $\{c_{k_n}\}$ konverguje k $f^{-1}(b)$. Podle čtvrté vlastnosti konvergence posloupností konverguje $f^{-1}(b_n)$ k $f^{-1}(b)$. \diamond



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Necht' je spojitá komplexní funkce f na kompaktní množině A prostá. Pro libovolný bod $b \in f(A)$ se ukáže, že f^{-1} je spojitá v b . Necht' tedy $\{b_n\}$ je posloupnost v $f(A)$ konvergující k b . Má se ukázat, že $f^{-1}(b_n)$ konverguje k $f^{-1}(b)$. Je-li $\{c_n\}$ libovolná podposloupnost posloupnosti $f^{-1}(b_n)$, lze z ní vybrat podposloupnost $\{c_{k_n}\}$ s nějakou limitou c . Protože f je spojitá, konverguje $f(c_{k_n})$ k $f(c)$ a tedy $f(c) = b$. Takže $\{c_{k_n}\}$ konverguje k $f^{-1}(b)$. Podle čtvrté vlastnosti konvergence posloupností konverguje $f^{-1}(b_n)$ k $f^{-1}(b)$. \diamond



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita funkce



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita funkce



Definujeme pro funkci f

$$\lim_{z \rightarrow u} f(z) = \lim_{z \rightarrow u} \Re(f)(z) + i \lim_{z \rightarrow u} \Im(f)(z).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' f je definována na otevřené množině M a $u \in M$. Pak $\lim_{z \rightarrow u} f(z) = A$ právě když pro každou křivku φ na $[0, 1]$ s vlastnostmi

$$\varphi(0) = u, \varphi : (0, 1] \rightarrow M$$

je $\lim_{t \rightarrow 0+} f(\varphi(t)) = A$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

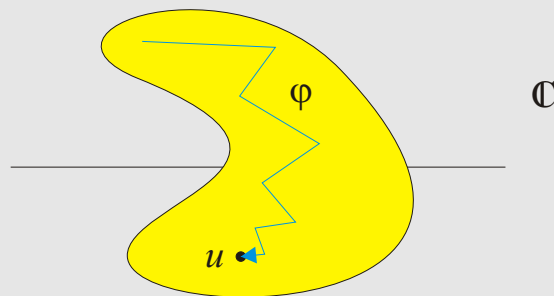
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' f je definována na otevřené množině M a $u \in M$. Pak $\lim_{z \rightarrow u} f(z) = A$ právě když pro každou křivku φ na $[0, 1]$ s vlastnostmi

$$\varphi(0) = u, \varphi : (0, 1] \rightarrow M$$

je $\lim_{t \rightarrow 0+} f(\varphi(t)) = A$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Protože φ je spojitá, je nutnost podmínky zřejmá. Zbývá dokázat postačitelnost podmínky. Pro jednoduchost značení lze předpokládat, že $u = 0$ a že $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset M$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Protože φ je spojitá, je nutnost podmínky zřejmá. Zbývá dokázat postačitelnost podmínky. Pro jednoduchost značení lze předpokládat, že $u = 0$ a že $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset M$.



Nechť tedy $\lim_{z \rightarrow u} f(z) \neq A$. Pak existuje posloupnost $\{z_n\} \subset (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \{0\}$ konvergující k 0, přičemž $\lim f(z_n) \neq A$. Zřejmě lze posloupnost $\{z_n\}$ vybrat tak, že $\Re z_n$ a $\Im z_n$ konvergují k 0 monotónně, např. jsou klesající.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Protože φ je spojitá, je nutnost podmínky zřejmá. Zbývá dokázat postačitelnost podmínky. Pro jednoduchost značení lze předpokládat, že $u = 0$ a že $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset M$.



Nechť tedy $\lim_{z \rightarrow u} f(z) \neq A$. Pak existuje posloupnost $\{z_n\} \subset (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \{0\}$ konvergující k 0, přičemž $\lim f(z_n) \neq A$. Zřejmě lze posloupnost $\{z_n\}$ vybrat tak, že $\Re z_n$ a $\Im z_n$ konvergují k 0 monotónně, např. jsou klesající.



Nyní stačí vzít spojitou funkci na $[0, 1]$, která má v bodech $\Re z_n$ hodnoty $\Im z_n$. ◇

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZNÁMKY

V polárním zápisu čísla z se r nazývá *průvodič* a φ *argument* čísla z . Zobrazení \arg , které přiřazuje komplexnímu číslu jeho argument, není jednoznačné.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZNÁMKY

V polárním zápisu čísla z se r nazývá *průvodič* a φ *argument* čísla z . Zobrazení arg, které přiřazuje komplexnímu číslu jeho argument, není jednoznačné.



Lze se omezit jen na některé hodnoty argumentu, např. interval $[0, 2\pi)$ a potom je arg jednoznačnou funkcí (kromě 0).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' S je sféra $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól“ $(0,0,1)$.
Rovina \mathbb{C} se ztotožní s rovinou os x, y , tj. množinou $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' S je sféra $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól“ $(0,0,1)$.
Rovina \mathbb{C} se ztotožní s rovinou os x, y , tj. množinou $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.



