KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE

V předchozích částech byl důraz kladen na reálná čísla a na reálné funkce.

Pokud se komplexní čísla vyskytovala, bylo to z hlediska kartézského součinu dvou reálných přímek, např. při zkoumání funkcí dvou proměnných. Nebyly při tom brány v úvahu všechny algebraické vlastnosti komplexních čísel.

To jsem byla hodná, co?

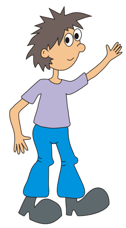
Je známo, že některé úlohy zadané reálnými funkcemi nemají řešení v reálném oboru, ale mají řešení v komplexním oboru.

Takovým jednoduchým případem jsou kvadratické rovnice.

Kořeny kvadratické rovnice mi připomínají mládí. To jsem byl taky kořen.

Složitější situace bude probrána v kapitole o Fourierově transformaci: inverzní obrazy Laplaceovy transformace reálné funkce se vypočítají pomocí integrálu komplexních funkcí.

A to je i pro mně složitější.



Jako když jsem jednou doma pověsil obrazy inverzně. Koukalo se na ně ode zdi.

I když mnoho vlastností komplexních čísel lze získat z vlastností reálných čísel, nelze tak získat všechny potřebné vlastnosti.

Navíc, už při zkoumání funkcí dvou proměnných byly vidět podstatné rozdíly ve složitosti jistých množin na přímce a v rovině.

V této kapitole proto budou zopakovány některé vlastnosti roviny a funkcí dvou proměnných (a základy komplexních čísel ze střední školy).

Raději nejmenované střední školy.

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL $\mathbb{C}$

DEFINICE. Množina $\mathbb{C}$ komplexních čísel je množina $\mathbb{R}^2$ všech dvojic (x, y) reálných čísel s euklidovskou vzdáleností dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2) rovnou

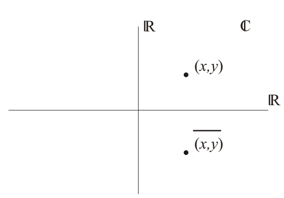
$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

a algebraickými operacemi sčítání a násobení:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.\end{aligned}$$

Číslo x se nazývá reálná složka komplexního čísla $z = (x, y)$ (značení $\Re(z)$) a y jeho imaginární složka (značení $\Im(z)$).

Číslo $(x, -y)$ se nazývá komplexně sdružené k číslu (x, y) (značení $\overline{(x, y)}$).



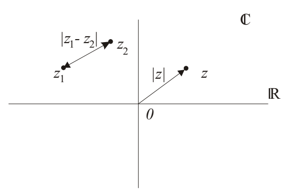
Pokud jste vybojnější povahy, tak raději komplexní čísla nestudujte.

S uvedeným násobením a sčítáním tvoří $\mathbb{C}$ těleso, s uvedenou vzdáleností tvoří metrický prostor.

Pokud se ztotožní reálná čísla $r \in \mathbb{R}$ s komplexními čísly $(r, 0)$, je $\mathbb{R}$ podtěleso $\mathbb{C}$ (a jeho metrický podprostor).

Vzdálenost bodu $z = (x, y)$ od počátku se podobně jako v reálných číslech značí absolutní hodnotou $|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je potom $|z_1 - z_2|$. Pro absolutní hodnotu platí stejná pravidla jako v $\mathbb{R}$ (viz *Otázky*).

Počátek, tj. bod $(0, 0)$, bude často značen jako 0.

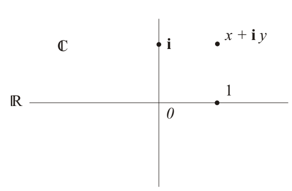


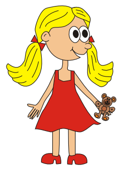
Óóóó.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

Alternativní popis komplexních čísel

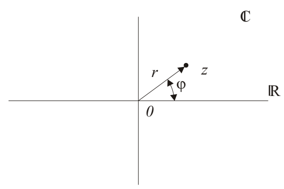
Jestliže se označí i $= (0, 1)$ (tzv. imaginární jednotka), lze psát komplexní čísla ve tvaru $(x, y) = x + \mathrm{i}y$.





Jen jestli. Jednou jsem takhle čekala celý den, jestli dostanu zmrzlinu.

Další možností vyjádření komplexních čísel je použití polárních souřadnic: $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, kde r je vzdálenost bodu (x, y) od počátku. a φ je úhel mezi kladným směrem osy x a spojnicí bodu (x, y) s počátkem.



Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

Úhel φ je, kromě bodu $(0, 0)$, určen jednoznačně až na periodu 2π:

$$\cos\varphi = \frac{\Re z}{|z|}\,, \quad \sin\varphi = \frac{\Im z}{|z|}\,.$$

Totéž komplexní číslo tedy vyjádříme různými způsoby. Vždy si můžeme vybrat ten způsob, který se nejlíp hodí.

Popis φ pomocí funkce arctg je uveden v *Otázkách*. Množina úhlů φ pro dané z se značí $\arg(z)$, takže $z = |z|(\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\sin(\arg(z)))$.

To je velmi důležitý vzoreček. Jde poplést.

Popis pomocí polárních souřadnic je vhodný při násobení komplexních čísel. Platí totiž zobecněné Moivreovy vzorce pro z_1, z_2 s příslušnými argumenty φ_1, φ_2:

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,,\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Prostě to i je zakuklené otáčení v rovině.

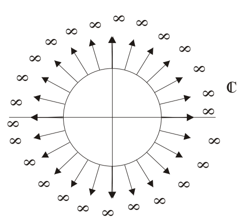
Já se třeba celý den točím kolem plotny. i.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 2

Rozšířená komplexní rovina $\mathbb{C}^*$

Stejně jako v $\mathbb{R}$ je vhodné rozšířit rovinu o nevlastní body.

Na rozdíl od $\mathbb{R}$ se však $\mathbb{C}$ rozšiřuje jen o jedno nevlastní číslo, které bude značeno ∞ a rozšířená rovina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bude označena jako $\mathbb{C}^*$.



Nevim nevim, jestli je to fakt jednodušší.

Jednou jsem se na rovině komplexně vyboural. A to ještě nebyla rozšířená jako dneska.

Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty\,, \, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0\,,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty\,, \, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0\,.$$

Operace

$$\infty + \infty\,, \quad \infty \cdot 0\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{0}{0}$$

nemají smysl (neurčité výrazy).

Je vhodné zavést $|\infty| = \infty$, $\overline{\infty} = \infty$.

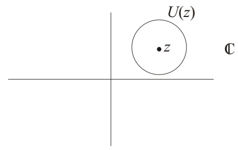
A nad komplexní rovinou se snesla algebraická mlha ...

BTW. Jednou jsem takové i viděl na Václaváku.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

Topologie roviny

V kapitole o funkcích více proměnných byla pomocí vzdálenosti popsána konvergence v $\mathbb{R}^2$ a její vlastnosti, dále pak jisté vlastnosti podmnožin roviny, jako otevřenost, uzavřenost, omezenost, kompaktnost, okolí bodů, hromadné body.



Pro úplnost:

- *okolí* bodu z je libovolná množina obsahující nějaký kruh o středu z;
- podmnožina $\mathbb{C}$ je *otevřená*, jestliže je okolím každého svého bodu;
- podmnožina $\mathbb{C}$ je *uzavřená*, jestliže její doplněk je otevřený;
- podmnožina $\mathbb{C}$ je *kompaktní*, jestliže je uzavřená a omezená;
- posloupnost z_n konverguje k $z \in \mathbb{C}$, jestliže libovolné okolí bodu z obsahuje skoro všechna z_n.

V *Poznámkách, Příkladech a Otázkách* je probráno rozšíření uvedených pojmů na $\mathbb{C}^*$.

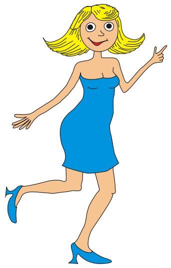
Pil jsem pětihvězdičkový koňak a spal v pětihvězdičkovém hotelu. Jedna hvězdička mně neláká.

