

KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE

V předchozích částech byl důraz kladen na reálná čísla a na reálné funkce.

Pokud se komplexní čísla vyskytovala, bylo to z hlediska kartézského součinu dvou reálných přímek, např. při zkoumání funkcí dvou proměnných. Nebyly při tom brány v úvahu všechny algebraické vlastnosti komplexních čísel.

Je známo, že některé úlohy zadané reálnými funkcemi nemají řešení v reálném oboru, ale mají řešení v komplexním oboru.

Takovým jednoduchým případem jsou kvadratické rovnice.

Složitější situace bude probrána v kapitole o Fourierově transformaci: inverzní obrazy Laplaceovy transformace reálné funkce se vypočítají pomocí integrálu komplexních funkcí.

I když mnoho vlastností komplexních čísel lze získat z vlastností reálných čísel, nelze tak získat všechny potřebné vlastnosti.

Navíc, už při zkoumání funkcí dvou proměnných byly vidět podstatné rozdíly ve složitosti jistých množin na přímce a v rovině.

V této kapitole proto budou zopakovány některé vlastnosti roviny a funkcí dvou proměnných (a základy komplexních čísel ze střední školy).

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL \mathbb{C}

DEFINICE. Množina \mathbb{C} komplexních čísel je množina \mathbb{R}^2 všech dvojic (x, y) reálných čísel s euklidovskou vzdáleností dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2) rovnou

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

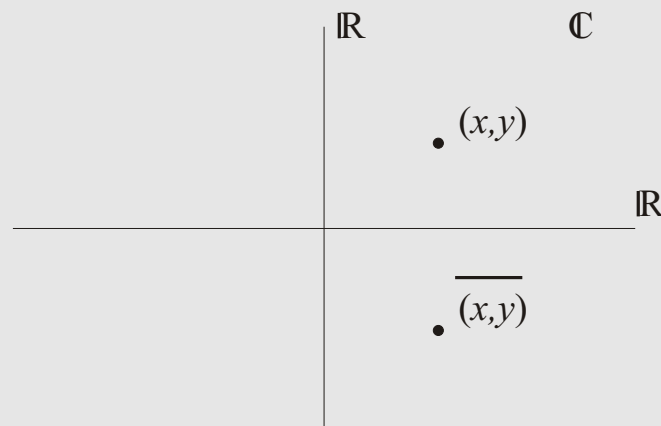
a algebraickými operacemi sčítání a násobení:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Číslo x se nazývá **reálná složka** komplexního čísla $z = (x, y)$ (značení $\Re(z)$) a y jeho **imaginární složka** (značení $\Im(z)$).

Číslo $(x, -y)$ se nazývá **komplexně sdružené** k číslu (x, y) (značení $\overline{(x, y)}$).



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

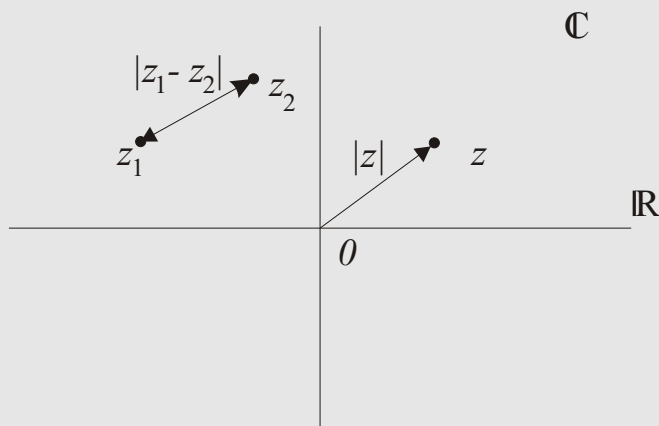
1 2 3 4 5 6 7 8 9

S uvedeným násobením a sčítáním tvoří \mathbb{C} těleso, s uvedenou vzdáleností tvoří metrický prostor.

Pokud se ztotožní reálná čísla $r \in \mathbb{R}$ s komplexními čísly $(r, 0)$, je \mathbb{R} podtěleso \mathbb{C} (a jeho metrický podprostor).

Vzdálenost bodu $z = (x, y)$ od počátku se podobně jako v reálných číslech značí absolutní hodnotou $|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je potom $|z_1 - z_2|$. Pro absolutní hodnotu platí stejná pravidla jako v \mathbb{R} (viz *Otázky*).

Počátek, tj. bod $(0, 0)$, bude často značen jako 0 .



[Poznámky 1](#) [Příklady 1](#) [Otázky 1](#) [1](#)

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

Příklady

[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

Otázky

[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

Cvičení

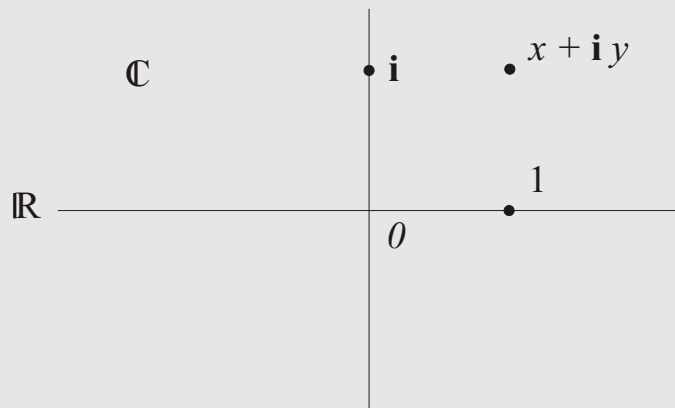
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

Učení

[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

Alternativní popis komplexních čísel

Jestliže se označí $i = (0, 1)$ (tzv. imaginární jednotka), lze psát komplexní čísla ve tvaru $(x, y) = x + iy$.