Tzv. stereografická projekce je prosté zobrazení $S \setminus \{P\}$ na \mathbb{C} : vezme se přímka procházející bodem P , která není rovnoběžná s \mathbb{C} – ta protíná sféru S přesně v jednom dalším bodě a rovinu \mathbb{C} taky přesně v jednom bodě, jeho stereografickém obraze.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

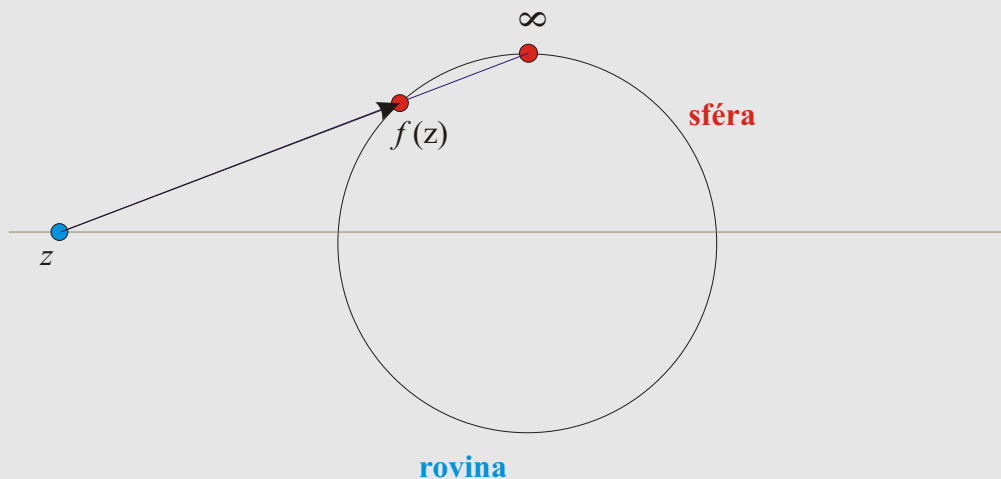
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' S je sféra $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól“ $(0,0,1)$. Rovina \mathbb{C} se ztotožní s rovinou os x, y , tj. množinou $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.



Tzv. stereografická projekce je prosté zobrazení $S \setminus \{P\}$ na \mathbb{C} : vezme se přímka procházející bodem P , která není rovnoběžná s \mathbb{C} – ta protíná sféru S přesně v jednom dalším bodě a rovinu \mathbb{C} taky přesně v jednom bodě, jeho stereografickém obraze.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

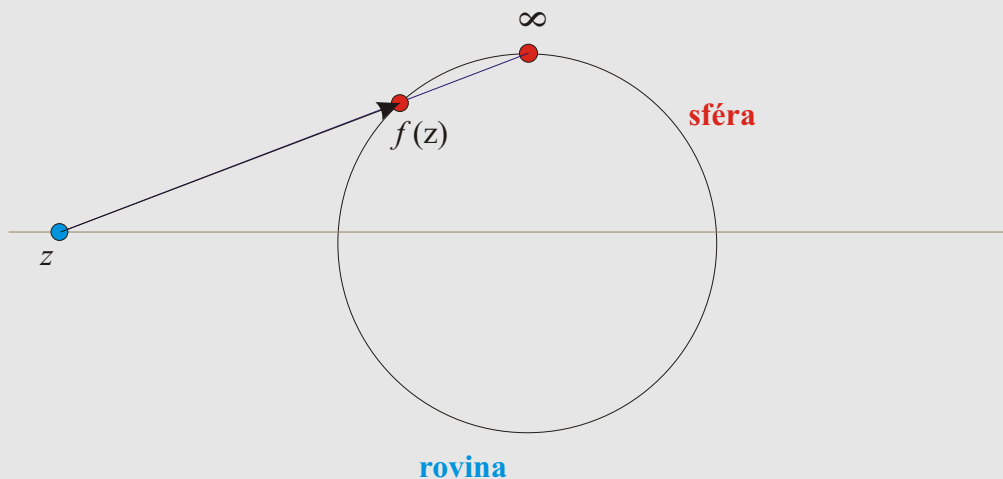
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť S je sféra $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól“ $(0,0,1)$. Rovina \mathbb{C} se ztotožní s rovinou os x, y , tj. množinou $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.



Tzv. stereografická projekce je prosté zobrazení $S \setminus \{P\}$ na \mathbb{C} : vezme se přímka procházející bodem P , která není rovnoběžná s \mathbb{C} – ta protíná sféru S přesně v jednom dalším bodě a rovinu \mathbb{C} taky přesně v jednom bodě, jeho stereografickém obraze.