Kromě tvrzení obsahujících pojmy z uspořádání, platí stejné věty pro konvergenci jako v $\mathbb{R}$:

VĚTA.

1. $\{z_n\}$ má nejvýše jednu limitu,
2. je-li posloupnost $\{z_n\}$ konstantní, $z_n = u$, pak $\lim z_n = u$,
3. jestliže $\lim z_n = u$, pak $\lim z_{k_n} = u$ pro každou podposloupnost $\{z_{k_n}\}$ posloupnosti $\{z_n\}$,
4. jestliže z každé podposloupnosti $\{z_n\}$ lze vybrat podposloupnost konvergující k u, pak $\{z_n\}$ konverguje k u.
5. jestliže $\{z_n\}$ konverguje v $\mathbb{C}$, pak $\{z_n\}$ je omezená posloupnost.
6. posloupnost $\{z_n\}$ konverguje v $\mathbb{C}$ právě když je cauchyovská (tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ (n, k > n_0 \Rightarrow |z_n - z_k| < \varepsilon)$),
7. platí tvrzení o limitě součtu, součinu a podílu.

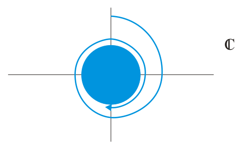
Beze změny zůstává definice hromadných bodů posloupností nebo množin v $\mathbb{C}$ a všechna tvrzení o nich, která mají smysl v $\mathbb{C}$ (tj. musí se vynechat tvrzení používající uspořádání, např. nemá smysl hovořit o největším a nejmenším hromadném bodě posloupnosti). V Cantorově větě se místo omezeného uzavřeného intervalu bere kompaktní množina (viz *Otázky*).



Toto mimojiné znamená, že přibyla zadarmo kupa tvrzení. Máte radost?

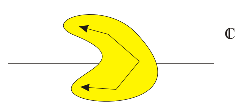
Bude potřeba další důležitý pojem, a to souvislost množiny.

Množina A se nazývá souvislá, jestliže každá funkce spojitá na A mající jen konečně mnoho hodnot je konstantní.



Jestliže je funkce nulová na spirále obtáčející kruh, bude nulová i na tom kruhu. Víc na tom není.

Pro účely této kapitoly bude stačit silnější pojem než souvislost. Množina je křivkově souvislá, jestliže každé její dva body lze spojit křivkou ležící v oné množině.



Když peču koblížky, rozdělím křivkově souvislé těsto na malé křivkově souvislé množiny a peču dozlatova.

Zřejmě je každá křivkově souvislá množina je souvislá.

A upečené koblížky jsou souvislé, jinak bych se jako kuchařka styděla.

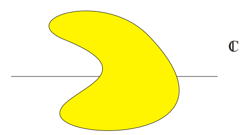
Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.

Otevřené souvislé množiny se nazývají oblastmi.

Oblast spolu se svou hranicí se nazývá uzavřená oblast.

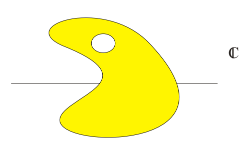
Pro podrobnější pohled na souvislost viz *Poznámky, Příklady* a *Otázky*.

Souvislá množina se nazývá jednoduše souvislá, jestliže její doplněk je souvislá množina.



Oblast G je jednoduše souvislá, jestliže s každou Jordanovou křivkou v G leží v G i její vnitřek.

A toto je množina, která není jednoduše souvislá.



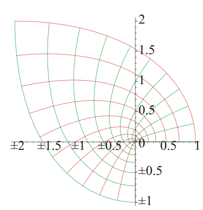
Je to děravý. Vidíte to jasně.

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Komplexní funkce komplexní proměnné zobrazuje nějakou podmnožinu $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Můžeme se na ni tedy dívat jako na dvojrozměrné vektorové pole (reálné) definované na podmnožině roviny, neboli $f(z) = f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = f_1(x,y) + \mathrm{i} f_2(x,y)$ ($f_1 = \Re f$ je reálná složka a $f_2 = \Im f$ je imaginární složka funkce f).

Jde o jakousi deformaci roviny. Na té funkci nevidíme ten proces deformace, ale vidíme až výsledný tvar.

Takhle například vypadá obraz jednotkového čtverce pomocí zobrazení $z \mapsto z^3$.

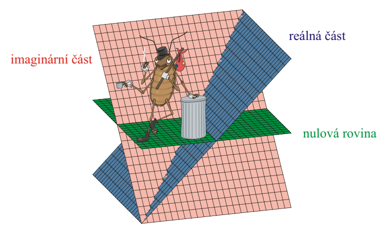


Ta funkce ten čtverec pěkně zřídila. A to se to mohlo ještě překrejvat.

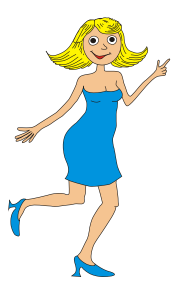
Já dovedu s dobře rozváleným těstem jinší kouzla.

Abychom mohli úspěšně pracovat s komplexními funkcemi komplexní proměnné, bývá mimo výše uvedený model typu "rozválené těsto"užitečné zkoumat odděleně reálnou a imaginární složku zvlášť.

Například pro funkci $z \mapsto z$ je reálná složka zobrazení $(x, y) \mapsto x$ a imaginární složka zobrazení $(x, y) \mapsto y$. Jde tedy vlastně o dvě plochy nad rovinou (x, y).



Takže, světe div se! Identita jsou dvě roviny. Ani nechci domyslet, co bude s dalšíma funkcema.



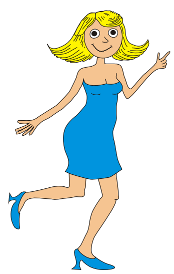
U mnohých funkcí je to přesně jako u identity (lokálně a až na konstantu). Pokud tomu jednou porozumíte, budu slavit.

Nevím sice o co jde, ale budu taky slavit.

Je zřejmé, jak se definuje součet, součin a podíl komplexních funkcí (vše bodově), jejich složení, inverzní funkce, jejich bodová limita.

Nemá smysl hovořit o monotónních funkcích, o extrémech, o konvexních funkcích.

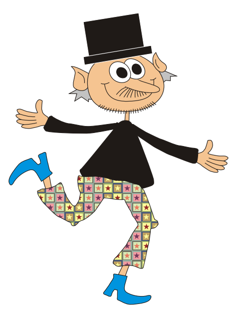
Ale má smysl pojem omezená funkce, sudá, lichá nebo periodická funkce.



Abych byla přesnější. Když nemá smysl znamená, že má smysl, ale skoro nulový. A když má smysl, tak velmi nenulový.

Uvědomte si rozdíl oproti kapitole o funkcích více proměnných, kde se součin a podíl funkcí uvažoval pouze pro funkce s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Úmluva: Pokud nebude řečeno jinak, bude v této i následujících kapitolách termín *funkce* znamenat *komplexní funkce komplexní proměnné*.



Pokud jde o funkce, tak mezi kouzelníky mám nejvyšší funkci já.

Je to imaginární část logaritmu a to ví každé malé děcko.

Je tu opravdu něco kouzelně jednoduchého. Komplexní exponenciála není prostá a její inverze je zdrojem nesčetných kouzel v komplexní rovině. Tak se na to připravíme.

Budou se vyskytovat přiřazení, která jednomu bodu přiřadí více hodnot (jako např. $\arg z$). Takovéto přiřazení se nazývá mnohoznačné zobrazení a v případě, že je definováno na komplexních číslech a hodnoty jsou opět komplexní čísla, bude se nazývat mnohoznačná funkce.

Tady například vidíme reálnou a imaginární část komplexního logaritmu.

BTW, ta imaginární část asi nemá daleko k funkci $\arg$, O.K. ?

Spojitost

Protože $\mathbb{C}$ je metrický prostor, je spojitost funkce f definována jako spojitost zobrazení mezi metrickými prostory (v bodě nebo na množině).

Je však možné vzít za definici spojitosti funkce f jednu z následujících ekvivalentních vlastností plynoucí ze spojitosti reálných funkcí a z rozkladu f na reálnou a imaginární složku:

1. složky $\Re f$ a $\Im f$ spojité;

2. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé okolí U bodu $f(z)$ existuje okolí V bodu z takové, že $f(V \cap \mathcal{D}(f)) \subset U$.

3. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ jakmile $|z - w| < \delta$ a $z \in \mathcal{D}(f)$.

4. jestliže $z_n \to z$ v $\mathcal{D}(f)$, pak $f(z_n) \to f(z)$.

Stejnoměrná spojitost je definovaná třetí podmínkou, jestliže volba δ nezávisí na volbě z (tj., kvantifikátor „pro každé z" se přesouvá za kvantifikátor „existuje δ").

Z kapitoly o funkcích více proměnných nyní vyplývají některé základní vlastnosti spojitých funkcí, např. o zachování souvislosti složením a zachování kompaktnosti spojitým obrazem. Platí o něco více (použijí se příslušná tvrzení o spojitosti pro funkce z roviny do přímky).

VĚTA.

1. Součet, součin a podíl spojitých k funkcí je spojitá funkce.

2. Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.

3. Spojitý obraz křivkově souvislé množiny je křivkově souvislá množina.

4. Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.

5. Spojitá funkce na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá.

6. Prostá spojitá funkce na kompaktní množině má spojitou inverzní funkci.

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg. Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.

2. Spojitost složení je dokázána v kapitole o funkcích více proměnných (a plyne jednoduše z poslední charakterizující vlastnosti spojitosti o zachovávání limit posloupností).

3. Nechť A je křivkově souvislá a f je spojitá funkce definovaná na A. Nechť $x, y \in f(A)$. Existují body $a, b \in A$ tak, že $f(a) = x, f(b) = y$ a křivka $\varphi : [0, 1] \to A$ tak, že $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. Pak křivka $f \circ \varphi$ leží v $f(A)$ a spojuje body x, y.

4. Nechť A je kompaktní v $\mathbb{C}$ a $\{z_n\}$ je posloupnost v $f(A)$. Zvolí se body $w_n \in A \cap f^{-1}(z_n)$. Protože A je kompaktní, existuje podposloupnost $\{w_{k_n}\}$ konvergující k nějakému $w \in A$. Protože f je spojitá, konverguje $\{z_{k_n}\}$ k $f(w) \in f(A)$.

5. Nechť f je spojitá funkce na kompaktní množině A, která není stejnoměrně spojitá. Pak existuje $\varepsilon > 0$ a body $u_n, v_n \in A$ tak, že $|u_n - v_n| < 1/n$ a $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$. Protože A je kompaktní, lze najít konvergentní podposloupnosti $\{u_{k_n}\}, \{v_{k_n}\}$ konvergující k $u \in A$. Tím se dostává spor, protože $|f(u_{k_n}) - f(v_{k_n})|$ nekonverguje k 0.

6. Nechť je spojitá komplexní funkce f na kompaktní množině A prostá. Pro libovolný bod $b \in f(A)$ se ukáže, že f^{-1} je spojitá v b. Nechť tedy $\{b_n\}$ je posloupnost v $f(A)$ konvergující k b. Má se ukázat, že $f^{-1}(b_n)$ konverguje k $f^{-1}(b)$. Je-li $\{c_n\}$ libovolná podposloupnost posloupnosti $f^{-1}(b_n)$, lze z ní vybrat podposloupnost $\{c_{k_n}\}$ s nějakou limitou c. Protože f je spojitá, konverguje $f(c_{k_n})$ k $f(c)$ a tedy $f(c) = b$. Takže $\{c_{k_n}\}$ konverguje k $f^{-1}(b)$. Podle čtvrté vlastnosti konvergence posloupností konverguje $f^{-1}(b_n)$ k $f^{-1}(b)$. $\diamond$

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5 5

Limita funkce

Lze opět použít definice a tvrzení z kapitoly o funkcích více proměnných, takže pro funkci f je $\lim_{z \to u} f(z) = \lim_{z \to u} \Re(f)(z) + \mathrm{i} \lim_{z \to u} \Im(f)(z)$.

Všechny základní vlastnosti limity reálné funkce platí i pro funkce v komplexním oboru, samozřejmě kromě těch používajících uspořádání. Ale i pro funkce v komplexním oboru lze dokázat některá tvrzení u kterých se v reálných funkcích používá uspořádání, např.

$$\lim_{z\to u} f(z) = 0, g \text{ je omezená v okolí } u \Rightarrow \lim_{z\to u} f(z)g(z) = 0\,.$$

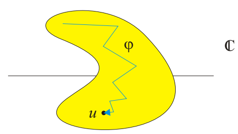
Je to proto, že i pro komplexní funkce platí $\lim f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim |f(z)| = 0$.

Následující tvrzení lze výhodně použít v některých situacích, protože převádí limitu z komplexního oboru na reálný obor jinak než je rozklad na složky.

VĚTA. Nechť f je definována na otevřené množině M a $u \in M$. Pak $\lim_{z\to u} f(z) = A$ právě když pro každou křivku φ na $[0,1]$ s vlastnostmi

$$\varphi(0) = u\,, \varphi : (0,1] \to M$$

je $\lim_{t\to 0_+} f(\varphi(t)) = A$.



Důkaz. Protože φ je spojitá, je nutnost podmínky zřejmá. Zbývá dokázat postačitelnost podmínky. Pro jednoduchost značení lze předpokládat, že $u = 0$ a že $[-1,1] \times [-1,1] \subset M$.

Nechť tedy $\lim_{z\to u} f(z) \neq A$. Pak existuje posloupnost $\{z_n\} \subset (-1,1) \times (-1,1) \setminus \{0\}$ konvergující k 0, přičemž $\lim f(z_n) \neq A$. Zřejmě lze posloupnost $\{z_n\}$ vybrat tak, že $\Re z_n$ a $\Im z_n$ konvergují k 0 monotónně, např. jsou klesající.

Nyní stačí vzít spojitou funkci na $[0,1]$, která má v bodech $\Re z_n$ hodnoty $\Im z_n$. $\diamond$

Za křivku spojující body z_n lze vzít lomenou čáru. Není těžké ukázat, že lze vzít i hladkou křivku (navíc mající všechny derivace).

6

POZNÁMKY

Poznámky 1:

1. Komplexně sdružené číslo k z je v rovině znázorněno jako symetrické k z podle reálné osy.

2. Zobrazení f, které přiřazuje komplexnímu číslu jeho komplexně sdružené číslo, je idempotentní, tj. $f^2 = f$.

3. Protože $|rz| = |r||z|$ pro libovolné reálné číslo r, je absolutní hodnota na $\mathbb{C}$ norma a $\mathbb{C}$ s touto normou je Banachův prostor (viz kapitolu o Banachových prostorech). To ovšem platí pro libovolný Euklidovský prostor.
Vezme-li se však v úvahu i násobení komplexních čísel, tvoří $\mathbb{C}$ Banachovu algebru a to už nastane jen pro $\mathbb{R}^4$ (tzv. kvaterniony), kde je ale násobení nekomutativní.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

1. Zápisy pomocí i jsou mnohem pružnější než pomocí dvojic. Vzhledem ke komutativnosti sčítání a násobení znamenají následující zápisy totéž komplexní číslo:

$$-3 + \mathrm{i}5\,, \quad -3 + 5\mathrm{i}\,, \quad 5\mathrm{i} - 3\,, \quad \mathrm{i}5 - 3\,.$$

Protože $\mathrm{i}^2 = -1$, snadno se pomocí zápisu $x + \mathrm{i}y$ provádí násobení a dělení čísel.

2. V polárním zápisu čísla z se r nazývá *průvodič* a φ *argument* čísla z. Zobrazení $\arg$, které přiřazuje komplexnímu číslu jeho argument, není jednoznačné.

Lze se omezit jen na některé hodnoty argumentu, např. interval $[0, 2\pi)$ a potom je $\arg$ jednoznačnou funkcí (kromě 0). Podrobnosti budou uvedeny v kapitole o elementárních funkcích.

Bod $z = 0$ se obvykle nevyjadřuje pomocí polárních souřadnic. Pokud je to však nutné z formálních důvodů, je $r = |z| = 0$ a úhel φ může mít libovolnou velikost (tu je možné podmínkami omezit).

