KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE

V předchozích částech byl důraz kladen na reálná čísla a na reálné funkce.

Pokud se komplexní čísla vyskytovala, bylo to z hlediska kartézského součinu dvou reálných přímek, např. při zkoumání funkcí dvou proměnných. Nebyly při tom brány v úvahu všechny algebraické vlastnosti komplexních čísel.

Je známo, že některé úlohy zadané reálnými funkcemi nemají řešení v reálném oboru, ale mají řešení v komplexním oboru.

Takovým jednoduchým případem jsou kvadratické rovnice.

Složitější situace bude probrána v kapitole o Fourierově transformaci: inverzní obrazy Laplaceovy transformace reálné funkce se vypočítají pomocí integrálu komplexních funkcí.

I když mnoho vlastností komplexních čísel lze získat z vlastností reálných čísel, nelze tak získat všechny potřebné vlastnosti.

Navíc, už při zkoumání funkcí dvou proměnných byly vidět podstatné rozdíly ve složitosti jistých množin na přímce a v rovině.

V této kapitole proto budou zopakovány některé vlastnosti roviny a funkcí dvou proměnných (a základy komplexních čísel ze střední školy).

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL $\mathbb{C}$

DEFINICE. Množina $\mathbb{C}$ komplexních čísel je množina $\mathbb{R}^2$ všech dvojic (x, y) reálných čísel s euklidovskou vzdáleností dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2) rovnou

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

a algebraickými operacemi sčítání a násobení:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\,. \end{aligned}$$

Číslo x se nazývá reálná složka komplexního čísla $z = (x, y)$ (značení $\Re(z)$) a y jeho imaginární složka (značení $\Im(z)$).

Číslo $(x, -y)$ se nazývá komplexně sdružené k číslu (x, y) (značení $\overline{(x, y)}$).

S uvedeným násobením a sčítáním tvoří $\mathbb{C}$ těleso, s uvedenou vzdáleností tvoří metrický prostor.

Pokud se ztotožní reálná čísla $r \in \mathbb{R}$ s komplexními čísly $(r, 0)$, je $\mathbb{R}$ podtěleso $\mathbb{C}$ (a jeho metrický podprostor).

Vzdálenost bodu $z = (x, y)$ od počátku se podobně jako v reálných číslech značí absolutní hodnotou $|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je potom $|z_1 - z_2|$. Pro absolutní hodnotu platí stejná pravidla jako v $\mathbb{R}$ (viz *Otázky*).

Počátek, tj. bod $(0, 0)$, bude často značen jako 0.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

Alternativní popis komplexních čísel

Jestliže se označí $\mathrm{i} = (0, 1)$ (tzv. imaginární jednotka), lze psát komplexní čísla ve tvaru $(x, y) = x + \mathrm{i}y$.

Další možností vyjádření komplexních čísel je použití polárních souřadnic: $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, kde r je vzdálenost bodu (x, y) od počátku. a φ je úhel mezi kladným směrem osy x a spojnicí bodu (x, y) s počátkem.

Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

Úhel φ je, kromě bodu $(0, 0)$, určen jednoznačně až na periodu 2π:

$$\cos\varphi = \frac{\Re z}{|z|}\,, \quad \sin\varphi = \frac{\Im z}{|z|}\,.$$

Popis φ pomocí funkce arctg je uveden v *Otázkách*. Množina úhlů φ pro dané z se značí $\arg(z)$, takže $z = |z|(\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\sin(\arg(z)))$.

Popis pomocí polárních souřadnic je vhodný při násobení komplexních čísel. Platí totiž zobecněné Moivreovy vzorce pro z_1, z_2 s příslušnými argumenty φ_1, φ_2:

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,, \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 2

Rozšířená komplexní rovina $\mathbb{C}^*$

Stejně jako v $\mathbb{R}$ je vhodné rozšířit rovinu o nevlastní body.

Na rozdíl od $\mathbb{R}$ se však $\mathbb{C}$ rozšiřuje jen o jedno nevlastní číslo, které bude značeno ∞ a rozšířená rovina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bude označena jako $\mathbb{C}^*$.

Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty\,, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0\,,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty\,, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0\,.$$

Operace

$$\infty + \infty\,, \quad \infty \cdot 0\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{0}{0}$$

nemají smysl (neurčité výrazy).

Je vhodné zavést $|\infty| = \infty, \overline{\infty} = \infty$.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

Topologie roviny

V kapitole o funkcích více proměnných byla pomocí vzdálenosti popsána konvergence v $\mathbb{R}^2$ a její vlastnosti, dále pak jisté vlastnosti podmnožin roviny, jako otevřenost, uzavřenost, omezenost, kompaktnost, okolí bodů, hromadné body.