Další možností vyjádření komplexních čísel je použití polárních souřadnic: $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde r je vzdálenost bodu (x, y) od počátku, a φ je úhel mezi kladným směrem osy x a spojnicí bodu (x, y) s počátkem.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

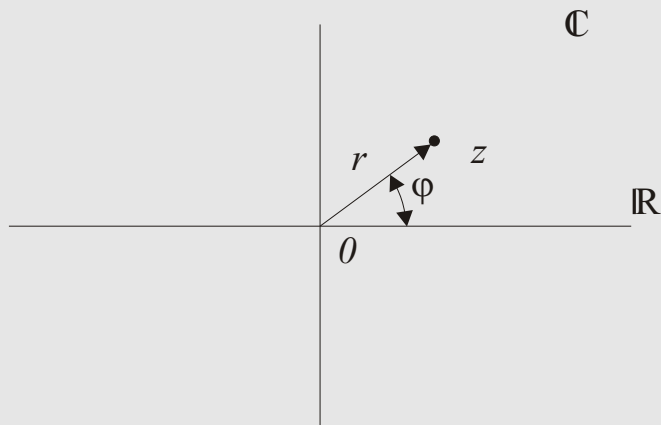
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Úhel φ je, kromě bodu $(0, 0)$, určen jednoznačně až na periodu 2π :

$$\cos \varphi = \frac{\Re z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\Im z}{|z|}.$$

Popis φ pomocí funkce \arctg je uveden v *Otázkách*. Množina úhlů φ pro dané z se značí $\arg(z)$, takže $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$.

Popis pomocí polárních souřadnic je vhodný při násobení komplexních čísel. Platí totiž zobecněné **Moivreovy vzorce** pro z_1, z_2 s příslušnými argumenty φ_1, φ_2 :

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

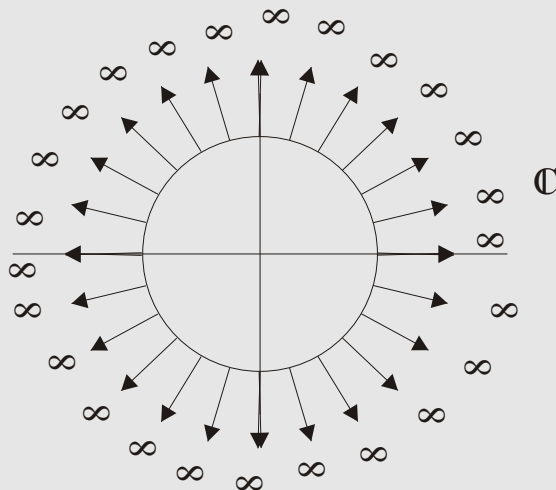
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšířená komplexní rovina \mathbb{C}^*

Stejně jako v \mathbb{R} je vhodné rozšířit rovinu o nevlastní body.

Na rozdíl od \mathbb{R} se však \mathbb{C} rozšiřuje jen o jedno nevlastní číslo, které bude značeno ∞ a rozšířená rovina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bude označena jako \mathbb{C}^* .



Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0.$$

Operace

$$\infty + \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

nemají smysl (neurčité výrazy).

Je vhodné zavést $|\infty| = \infty$, $\overline{\infty} = \infty$.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

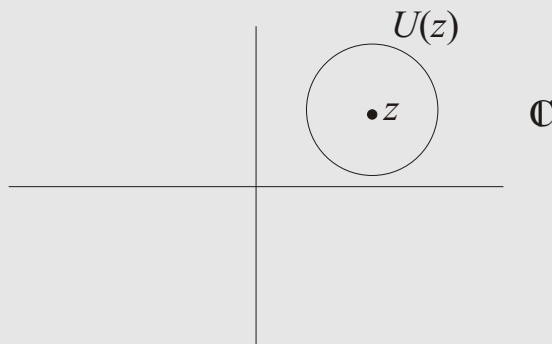
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Topologie roviny

V kapitole o funkcích více proměnných byla pomocí vzdálenosti popsána konvergence v \mathbb{R}^2 a její vlastnosti, dále pak jisté vlastnosti podmnožin roviny, jako otevřenost, uzavřenost, omezenost, kompaktnost, okolí bodů, hromadné body.



Pro úplnost:

- *okolí* bodu z je libovolná množina obsahující nějaký kruh o středu z ;
- podmnožina \mathbb{C} je *otevřená*, jestliže je okolím každého svého bodu;
- podmnožina \mathbb{C} je *uzavřená*, jestliže její doplněk je otevřený;
- podmnožina \mathbb{C} je *kompaktní*, jestliže je uzavřená a omezená;
- posloupnost z_n konverguje k $z \in \mathbb{C}$, jestliže libovolné okolí bodu z obsahuje skoro všechna z_n .

V *Poznámkách, Příkladech a Otázkách* je probráno rozšíření uvedených pojmů na \mathbb{C}^* .