BTW, nikdy nevíte, jakou nulu v životě potkáte. V polárních souřadnicích se nuly nemusíte bát vůbec.

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

Někteří z vás si asi uvědomili, co je vlastně podstatné na rozšířené reálné přímce. Je to kompaktnost $\mathbb{R}^*$. A z téhož důvodu se rozšiřuje i $\mathbb{C}$.

Jedno nekonečno.

Proč se rozšiřuje komplexní rovina jen o jedno nevlastní číslo, kdežto reálná přímka o dvě? Podívejte se na situaci z pohledu geometrie.

Přímka „běží na dvě strany" a může se uzavřít „dvěma konci". Je možné si to přiblížit zúžením (zdeformováním) přímky na interval $(-1, 1)$, přičemž čím více se blížíme k bodu -1 nebo 1, tím jdeme pomaleji (abychom vyjádřili fakt, že k těmto bodům nelze dojít). Nevlastní body pak odpovídají oběma „koncům", neboli hranici intervalu na přímce.

To je přesné. ANO.

Podobná interpretace v rovině je komplikovanější. Zúženou rovinu může někdo vidět jako vnitřek kruhu nebo jako vnitřek čtverce, nebo obdélníka, mnohoúhelníka, apod. Všechny tyto případy mají jedno společné. Jejich hranice je jednoduchá uzavřená křivka. Bylo by možné vzít za nevlastní body jednotlivé body této hranice, ale tím by existovalo nekonečně mnoho (nespočetně mnoho) nevlastních bodů, což není vhodné (a navíc tyto body nemají potřebné vlastnosti).

Lze vzít jen konečně mnoho nevlastních čísel? Ano, pokud se vezme celá křivka jako jeden bod. Tím se dostává jedno nekonečno. Mít dvě nekonečna by znamenalo rozdělit křivku na dvě disjunktní části, ale které? Křivka je souvislá množina, kdežto předchozí hranice u reálné přímky byla nesouvislá a skládala se ze dvou souvislých částí.

To je ten podstatný rozdíl mezi přímkou a Euklidovskými prostory dimenze aspoň dvě. Dá se ukázat, že není možné získat z roviny kompaktní prostor přidáním n bodů, $n > 1$.

Sféra versus $\mathbb{C}$.

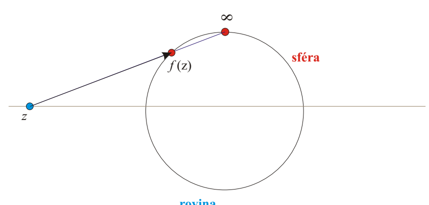
Kdo má dobrou představivost, může poznat, že předchozí ztotožnění hranice kruhu do jednoho bodu vytvořilo útvar podobný sféře, tj. hranici koule v $\mathbb{R}^3$.

Takhle dělám jablka v županu.

Následující řádky to popíší přesněji.

Nechť S je sféra $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól" (0,0,1). Rovina $\mathbb{C}$ se ztotožní s rovinou os x, y, tj. množinou $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Tzv. stereografická projekce je prosté zobrazení $S \setminus \{P\}$ na $\mathbb{C}$: vezme se přímka procházející bodem P, která není rovnoběžná s $\mathbb{C}$ – ta protíná sféru S přesně v jednom dalším bodě a rovinu $\mathbb{C}$ taky přesně v jednom bodě, jeho stereografickém obraze.



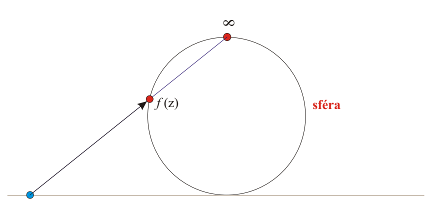
Sféra S tedy slouží jako model rozšířené komplexní roviny $\mathbb{C}^*$, přičemž P odpovídá nevlastnímu bodu ∞.

Tento model není vhodný pro algebraické operace, ale je velmi vhodný pro interpretace topologických vlastností, protože je to hezký kompaktní prostor.

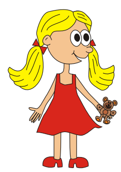
Samozřejmě, metrika v S je jiná než v $\mathbb{C}$, ale tyto dvě metriky jsou ekvivalentní, tj. dávají stejnou konvergenci (viz *Otázky*). Takže např. podmnožina $S \setminus \{P\}$ je otevřená právě když její stereografický obraz je otevřený v $\mathbb{C}$.

Uvedený model $\mathbb{C}^*$ ve tvaru sféry bude v dalším nazýván *Riemannova sféra*.

Je možné použít jinou projekci koule na rovinu, např. se za $\mathbb{C}$ vezme tečná rovina v „jižním pólu" koule a vezme se projekce ze severního pólu na tuto tečnou rovinu.



Aneb, tak se nám pěkně zakulatila.



A jak bývala pěkně placatá.

Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

Pojem souvislosti je pojem závisející jen na konvergenci (spojitost funkce). Stejně tomu tak je i u křivkově souvislých množin a jednoduše souvislých množin.

V praxi se vyskytující oblasti mívají za hranice jen konečně mnoho po částech hladkých křivek nebo bodů nebo (polo)přímek. Pokud je pak takováto oblast jednoduše souvislá a omezená, její hranice je jednoduchá po částech hladká uzavřená křivka.

Podobně, jako tomu bylo u intervalů, se používá občas i u oblastí pojem polouzavřená oblast, což je oblast spolu s některými body své hranice. V některých textech se pod pojmem oblast míní jen omezená oblast, pak uzavřená oblast je kompaktní.

Dá se ukázat (ale důkaz je složitý), že spojitý prostý obraz oblasti je zase oblast. Odtud již jednoduše plyne, že příslušná funkce má spojitou inverzi.

Bavíme se zde o těstě na pizzu. Tomu dobře rozumím.

Konec poznámek 4.

Poznámky 5:

Termín *mnohoznačná funkce* je nutné brát jako celek.

Některá matematická pojmenování jsou vytvořena "v dobré víře", a tak nelze za takové věci nikoho odsoudit ani potrestat. Ale do průvanu bych semtam někoho strčil.

Podle definice je funkce vždy jednoznačná a tedy chápání uvedeného termínu jako spojení dvou termínů *mnohoznačná* a *funkce* by bylo nesmyslné.

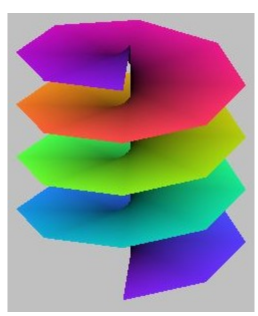
Nicméně, vzhledem k průhlednosti situace se používají bez problému se srozumitelností výrazy typu „funkce f je mnohoznačná".

Mnohoznačná funkce v tomto textu bude mít na svém definičním oboru vždy nějaké hodnoty (tj., pro $z \in \mathcal{D}_f$ je množina $f(z)$ neprázdná).

Je-li f mnohoznačné zobrazení na G, pro každé $z \in G$ vyberte jen jednu hodnotu z množiny $f(z)$ (označte ji $F(z)$), dostane se funkce F na G, která se nazývá (jednoznačná) větev funkce f.

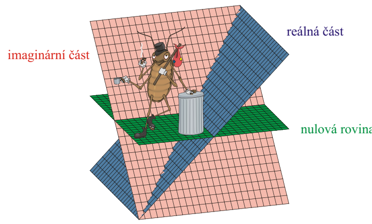
Jsem z toho na větvi.

Grafem mnohoznačné funkce imaginární část logaritmu je schodiště.



Ty větve tu byly ty patra.

Veliký rozdíl oproti reálným funkcím je ve znázornění funkcí v komplexním oboru. Graf reálné funkce (jedné nebo dvou proměnných) si lze představit, nebo i narýsovat, ale u funkce s komplexními hodnotami to nejde. Částečnou možností je představa grafu reálné složky a grafu imaginární složky.



Jak bylo poznamenáno, nemá smysl hovořit u funkcí s komplexními hodnotami o extrémech. Pokud má funkce f jen reálné hodnoty, smysl to má. To jsou např. funkce $\Re(z), \Im(z), |z|$ a zvláště u poslední funkce se existence maxima a minima na kompaktních množinách používá.