Sféra S tedy slouží jako model rozšířené komplexní roviny \mathbb{C}^* , přičemž P odpovídá nevlastnímu bodu ∞ .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

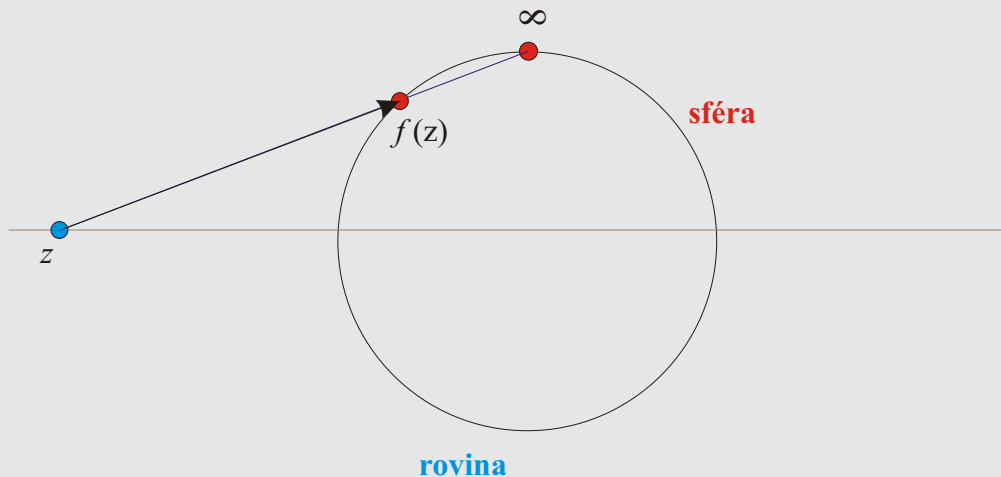
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť S je sféra $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól“ $(0,0,1)$. Rovina \mathbb{C} se ztotožní s rovinou os x, y , tj. množinou $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.



Tzv. stereografická projekce je prosté zobrazení $S \setminus \{P\}$ na \mathbb{C} : vezme se přímka procházející bodem P , která není rovnoběžná s \mathbb{C} – ta protíná sféru S přesně v jednom dalším bodě a rovinu \mathbb{C} taky přesně v jednom bodě, jeho stereografickém obraze.



Sféra S tedy slouží jako model rozšířené komplexní roviny \mathbb{C}^* , přičemž P odpovídá nevlastnímu bodu ∞ .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedený model \mathbb{C}^* ve tvaru sféry bude nazýván *Riemannova sféra*.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li f mnohoznačné zobrazení na G , pro každé $z \in G$ vyberte jen jednu hodnotu z množiny $f(z)$ (označte ji $F(z)$), dostane se funkce F na G , která se nazývá (jednoznačná) **větev** funkce f .



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

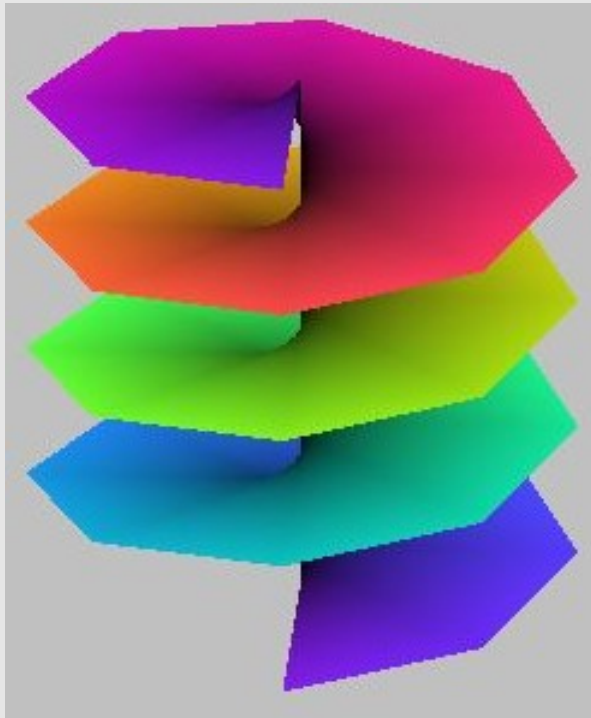
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li f mnohoznačné zobrazení na G , pro každé $z \in G$ vyberte jen jednu hodnotu z množiny $f(z)$ (označte ji $F(z)$), dostane se funkce F na G , která se nazývá (jednoznačná) **větev** funkce f .



Grafem mnohoznačné funkce imaginární část logaritmu je schodiště.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



PŘÍKLADY



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PŘÍKLADY



Pokud je třeba vyjádřit podíl dvou komplexních čísel jako dvojice reálných čísel, rozšíří se zlomek komplexně sdruženým jmenovatelem. Například pro podíl z/w , kde $z = (x, y)$, $w = (u, v)$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \left(\frac{xu - yv}{u^2 + v^2}, \frac{xv + yu}{u^2 + v^2} \right).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte, že platí

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže pro $n \in \mathbb{N}$ značí $\sqrt[n]{z}$ ta komplexní čísla w , pro která je $w^n = z$, pak

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\varphi/n) + i \sin(\varphi/n)).$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CVIČENÍ



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CVIČENÍ

↓
Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CVIČENÍ

↓
Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$

↓
Spočítejte $(1+i)^{20}$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CVIČENÍ

↓
Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$

↓
Spočítejte $(1+i)^{20}$.

↓
Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CVIČENÍ

↓
Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$

↓
Spočítejte $(1+i)^{20}$.

↓
Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9