Kromě tvrzení obsahujících pojmy z uspořádání, platí stejné věty pro konvergenci jako v \mathbb{R} :

VĚTA.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. $\{z_n\}$ má nejvýše jednu limitu,
2. je-li posloupnost $\{z_n\}$ konstantní, $z_n = u$, pak $\lim z_n = u$,
3. jestliže $\lim z_n = u$, pak $\lim z_{k_n} = u$ pro každou podposloupnost $\{z_{k_n}\}$ posloupnosti $\{z_n\}$,
4. jestliže z každé podposloupnosti $\{z_n\}$ lze vybrat podposloupnost konvergující k u , pak $\{z_n\}$ konverguje k u .
5. jestliže $\{z_n\}$ konverguje v \mathbb{C} , pak $\{z_n\}$ je omezená posloupnost.
6. posloupnost $\{z_n\}$ konverguje v \mathbb{C} právě když je cauchyovská (tj. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n, k > n_0 \Rightarrow |z_n - z_k| < \varepsilon)$),
7. platí tvrzení o limitě součtu, součinu a podílu.

Beze změny zůstává definice hromadných bodů posloupností nebo množin v \mathbb{C} a všechna tvrzení o nich, která mají smysl v \mathbb{C} (tj. musí se vynechat tvrzení používající uspořádání, např. nemá smysl hovořit o největším a nejmenším hromadném bodě posloupnosti). V Cantorově větě se místo omezeného uzavřeného intervalu bere kompaktní množina (viz *Otázky*).

Bude potřeba další důležitý pojem, a to souvislost množiny.

Množina A se nazývá **souvislá**, jestliže každá funkce spojitá na A mající jen konečně mnoho hodnot je konstantní.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

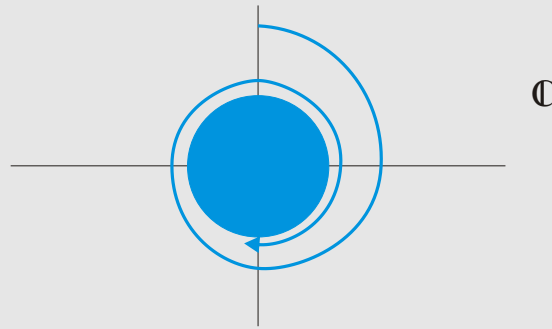
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

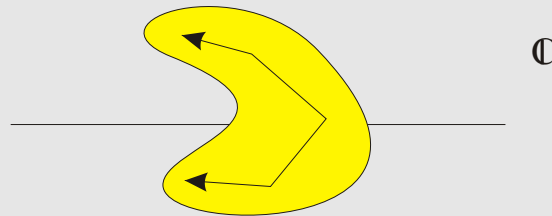
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro účely této kapitoly bude stačit silnější pojem než souvislost. Množina je **křivkově souvislá**, jestliže každé její dva body lze spojit křivkou ležící v oné množině.



Zřejmě je každá křivkově souvislá množina je souvislá.

Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.

Otevřené souvislé množiny se nazývají **oblastmi**.

Oblast spolu se svou hranicí se nazývá **uzavřená oblast**.

Pro podrobnější pohled na souvislost viz *Poznámky*, *Příklady* a *Otázky*.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

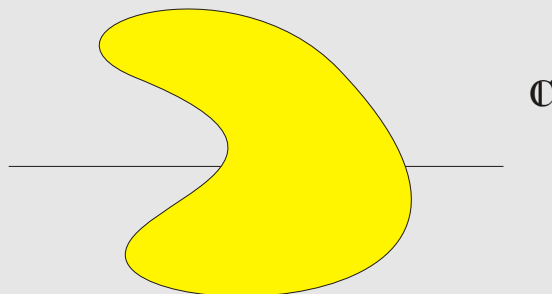
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

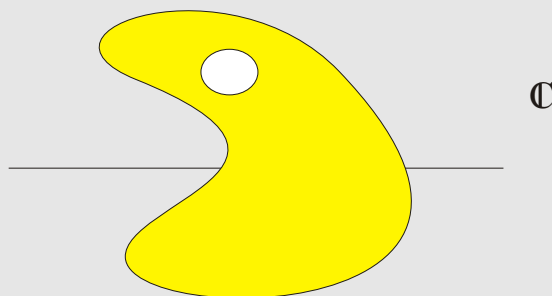
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Souvislá množina se nazývá **jednoduše souvislá**, jestliže její doplněk je souvislá množina.



Oblast G je jednoduše souvislá, jestliže s každou Jordanovou křivkou v G leží v G i její vnitřek.



[Poznámky 4](#) [Příklady 4](#) [Otázky 4](#) 4

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

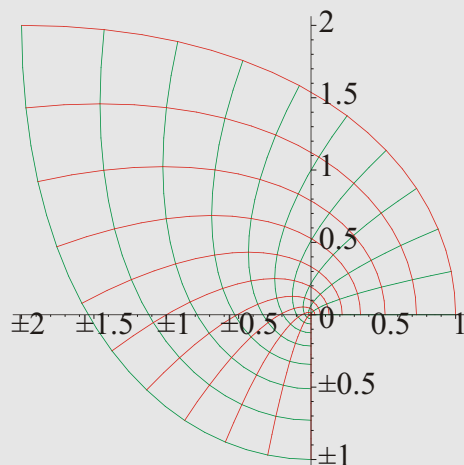
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Komplexní funkce komplexní proměnné zobrazuje nějakou podmnožinu \mathbb{C} do \mathbb{C} . Můžeme se na ni tedy dívat jako na dvojrozměrné vektorové pole (reálné) definované na podmnožině roviny, neboli $f(z) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ ($f_1 = \Re f$ je reálná složka a $f_2 = \Im f$ je imaginární složka funkce f).