Konec poznámek 5.

PŘÍKLADY

Příklady 1:

1. Množina komplexních čísel z splňujících nerovnost $|z - z_0| < \varepsilon$, pro dané komplexní číslo z_0 a reálné číslo $\varepsilon > 0$, je vnitřek kruhu o středu z_0 a poloměru ε. To se snadno ukáže použitím vzdálenosti místo absolutní hodnoty.

2. Pokud je třeba vyjádřit podíl dvou komplexních čísel jako dvojice reálných čísel, rozšíří se zlomek komplexně sdruženým jmenovatelem. Například pro podíl z/w, kde $z = (x, y), w = (u, v)$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \left(\frac{xu - yv}{u^2 + v^2}, \frac{xv + yu}{u^2 + v^2}\right).$$

Pěkně ošklivé.

Konec příkladů 1.

Příklady 2:

1. Pomocí imaginárního čísla i vypočítejte součin $(8 - 2\mathrm{i})(3\mathrm{i} - 1)$ a podíl $(3 - 2\mathrm{i})/(\mathrm{i} - 7)$.

2. Popište množinu bodů z splňující rovnost $|z - \mathrm{i}| = |z + \mathrm{i}|$.

Kouká z toho reálná osa.

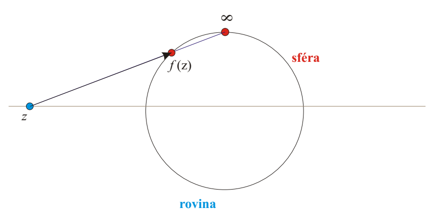
3. Popište množiny bodů z splňující nerovnosti $\Re(z) > 4$ nebo $|\Im(z)| < 1$ nebo $\Re(1/z) < 2$ nebo $\Im(z^2) > 0$ nebo $\arg(z) \in (\pi/4, \pi)$.

A za chvilku budete v komplexní rovině jako doma.

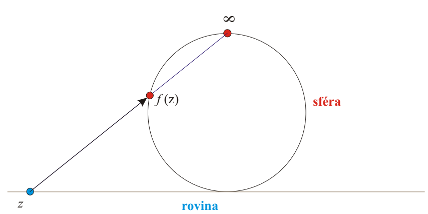
Konec příkladů 2.

Příklady 3:

1. Vezměte na Riemannově sféře libovolný bod w odpovídající bodu z v $\mathbb{C}$. Kde budou ležet na Riemannově sféře body odpovídající bodům $\overline{z}, -z, 1/z$?



2. Jak se změní situace, když vezmete místo Riemannovy sféry sféru, jejíž je $\mathbb{C}$ tečnou rovinou a jižní pól je bod 0 v $\mathbb{C}$. Kam se zobrazí „rovník" v tomto případě a v případě Riemannovy sféry?



3. Ukažte, že $z_n \to \infty$ právě když $|z_n| \to +\infty$.

4. Ukažte, že okolí ∞ v $\mathbb{C}^*$ jsou právě doplňky omezených množin v $\mathbb{C}$ spolu s bodem ∞.

Konec příkladů 3.

Příklady 4:

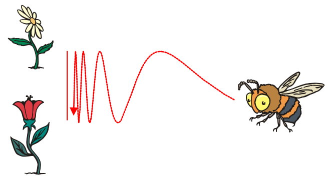
1. Každá křivka je křivkově souvislá.

2. Vnitřky kruhu, elipsy, čtverce, apod., jsou jednoduše souvislé. Mezikruží není jednoduše souvislé.

3. Jaké z vlastností *křivkově souvislá množina, jednoduše souvislá množina, oblast, uzavřená oblast* mají následující množiny komplexních čísel dané nerovnostmi

$$0 < |z| < 1\,, 1 < |\Re(z)| < 3\,, \Im(z) \in [0,1]\,, |z^2 - 1| < 1\,, 0 \le \arg(z) \le \pi/2\,?$$

4. Kompaktní množina $K = \{(x, \sin(1/x)); x \in (0, 1/\pi]\} \cup \{(0, y); y \in [-1, 1]\}$ je souvislá a není křivkově souvislá. (Uvědomte si, že první množina v uvedeném sjednocení je graf spojité funkce a každá konečněhodnotová spojitá funkce na ní bude konstantní – druhý sčítanec leží v uzávěru první množiny. Ukažte, že body $(0, 0)$, $(1/\pi, 0)$ nelze spojit křivkou ležící v K.)



Konec příkladů 4.

Příklady 5:

1. Jaký je definiční obor funkce

$$f(x,y) = y^3 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} y^n\,?$$

2. Jako příklady funkcí mohou sloužit výrazy

$$|z|\,, \Re(z)\,, \Im(z)\,, \overline{z}\,.$$

Zjistěte jejich definiční obor a body, ve kterých jsou spojité.

3. Polynom je funkce tvaru $c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$, racionální funkce je podíl dvou polynomů. Zjistěte definiční obor těchto funkcí a body, ve kterých jsou spojité.

4. Najděte reálnou a imaginární složku polynomu $z^2 + 2\mathrm{i}z - 3$.

5. Dokažte, že Arg je funkce spojitá všude kromě polopřímky $(-\infty, o]$. Ve kterých bodech je spojitá funkce na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, která bodu z přiřazuje jeho argument ležící v intervalu $[0, 2\pi)$.

6. Ukažte, že funkce $1/z : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ je spojitá. Je spojitá i funkce $1/z : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, která zobrazí 0 do ∞ a ∞ do 0?

7. Je-li w izolovaný bod definičního oboru funkce f, je f v bodě w spojitá.

Konec příkladů 5.

OTÁZKY

Otázky 1:

Komplexně sdružená čísla.

1. Ukažte, že $\overline{z} = z$ právě když je z reálné číslo.

2. Dokažte následující vlastnosti:

$$\begin{aligned}
z + \overline{z} &= 2\Re(z),\ \ z - \overline{z} = 2\Im(z)\\
\overline{\overline{z}} &= z\\
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2}\\
\overline{z_1 . z_2} &= \overline{z_1} . \overline{z_2}\\
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}
\end{aligned}$$

Vzdálenost.

3. Ukažte, že vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je rovna $|z_1 - z_2|$.

4. Dokažte následující vlastnosti absolutní hodnoty:

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2| &\leq |z_1|+|z_2| \\
|z_1.z_2| &= |z_1|.|z_2| \\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \\
|\overline{z}| &= |z| \\
|z| &= |-z| \\
|z|^2 &= z\overline{z} \\
\Re(z) \leq |z|\,, \Im(z) \leq |z| \quad &, \quad \Re(z)+\Im(z) \leq |z|\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

5. Ukažte, že bod $(z_1+z_2)/2$ je středem úsečky spojující body z_1, z_2.

6. Ukažte, že vzdálenost komplexních čísel je *invariantní vůči posunutí*, tj. vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je stejná jako vzdálenost čísel z_1+z, z_2+z pro libovolné komplexní číslo z. Platí obdobné tvrzení pro násobení místo sčítání?

Konec otázek 1.

Otázky 2:

1. Dokažte následující vyjádření argumentu bodu $z = x + \mathrm{i}y$ pomocí funkce arctg:

$$\arg(z) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0; \\ \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + (2k+1)\pi, & x < 0. \end{cases}$$

Zjistěte, zda uvedené rovnosti platí (pomocí limit) i pro $x = 0, y \neq 0$.

2. Dokažte uvedené Moivreovy vzorce. Nejdříve ukažte pomocí součtových vzorců pro $\sin, \cos$, že platí

$$\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\,, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\,.$$

3. Ukažte pomocí indukce platnost klasického Moivreova vzorce

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))\,.$$

Tento vzorec platí i pro $z = 0$.

Uvědomte si důsledek Moivreova vzorce pro dělení a volbu $z_1 = 1$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos(\arg(z)) - \mathrm{i}\sin(\arg(z)))$$

a jeho zobecnění pro z^{-n}.

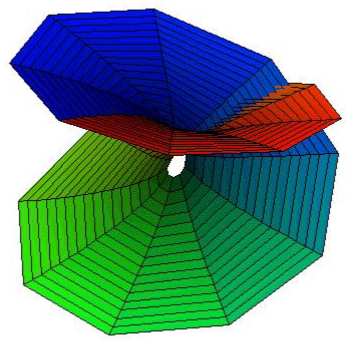
4. Jestliže pro $n \in \mathbb{N}$ značí $\sqrt[n]{z}$ ta komplexní čísla w, pro která je $w^n = z$, pak

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\varphi/n) + \mathrm{i}\sin(\varphi/n))\,.$$

V kapitole o elementárních funkcích se dozvíte o existenci a nejednoznačnosti odmocnin a problémech s tím spojených. Předchozí rovnost byste si měli promyslet např. pro $n = 2$, kdy pro každé $z \neq 0$ existují dvě různé druhé odmocniny.

Odmocnina je test celistvosti vašeho myšlení. Už o ní vlastně všechno víte, ale zatím to nedává smysl.

Vlastně myslíma na takovouhle blbinku, není-liž pravda?



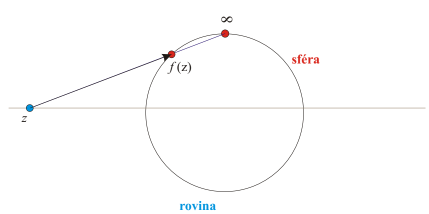
Konec otázek 2.

Otázky 3:

1. Uvažte, proč součet $\infty + \infty$ je nyní neurčitým výrazem (v reálných číslech se tento součet rovnal ∞).

2. Uvažte, proč lze, na rozdíl od reálných čísel, definovat $z/0 = \infty$ pro libovolná $z \neq 0$.

3. Označí-li se projekce Riemannovy sféry na $\mathbb{C}$ písmenem p, bude nová metrika ρ na $\mathbb{C}$ definována rovností $\rho(z, w) = d(p^{-1}(z), p^{-1}(w))$, kde d je obvyklá Euklidovská metrika v $\mathbb{R}^3$.



Ukažte, že platí:

$$\rho(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} .$$

(a) Ukažte, že metriky d a ρ jsou ekvivalentní (tj., mají stejné konvergentní posloupnosti).

(b) Jestliže se bod w blíží k ∞, konverguje vzdálenost k

$$\rho(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} ,$$

což rozšiřuje ρ na metriku na celém $\mathbb{C}^*$.

(c) Ukažte, že s touto rozšířenou metrikou ρ je $\mathbb{C}^*$ kompaktní.

Konec otázek 3.

Otázky 4:

1. Ukažte, že otevřená množina je křivkově souvislá, právě když je souvislá.

2. V $\mathbb{R}$ jsou jedinými souvislými množinami intervaly, body a prázdná množina. Které z těchto souvislých množin jsou jednoduše souvislé?

Konec otázek 4.

Otázky 5:

1. Ukažte, že funkce $|z|$ nabývá na uzavřené (i nekompaktní) množině svého minima. Musí nabývat i svého maxima?

2. Předpokládejte, že víte, že spojitý obraz omezené oblasti je oblast. Ukažte, že potom má každá spojitá a prostá funkce na oblasti spojité inverzní zobrazení.

3. Napište přesně definici stejnoměrně spojité funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$ a uvažte, která z charakterizací spojitosti lze modifikovat na charakterizaci stejnoměrné spojitosti.

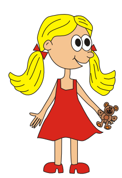
Konec otázek 5.

CVIČENÍ

Cvičení 1: Příklad. Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 .$$

Řešení. Pro počítání mocnin a odmocnin komplexních čísel se hodí goniometrický tvar, ale v tomto případě si vystačíme bez něj.



Neříkám ani tak ani tak, ale na moje slova dojde.

Podíl dvou komplexních čísel spočítáme tak, že zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli:

$$\frac{1+i}{1-x} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

Nyní už zbývá jen spočítat i^3, což je samozřejmě $-i$. Reálná část je tedy 0, imaginární část je -1.

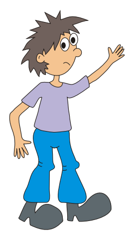
To kouzlo se sdruženou je neuvěřitelně krutý.

Já se taky rád družím.

Konec cvičení 1.

Cvičení 2: Příklad. Spočítejte $(1+i)^{20}$.

Řešení. Výraz typu $(a+b)^n$ jsme zvyklí počítat přes binomickou větu, jenže pro vysoké mocniny je to příliš pracné.



Zkusil jsem.

Proto zde s výhodou použijeme goniometrický tvar komplexního čísla

$$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}).$$

Na tu $\sqrt{2}$ jsme přišli tak, že jsme spočítali absolutní hodnotu

$$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Když si nakreslíte obrázek, okamžitě uvidíte, že úhel je $\frac{\pi}{4}$. Máme tedy číslo v goniometrickém tvaru a to již snadno umocníme:

$$\begin{aligned}(1+i)^{20} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{20}\\ &= 2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{4}+i\sin\frac{20\pi}{4}\right)=-2^{10}.\end{aligned}$$

Konec cvičení 2.

Cvičení 3: Příklad. Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.

Řešení. Stejně jako při počítání mocnin, i tady se výpočet provede pomocí goniometrického vyjádření komplexního čísla.

Podle zadání máme najít $z\in\mathbb{C}$ splňující vztah $z^3=-8$, což je vlastně to samé jako hledání kořenů polynomu z^3+8. Předem tedy víme, že úloha má tři řešení; ta budeme hledat ve tvaru $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Rovnice $z^3=-8$ pak přejde v

$$|z|^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)=8(\cos-\pi+i\sin-\pi).$$

Ihned vidíme, že $|z| = 2$, a dále

$$3\varphi(\mod 2\pi) = -\pi(\mod 2\pi).$$

Poslední rovnice má tato řešení

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ (\mod 2\pi), \ k \in \mathbb{Z},$$

což dává právě tři úhly $(\mod 2\pi)$

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad \varphi_2 = -\pi, \varphi_3 = \frac{\pi}{3}.$$

Zbývá už jen zapsat, co jsme spočítali:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = 1 + i\sqrt{3}, \\ z_2 &= 2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = -2, \\ z_3 &= 2(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3) = 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Rozložení těchto řešení na kružnici o poloměru 2 si nakreslete.

Konec cvičení 3.

Cvičení 4: Příklad. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$ taková, že

$$|z - i| + |z + i| < 4.$$

Řešení. Pro snadnější zápis bude x značit reálnou část z a y imaginární část z. Nejprve budeme řešit rovnici

$$|z - i| + |z + i| = 4,$$

neboli

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4.$$

Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+(y+1)^2} &= 4-\sqrt{x^2+(y-1)^2}\\
x^2+(y+1)^2 &= 16-8\sqrt{x^2+(y-1)^2}+x^2+(y-1)^2\\
4y &= 16-8\sqrt{x^2+(y-1)^2}\\
2\sqrt{x^2+(y-1)^2} &= 4-y\\
4x^2+3y^2 &= 12\\
\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} &= 1.
\end{aligned}$$

Tyto úpravy nejsou ekvivalentní, neboť jsme dvakrát umocňovali, a mohlo tedy přibýt řešení. Dosazením se však přesvědčíme, že každé řešení poslední rovnice je také řešením první. Poslední rovnice určuje elipsu, která rozděluje komplexní rovinu na dvě komponenty: vnitřek a vnějšek elipsy.

Jelikož funkce

$$|z-i|+|z+i|$$

je spojitá a hodnoty 4 nabývá, jak jsme právě zjistili, na dané elipse, musí být na každé komponentě (tedy uvnitř nebo vně) buď ostře větší než 4, nebo ostře menší než 4. Dosazením nějakého bodu z dané komponenty určíme, který případ nastává.

Můžeme tedy konstatovat, že zadané nerovnosti vyhovují komplexní čísla, jejichž reálná a imaginární část splňuje nerovnost

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}<1.$$

Taky jsme na to mohli jít od začátku geometricky. Součet vzdáleností od daných dvou bodů v rovině je roven 4.