Abychom mohli úspěšně pracovat s komplexními funkcemi komplexní proměnné, bývá mimo výše uvedený model typu "rozválené těsto" užitečné zkoumat odděleně reálnou a imaginární složku zvlášť.

Například pro funkci $z \mapsto z$ je reálná složka zobrazení $(x, y) \mapsto x$ a imaginární složka zobrazení $(x, y) \mapsto y$. Jde tedy vlastně o dvě plochy nad rovinou (x, y) .

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo
- absolutní hodnota
- imaginární jednotka
- průvodič
- argument
- Moivreovy vzorce
- nevlastní bod

topologie roviny

- konvergence
- souvislá množina
- oblast
- křivková souvislost
- jednoduchá souvislost

funkce

- mnohoznačná funkce
- spojitost
- limita funkce

STANDARDY

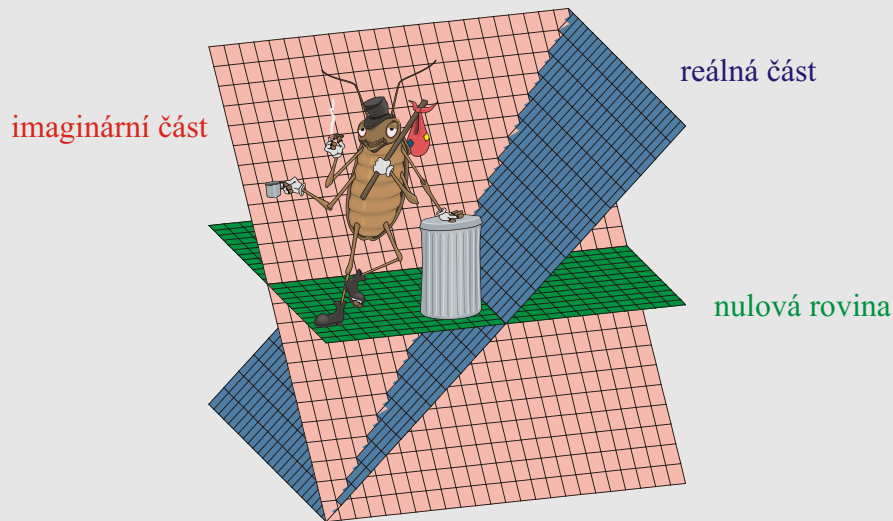
Poznámky 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je zřejmé, jak se definuje součet, součin a podíl komplexních funkcí (vše bodově), jejich složení, inverzní funkce, jejich bodová limita.

Nemá smysl hovořit o monotónních funkcích, o extrémeh, o konvexních funkcích.

Ale má smysl pojem omezená funkce, sudá, lichá nebo periodická funkce.

Uvědomte si rozdíl oproti kapitole o funkcích více proměnných, kde se součin a podíl funkcí uvažoval pouze pro funkce s hodnotami v \mathbb{R} .

Úmluva: Pokud nebude řečeno jinak, bude v této i následujících kapitolách termín *funkce* znamenat *komplexní funkce komplexní proměnné*.

Budou se vyskytovat přiřazení, která jednomu bodu přiřadí více hodnot (jako např. $\arg z$). Takovéto přiřazení se nazývá **mnohoznačné zobrazení** a v případě, že je definováno na komplexních číslech a hodnoty jsou opět komplexní čísla, bude se nazývat **mnohoznačná funkce**.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

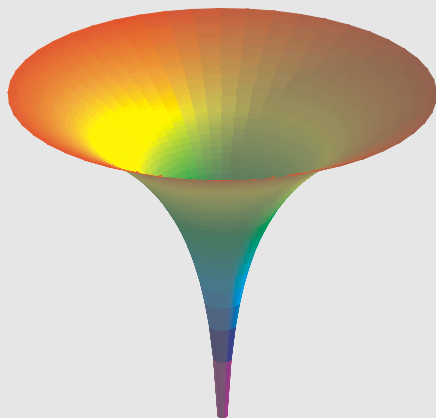
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitosť

Protože \mathbb{C} je metrický prostor, je spojitost funkce f definována jako **spojitosť zobrazení mezi metrickými prostory** (v bodě nebo na množině).

Je však možné vzít za definici spojitosti funkce f jednu z následujících ekvivalentních vlastností plynoucí ze spojitosti reálných funkcí a z rozkladu f na reálnou a imaginární složku:

1. složky $\Re f$ a $\Im f$ spojitě;
2. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé okolí U bodu $f(z)$ existuje okolí V bodu z takové, že $f(V \cap \mathcal{D}(f)) \subset U$.
3. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ jakmile $|z - w| < \delta$ a $z \in \mathcal{D}(f)$.
4. jestliže $z_n \rightarrow z$ v $\mathcal{D}(f)$, pak $f(z_n) \rightarrow f(z)$.

Stejněměrná spojitost je definovaná třetí podmínkou, jestliže volba δ nezávisí na volbě z (tj., kvantifikátor „pro každé z “ se přesouvá za kvantifikátor „existuje δ “).

Z kapitoly o funkcích více proměnných nyní vyplývají některé základní vlastnosti spojitých funkcí, např. o zachování souvislosti složením a zachování kompaktnosti spojitým obrazem. Platí o něco více (použijí se příslušná tvrzení o spojitosti pro funkce z roviny do přímky).

VĚTA.