Ty body byly $\pm$i.

BTW, ještě že byly dost blízko.

Konec cvičení 4.

Cvičení 5: Příklad. Zjistěte, zda funkce komplexní proměnné $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{x}{x + iy}$$

je spojitá.

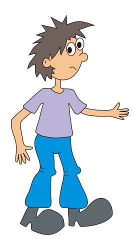
Řešení. Předně si musíme uvědomit, kde je tato funkce definována. Vidíme, že výraz

$$\frac{x}{x + iy}$$

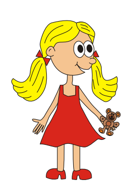
má smysl pouze pro $z \neq 0$. Protože čitatel i jmenovatel jsou funkce spojité, je f spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zabývejme se teď otázkou, zda je možné funkci f spojitě dodefinovat na celé $\mathbb{C}$. Budeme tedy počítat limitu

$$\lim_{z \to 0} f(z).$$

Jenže na první pohled je zřejmé, že tato limita neexistuje. Funkce f je na reálné ose (mimo počátek) rovna 1 a na imaginární ose (mimo počátek) rovna 0.



Funkci tedy spojitě rozšířit nelze.



Škoda, tolik jsem se těšila.

Konec cvičení 5.

Cvičení 6: Příklad. Buď $z = x + iy$ komplexní číslo. Určete imaginární část čísla

$$\frac{z-i}{z+i}.$$

Řešení. Abychom se zbavili komplexního čísla ve jmenovateli, rozšíříme zlomek číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli.

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+i} &= \frac{x+iy-i}{x+iy+i} = \frac{x+iy-i}{x+iy+i} \cdot \frac{x-iy-i}{x-iy-i} \\ &= \frac{x^2+y^2-1-2xi}{x^2+(y+1)^2} \end{aligned}$$

Čísla x, y jsou reálná, takže imaginární část je

$$\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}.$$

Konec cvičení 6.

STANDARDY z kapitoly

KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL $\mathbb{C}$

DEFINICE. Množina $\mathbb{C}$ komplexních čísel je množina $\mathbb{R}^2$ všech dvojic (x, y) reálných čísel s euklidovskou vzdáleností dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2) rovnou

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

a algebraickými operacemi sčítání a násobení:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\,. \end{aligned}$$

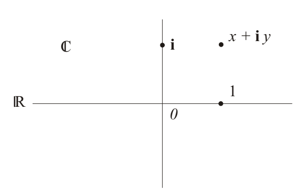
Číslo x se nazývá reálná složka komplexního čísla $z = (x, y)$ (značení $\Re(z)$) a y jeho imaginární složka (značení $\Im(z)$).

Číslo $(x, -y)$ se nazývá komplexně sdružené k číslu (x, y) (značení $\overline{(x, y)}$).

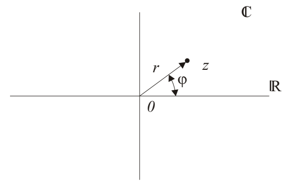
Vzdálenost bodu $z = (x, y)$ od počátku se podobně jako v reálných číslech značí absolutní hodnotou $|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2+y^2}$. Vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je potom $|z_1 - z_2|$.
Počátek, tj. bod $(0, 0)$, bude často značen jako 0.

Alternativní popis komplexních čísel

Jestliže se označí $\mathrm{i} = (0, 1)$ (tzv. imaginární jednotka), lze psát komplexní čísla ve tvaru $(x, y) = x + \mathrm{i}y$.



Další možností vyjádření komplexních čísel je použití polárních souřadnic: $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, kde r je vzdálenost bodu (x, y) od počátku. a φ je úhel mezi kladným směrem osy x a spojnicí bodu (x, y) s počátkem.



Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

Úhel φ je, kromě bodu $(0, 0)$, určen jednoznačně až na periodu 2π:

$$\cos\varphi = \frac{\Re z}{|z|}\,, \quad \sin\varphi = \frac{\Im z}{|z|}\,.$$

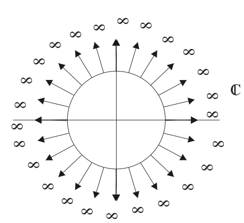
Množina úhlů φ pro dané z se značí $\arg(z)$, takže $z = |z|(\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\sin(\arg(z)))$.

Platí totiž zobecněné Moivreovy vzorce pro z_1, z_2 s příslušnými argumenty φ_1, φ_2:

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,, \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Rozšířená komplexní rovina $\mathbb{C}^*$

Na rozdíl od $\mathbb{R}$ se však $\mathbb{C}$ rozšiřuje jen o jedno nevlastní číslo, které bude značeno ∞ a rozšířená rovina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bude označena jako $\mathbb{C}^*$.



Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty\,, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0\,,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty\,, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0\,.$$

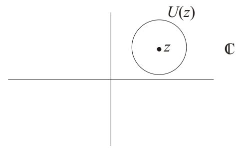
Operace

$$\infty + \infty\,, \quad \infty \cdot 0\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{0}{0}$$

nemají smysl (neurčité výrazy).

Je vhodné zavést $|\infty| = \infty, \overline{\infty} = \infty$.

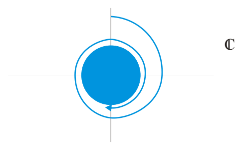
Topologie roviny



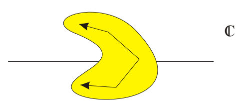
Pro úplnost:

- *okolí* bodu z je libovolná množina obsahující nějaký kruh o středu z;
- podmnožina $\mathbb{C}$ je *otevřená*, jestliže je okolím každého svého bodu;
- podmnožina $\mathbb{C}$ je *uzavřená*, jestliže její doplněk je otevřený;
- podmnožina $\mathbb{C}$ je *kompaktní*, jestliže je uzavřená a omezená;
- posloupnost z_n konverguje k $z \in \mathbb{C}$, jestliže libovolné okolí bodu z obsahuje skoro všechna z_n.

Množina A se nazývá souvislá, jestliže každá funkce spojitá na A mající jen konečně mnoho hodnot je konstantní.



Množina je křivkově souvislá, jestliže každé její dva body lze spojit křivkou ležící v oné množině.

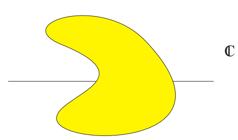


Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.

Otevřené souvislé množiny se nazývají oblastmi.

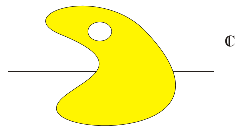
Oblast spolu se svou hranicí se nazývá uzavřená oblast.

Souvislá množina se nazývá jednoduše souvislá, jestliže její doplněk je souvislá množina.



Oblast G je jednoduše souvislá, jestliže s každou Jordanovou křivkou v G leží v G i její vnitřek.

A toto je množina, která není jednoduše souvislá.

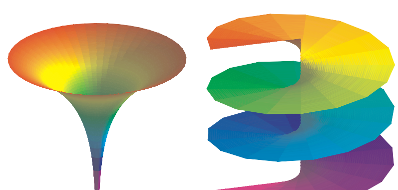


FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Komplexní funkce komplexní proměnné zobrazuje nějakou podmnožinu $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Můžeme se na ni tedy dívat jako na dvojrozměrné vektorové pole (reálné) definované na podmnožině roviny, neboli $f(z) = f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = f_1(x,y) + \mathrm{i} f_2(x,y)$ ($f_1 = \Re f$ je reálná složka a $f_2 = \Im f$ je imaginární složka funkce f).

Budou se vyskytovat přiřazení, která jednomu bodu přiřadí více hodnot (jako např. $\arg z$). Takovéto přiřazení se nazývá mnohoznačné zobrazení a v případě, že je definováno na komplexních číslech a hodnoty jsou opět komplexní čísla, bude se nazývat mnohoznačná funkce.

Tady vidíme reálnou a imaginární část komplexního logaritmu.