1. Součet, součin a podíl spojitých k funkcí je spojitá funkce.
2. Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.
3. Spojitý obraz křivkově souvislé množiny je křivkově souvislá množina.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitosť

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.
5. Spojitá funkce na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá.
6. Prostá spojitá funkce na kompaktní množině má spojitou inverzní funkci.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5 5

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná
funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita funkce

Lze opět použít definice a tvrzení z kapitoly o funkcích více proměnných, takže pro funkci f je $\lim_{z \rightarrow u} f(z) = \lim_{z \rightarrow u} \Re(f)(z) + i \lim_{z \rightarrow u} \Im(f)(z)$.

Všechny základní vlastnosti limity reálné funkce platí i pro funkce v komplexním oboru, samozřejmě kromě těch používajících uspořádání. Ale i pro funkce v komplexním oboru lze dokázat některá tvrzení u kterých se v reálných funkcích používá uspořádání, např.

$$\lim_{z \rightarrow u} f(z) = 0, g \text{ je omezená v okolí } u \Rightarrow \lim_{z \rightarrow u} f(z)g(z) = 0.$$

Je to proto, že i pro komplexní funkce platí $\lim_{z \rightarrow u} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow u} |f(z)| = 0$.

Následující tvrzení lze výhodně použít v některých situacích, protože převádí limitu z komplexního oboru na reálný obor jinak než je rozklad na složky.

VĚTA. Necht' f je definována na otevřené množině M a $u \in M$. Pak $\lim_{z \rightarrow u} f(z) = A$ právě když pro každou křivku φ na $[0, 1]$ s vlastnostmi

$$\varphi(0) = u, \varphi : (0, 1] \rightarrow M$$

je $\lim_{t \rightarrow 0+} f(\varphi(t)) = A$.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

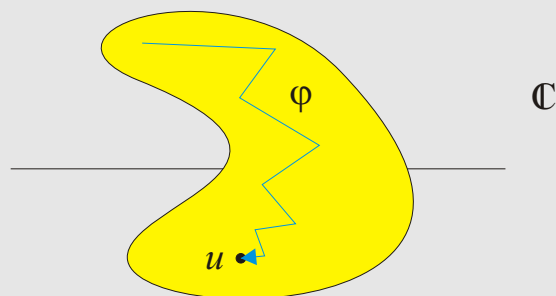
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Za křivku spojující body z_n lze vzít lomenou čáru. Není těžké ukázat, že lze vzít i hladkou křivku (navíc mající všechny derivace).

6

STANDARDY z kapitoly

KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL \mathbb{C}

DEFINICE. Množina \mathbb{C} komplexních čísel je množina \mathbb{R}^2 všech dvojic (x, y) reálných čísel s euklidovskou vzdáleností dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2) rovnou

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

a algebraickými operacemi sčítání a násobení:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Číslo x se nazývá **reálná složka** komplexního čísla $z = (x, y)$ (značení $\Re(z)$) a y jeho **imaginární složka** (značení $\Im(z)$).

Číslo $(x, -y)$ se nazývá **komplexně sdružené** k číslu (x, y) (značení $\overline{(x, y)}$).

Vzdálenost bodu $z = (x, y)$ od počátku se podobně jako v reálných číslech značí absolutní hodnotou $|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je potom $|z_1 - z_2|$.

Počátek, tj. bod $(0, 0)$, bude často značen jako 0.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

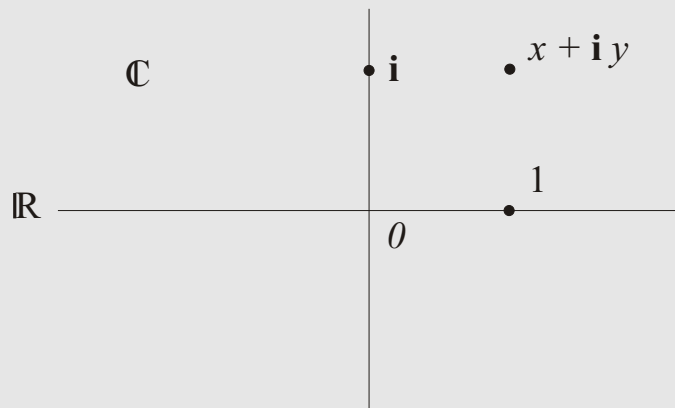
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Alternativní popis komplexních čísel

Jestliže se označí $i = (0, 1)$ (tzv. imaginární jednotka), lze psát komplexní čísla ve tvaru $(x, y) = x + iy$.



Další možností vyjádření komplexních čísel je použití polárních souřadnic: $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde r je vzdálenost bodu (x, y) od počátku, a φ je úhel mezi kladným směrem osy x a spojnici bodu (x, y) s počátkem.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

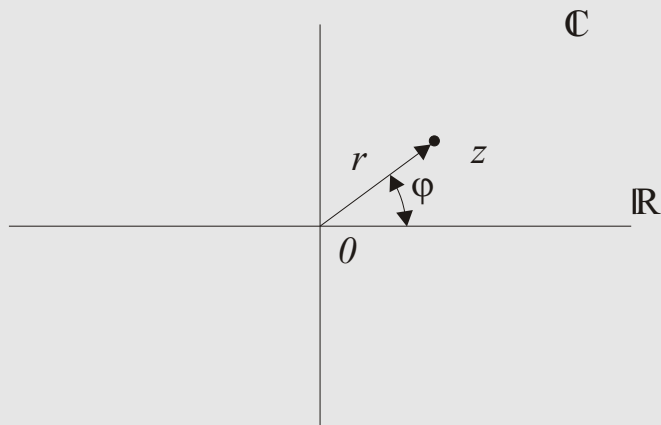
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Úhel φ je, kromě bodu $(0, 0)$, určen jednoznačně až na periodu 2π :

$$\cos \varphi = \frac{\Re z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\Im z}{|z|}.$$

Množina úhlů φ pro dané z se značí $\arg(z)$, takže $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$.

Platí totiž zobecněné **Moivreovy vzorce** pro z_1, z_2 s příslušnými argumenty φ_1, φ_2 :

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

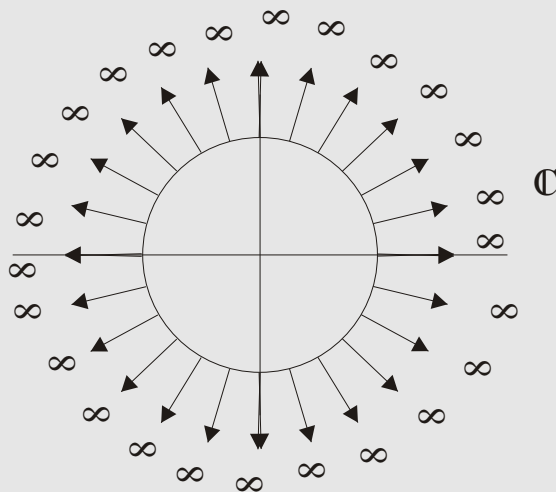
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšířená komplexní rovina \mathbb{C}^*

Na rozdíl od \mathbb{R} se však \mathbb{C} rozšiřuje jen o jedno nevlastní číslo, které bude značeno ∞ a rozšířená rovina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bude označena jako \mathbb{C}^* .



Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0.$$

Operace

$$\infty + \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{\infty}$$

nemají smysl (neurčité výrazy).

Je vhodné zavést $|\infty| = \infty, \overline{\infty} = \infty$.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

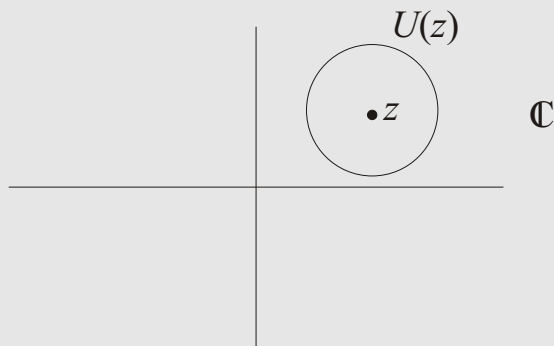
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Topologie roviny



Pro úplnost:

- *okolí* bodu z je libovolná množina obsahující nějaký kruh o středu z ;
- podmnožina \mathbb{C} je *otevřená*, jestliže je okolím každého svého bodu;
- podmnožina \mathbb{C} je *uzavřená*, jestliže její doplněk je otevřený;
- podmnožina \mathbb{C} je *kompaktní*, jestliže je uzavřená a omezená;
- posloupnost z_n konverguje k $z \in \mathbb{C}$, jestliže libovolné okolí bodu z obsahuje skoro všechna z_n .

Množina A se nazývá **souvislá**, jestliže každá funkce spojitá na A mající jen konečně mnoho hodnot je konstantní.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

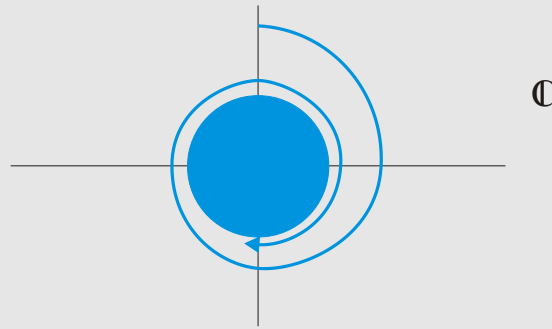
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

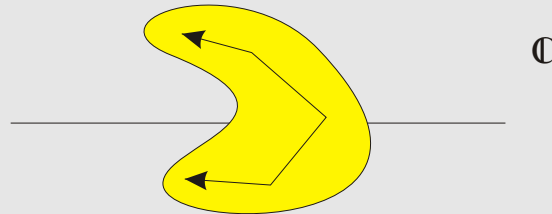
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Množina je **křivkově souvislá**, jestliže každé její dva body lze spojit křivkou ležící v oné množině.



Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.

Otevřené souvislé množiny se nazývají **oblastmi**.

Oblast spolu se svou hranicí se nazývá **uzavřená oblast**.

Souvislá množina se nazývá **jednoduše souvislá**, jestliže její doplněk je souvislá množina.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

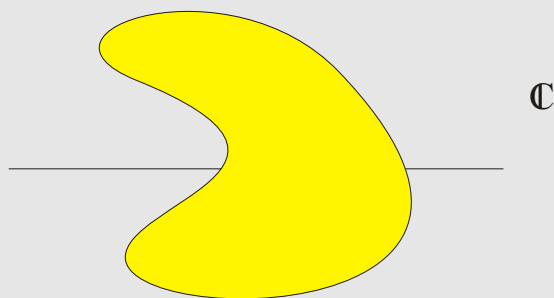
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