Spojitost

Za definici spojitosti funkce f lze vzít jednu z následujících ekvivalentních vlastností plynoucí ze spojitosti reálných funkcí a z rozkladu f na reálnou a imaginární složku:

1. složky $\Re f$ a $\Im f$ spojité;
2. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé okolí U bodu $f(z)$ existuje okolí V bodu z takové, že $f(V \cap \mathcal{D}(f)) \subset U$.
3. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ jakmile $|z - w| < \delta$ a $z \in \mathcal{D}(f)$.
4. jestliže $z_n \to z$ v $\mathcal{D}(f)$, pak $f(z_n) \to f(z)$.

Stejnoměrná spojitost je definovaná třetí podmínkou, jestliže volba δ nezávisí na volbě z (tj., kvantifikátor „pro každé z" se přesouvá za kvantifikátor „existuje δ").

VĚTA.

1. Součet, součin a podíl spojitých k funkcí je spojitá funkce.

2. Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.

3. Spojitý obraz křivkově souvislé množiny je křivkově souvislá množina.

4. Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.

5. Spojitá funkce na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá.

6. Prostá spojitá funkce na kompaktní množině má spojitou inverzní funkci.

Důkaz. 1. Součin funkcí $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ je roven funkci $(f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$. Jsou-li funkce f, g spojité, jsou spojité i reálné funkce f_1, f_2, g_1, g_2 a tedy i funkce $f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1$, odkud vyplývá spojitost funkce fg. Dokažte podobným způsobem spojitost součtu a podílu dvou spojitých komplexních funkcí.

2. Spojitost složení je dokázána v kapitole o funkcích více proměnných (a plyne jednoduše z poslední charakterizující vlastnosti spojitosti o zachovávání limit posloupností).

3. Nechť A je křivkově souvislá a f je spojitá funkce definovaná na A. Nechť $x, y \in f(A)$. Existují body $a, b \in A$ tak, že $f(a) = x, f(b) = y$ a křivka $\varphi : [0, 1] \to A$ tak, že $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. Pak křivka $f \circ \varphi$ leží v $f(A)$ a spojuje body x, y.

4. Nechť A je kompaktní v $\mathbb{C}$ a $\{z_n\}$ je posloupnost v $f(A)$. Zvolí se body $w_n \in A \cap f^{-1}(z_n)$. Protože A je kompaktní, existuje podposloupnost $\{w_{k_n}\}$ konvergující k nějakému $w \in A$. Protože f je spojitá, konverguje $\{z_{k_n}\}$ k $f(w) \in f(A)$.

5. Nechť f je spojitá funkce na kompaktní množině A, která není stejnoměrně spojitá. Pak existuje $\varepsilon > 0$ a body $u_n, v_n \in A$ tak, že $|u_n - v_n| < 1/n$ a $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$. Protože A je kompaktní, lze najít konvergentní podposloupnosti $\{u_{k_n}\}, \{v_{k_n}\}$ konvergující k $u \in A$. Tím se dostává spor, protože $|f(u_{k_n}) - f(v_{k_n})|$ nekonverguje k 0.

6. Nechť je spojitá komplexní funkce f na kompaktní množině A prostá. Pro libovolný bod $b \in f(A)$ se ukáže, že f^{-1} je spojitá v b. Nechť tedy $\{b_n\}$ je posloupnost v $f(A)$ konvergující k b. Má se ukázat, že $f^{-1}(b_n)$ konverguje k $f^{-1}(b)$. Je-li $\{c_n\}$ libovolná podposloupnost posloupnosti $f^{-1}(b_n)$, lze z ní vybrat podposloupnost $\{c_{k_n}\}$ s nějakou limitou c. Protože f je spojitá, konverguje $f(c_{k_n})$ k $f(c)$ a tedy $f(c) = b$. Takže $\{c_{k_n}\}$ konverguje k $f^{-1}(b)$. Podle čtvrté vlastnosti konvergence posloupností konverguje $f^{-1}(b_n)$ k $f^{-1}(b)$. ◇

Limita funkce

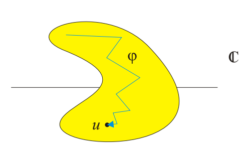
Definujeme pro funkci f

$$\lim_{z \to u} f(z) = \lim_{z \to u} \Re(f)(z) + \mathrm{i} \lim_{z \to u} \Im(f)(z) .$$

VĚTA. Nechť f je definována na otevřené množině M a $u \in M$. Pak $\lim\limits_{z \to u} f(z) = A$ právě když pro každou křivku φ na $[0, 1]$ s vlastnostmi

$$\varphi(0) = u \,, \varphi : (0, 1] \to M$$

je $\lim\limits_{t \to 0_+} f(\varphi(t)) = A$.



Důkaz. Protože φ je spojitá, je nutnost podmínky zřejmá. Zbývá dokázat postačitelnost podmínky. Pro jednoduchost značení lze předpokládat, že $u = 0$ a že $[-1,1] \times [-1,1] \subset M$.

Nechť tedy $\lim_{z \to u} f(z) \neq A$. Pak existuje posloupnost $\{z_n\} \subset (-1,1) \times (-1,1) \setminus \{0\}$ konvergující k 0, přičemž $\lim f(z_n) \neq A$. Zřejmě lze posloupnost $\{z_n\}$ vybrat tak, že $\Re z_n$ a $\Im z_n$ konvergují k 0 monotónně, např. jsou klesající.

Nyní stačí vzít spojitou funkci na $[0,1]$, která má v bodech $\Re z_n$ hodnoty $\Im z_n$. ◇

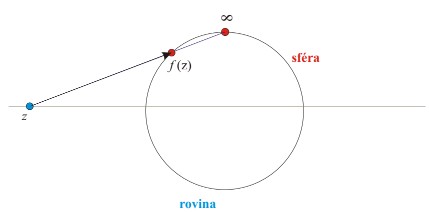
POZNÁMKY

V polárním zápisu čísla z se r nazývá *průvodič* a φ *argument* čísla z. Zobrazení $\arg$, které přiřazuje komplexnímu číslu jeho argument, není jednoznačné.

Lze se omezit jen na některé hodnoty argumentu, např. interval $[0, 2\pi)$ a potom je $\arg$ jednoznačnou funkcí (kromě 0).

Nechť S je sféra $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól" (0,0,1). Rovina $\mathbb{C}$ se ztotožní s rovinou os x, y, tj. množinou $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

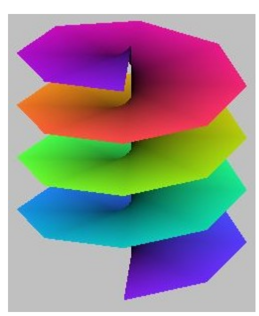
Tzv. stereografická projekce je prosté zobrazení $S \setminus \{P\}$ na $\mathbb{C}$: vezme se přímka procházející bodem P, která není rovnoběžná s $\mathbb{C}$ – ta protíná sféru S přesně v jednom dalším bodě a rovinu $\mathbb{C}$ taky přesně v jednom bodě, jeho stereografickém obraze.



Sféra S tedy slouží jako model rozšířené komplexní roviny $\mathbb{C}^*$, přičemž P odpovídá nevlastnímu bodu ∞. Uvedený model $\mathbb{C}^*$ ve tvaru sféry bude nazýván *Riemannova sféra*.

Je-li f mnohoznačné zobrazení na G, pro každé $z \in G$ vyberte jen jednu hodnotu z množiny $f(z)$ (označte ji $F(z)$), dostane se funkce F na G, která se nazývá (jednoznačná) větev funkce f.

Grafem mnohoznačné funkce imaginární část logaritmu je schodiště.



PŘÍKLADY

Pokud je třeba vyjádřit podíl dvou komplexních čísel jako dvojice reálných čísel, rozšíří se zlomek komplexně sdruženým jmenovatelem. Například pro podíl z/w, kde $z = (x,y), w = (u,v)$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \left(\frac{xu - yv}{u^2+v^2}, \frac{xv + yu}{u^2+v^2}\right).$$

Dokažte, že platí

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))\,.$$

Jestliže pro $n \in \mathbb{N}$ značí $\sqrt[n]{z}$ ta komplexní čísla w, pro která je $w^n = z$, pak

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\varphi/n) + \mathrm{i}\sin(\varphi/n))\,.$$

CVIČENÍ

Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$

Spočítejte $(1+i)^{20}$.
Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.