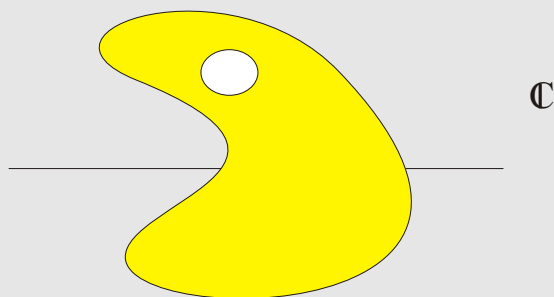
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Oblast G je jednoduše souvislá, jestliže s každou Jordanovou křivkou v G leží v G i její vnitřek.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

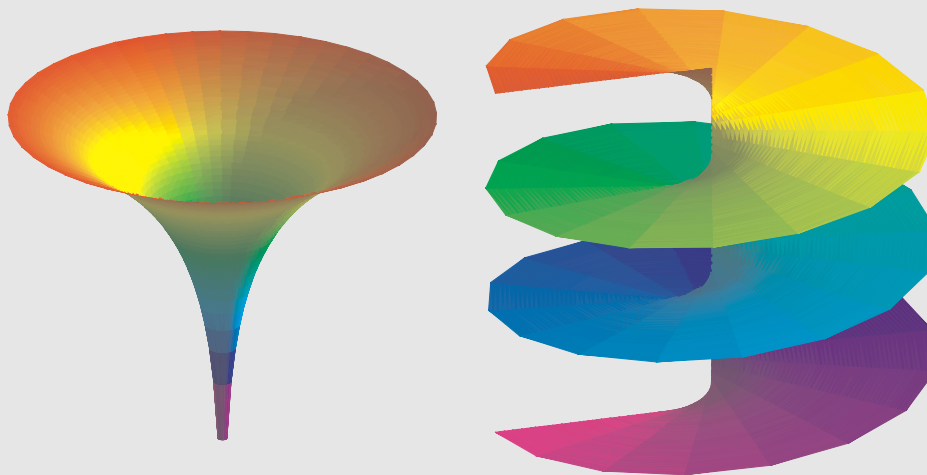
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Komplexní funkce komplexní proměnné zobrazuje nějakou podmnožinu \mathbb{C} do \mathbb{C} . Můžeme se na ni tedy dívat jako na dvojrozměrné vektorové pole (reálné) definované na podmnožině roviny, neboli $f(z) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$ ($f_1 = \Re f$ je reálná složka a $f_2 = \Im f$ je imaginární složka funkce f).

Budou se vyskytovat přiřazení, která jednomu bodu přiřadí více hodnot (jako např. $\arg z$). Takovéto přiřazení se nazývá **mnohoznačné zobrazení** a v případě, že je definováno na komplexních číslech a hodnoty jsou opět komplexní čísla, bude se nazývat **mnohoznačná funkce**.



LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitosť

Za definici spojitosti funkce f lze vzít jednu z následujících ekvivalentních vlastností plynoucí ze spojitosti reálných funkcí a z rozkladu f na reálnou a imaginární složku:

1. složky $\Re f$ a $\Im f$ spojitě;
2. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé okolí U bodu $f(z)$ existuje okolí V bodu z takové, že $f(V \cap \mathcal{D}(f)) \subset U$.
3. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ jakmile $|z - w| < \delta$ a $z \in \mathcal{D}(f)$.
4. jestliže $z_n \rightarrow z$ v $\mathcal{D}(f)$, pak $f(z_n) \rightarrow f(z)$.

Stejnomořná spojitost je definovaná třetí podmínkou, jestliže volba δ nezávisí na volbě z (tj., kvantifikátor „pro každé z “ se přesouvá za kvantifikátor „existuje δ “).

VĚTA.

1. Součet, součin a podíl spojitých k funkcí je spojitá funkce.
2. Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.
3. Spojitý obraz křivkově souvislé množiny je křivkově souvislá množina.
4. Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.
5. Spojitá funkce na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá.
6. Prostá spojitá funkce na kompaktní množině má spojitou inverzní funkci.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita funkce

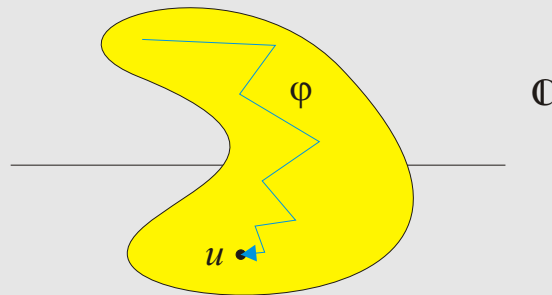
Definujeme pro funkci f

$$\lim_{z \rightarrow u} f(z) = \lim_{z \rightarrow u} \Re(f)(z) + i \lim_{z \rightarrow u} \Im(f)(z).$$

VĚTA. Necht' f je definována na otevřené množině M a $u \in M$. Pak $\lim_{z \rightarrow u} f(z) = A$ právě když pro každou křivku φ na $[0, 1]$ s vlastnostmi

$$\varphi(0) = u, \varphi : (0, 1] \rightarrow M$$

je $\lim_{t \rightarrow 0+} f(\varphi(t)) = A$.



V polárním zápisu čísla z se r nazývá *průvodič* a φ *argument* čísla z . Zobrazení \arg , které přiřazuje komplexnímu číslu jeho argument, není jednoznačné.

Lze se omezit jen na některé hodnoty argumentu, např. interval $[0, 2\pi)$ a potom je \arg jednoznačnou funkcí (kromě 0).

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

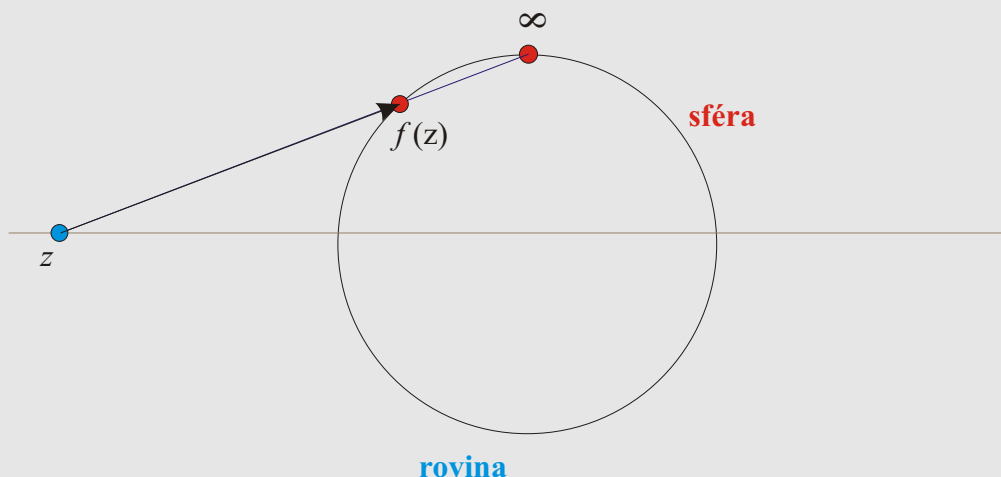
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' S je sféra $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól“ $(0,0,1)$. Rovina \mathbb{C} se ztotožní s rovinou os x, y , tj. množinou $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Tzv. stereografická projekce je prosté zobrazení $S \setminus \{P\}$ na \mathbb{C} : vezme se přímka procházející bodem P , která není rovnoběžná s \mathbb{C} – ta protíná sféru S přesně v jednom dalším bodě a rovinu \mathbb{C} taky přesně v jednom bodě, jeho stereografickém obraze.



Sféra S tedy slouží jako model rozšířené komplexní roviny \mathbb{C}^* , přičemž P odpovídá nevlastnímu bodu ∞ .

Uvedený model \mathbb{C}^* ve tvaru sféry bude nazýván *Riemannova sféra*.

Je-li f mnohoznačné zobrazení na G , pro každé $z \in G$ vyberte jen jednu hodnotu z množiny $f(z)$ (označte ji $F(z)$), dostane se funkce F na G , která se nazývá (jednoznačná) **větev** funkce f .

Grafem mnohoznačné funkce imaginární část logaritmu je schodiště.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

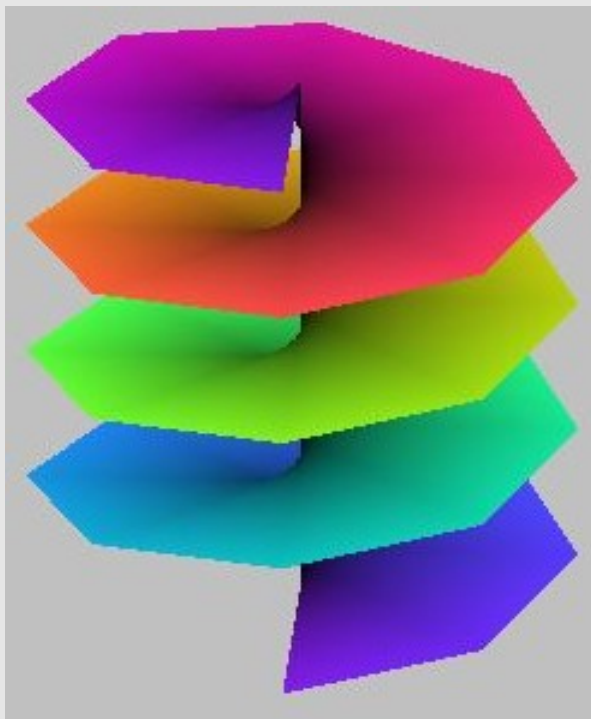
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pokud je třeba vyjádřit podíl dvou komplexních čísel jako dvojice reálných čísel, rozšíří se zlomek komplexně sdruženým jmenovatelem. Například pro podíl z/w , kde $z = (x, y)$, $w = (u, v)$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \left(\frac{xu - yv}{u^2 + v^2}, \frac{xv + yu}{u^2 + v^2} \right).$$

Dokažte, že platí

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + \mathbf{i} \sin(n\varphi)).$$

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené číslo
absolutní hodnota
imaginární jednotka
průvodič
argument
Moivreovy vzorce
nevlastní bod

topologie roviny

konvergence
souvislá množina
oblast
křivková souvislost
jednoduchá souvislost

funkce

mnohoznačná funkce
spojitost
limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže pro $n \in \mathbb{N}$ značí $\sqrt[n]{z}$ ta komplexní čísla w , pro která je $w^n = z$, pak

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\varphi/n) + i \sin(\varphi/n)).$$

Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$

Spočítejte $(1+i)^{20}$.

Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.

LEKCE31-KOM

komplexní čísla

komplexně sdružené
číslo

absolutní hodnota

imaginární jednotka

průvodič

argument

Moivreovy vzorce

nevlastní bod

topologie roviny

konvergence

souvislá množina

oblast

křivková souvislost

jednoduchá souvis-
lost

funkce

mnohoznačná

funkce

spojitost

limita funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9