Pro úplnost:

- *okolí* bodu z je libovolná množina obsahující nějaký kruh o středu z;

- podmnožina $\mathbb{C}$ je *otevřená*, jestliže je okolím každého svého bodu;
- podmnožina $\mathbb{C}$ je *uzavřená*, jestliže její doplněk je otevřený;
- podmnožina $\mathbb{C}$ je *kompaktní*, jestliže je uzavřená a omezená;
- posloupnost z_n konverguje k $z \in \mathbb{C}$, jestliže libovolné okolí bodu z obsahuje skoro všechna z_n.

V *Poznámkách, Příkladech a Otázkách* je probráno rozšíření uvedených pojmů na $\mathbb{C}^*$.

Kromě tvrzení obsahujících pojmy z uspořádání, platí stejné věty pro konvergenci jako v $\mathbb{R}$:

VĚTA.

1. $\{z_n\}$ má nejvýše jednu limitu,
2. je-li posloupnost $\{z_n\}$ konstantní, $z_n = u$, pak $\lim z_n = u$,
3. jestliže $\lim z_n = u$, pak $\lim z_{k_n} = u$ pro každou podposloupnost $\{z_{k_n}\}$ posloupnosti $\{z_n\}$,
4. jestliže z každé podposloupnosti $\{z_n\}$ lze vybrat podposloupnost konvergující k u, pak $\{z_n\}$ konverguje k u.
5. jestliže $\{z_n\}$ konverguje v $\mathbb{C}$, pak $\{z_n\}$ je omezená posloupnost.
6. posloupnost $\{z_n\}$ konverguje v $\mathbb{C}$ právě když je cauchyovská (tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ (n, k > n_0 \Rightarrow |z_n - z_k| < \varepsilon)$),
7. platí tvrzení o limitě součtu, součinu a podílu.

Beze změny zůstává definice hromadných bodů posloupností nebo množin v $\mathbb{C}$ a všechna tvrzení o nich, která mají smysl v $\mathbb{C}$ (tj. musí se vynechat tvrzení používající uspořádání, např. nemá smysl hovořit o největším a nejmenším hromadném bodě posloupnosti). V Cantorově větě se místo omezeného uzavřeného intervalu bere kompaktní množina (viz *Otázky*).

Bude potřeba další důležitý pojem, a to souvislost množiny.

Množina A se nazývá souvislá, jestliže každá funkce spojitá na A mající jen konečně mnoho hodnot je konstantní.

Pro účely této kapitoly bude stačit silnější pojem než souvislost. Množina je křivkově souvislá, jestliže každé její dva body lze spojit křivkou ležící v oné množině.

Zřejmě je každá křivkově souvislá množina je souvislá.

Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.

Otevřené souvislé množiny se nazývají oblastmi.

Oblast spolu se svou hranicí se nazývá uzavřená oblast.

Pro podrobnější pohled na souvislost viz *Poznámky, Příklady* a *Otázky*.

Souvislá množina se nazývá jednoduše souvislá, jestliže její doplněk je souvislá množina.

Oblast G je jednoduše souvislá, jestliže s každou Jordanovou křivkou v G leží v G i její vnitřek.

Poznámky 4   Příklady 4   Otázky 4   4

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Komplexní funkce komplexní proměnné zobrazuje nějakou podmnožinu $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Můžeme se na ni tedy dívat jako na dvojrozměrné vektorové pole (reálné) definované na podmnožině roviny, neboli $f(z) = f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = f_1(x,y) + \mathrm{i} f_2(x,y)$ ($f_1 = \Re f$ je reálná složka a $f_2 = \Im f$ je imaginární složka funkce f).

Abychom mohli úspěšně pracovat s komplexními funkcemi komplexní proměnné, bývá mimo výše uvedený model typu "rozválené těsto"užitečné zkoumat odděleně reálnou a imaginární složku zvlášť.

Například pro funkci $z \mapsto z$ je reálná složka zobrazení $(x, y) \mapsto x$ a imaginární složka zobrazení $(x, y) \mapsto y$. Jde tedy vlastně o dvě plochy nad rovinou (x, y).

Je zřejmé, jak se definuje součet, součin a podíl komplexních funkcí (vše bodově), jejich složení, inverzní funkce, jejich bodová limita.

Nemá smysl hovořit o monotónních funkcích, o extrémech, o konvexních funkcích.

Ale má smysl pojem omezená funkce, sudá, lichá nebo periodická funkce.

Uvědomte si rozdíl oproti kapitole o funkcích více proměnných, kde se součin a podíl funkcí uvažoval pouze pro funkce s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Úmluva: Pokud nebude řečeno jinak, bude v této i následujících kapitolách termín *funkce* znamenat *komplexní funkce komplexní proměnné*.

Budou se vyskytovat přiřazení, která jednomu bodu přiřadí více hodnot (jako např. $\arg z$). Takovéto přiřazení se nazývá mnohoznačné zobrazení a v případě, že je definováno na komplexních číslech a hodnoty jsou opět komplexní čísla, bude se nazývat mnohoznačná funkce.

Spojitost

Protože $\mathbb{C}$ je metrický prostor, je spojitost funkce f definována jako spojitost zobrazení mezi metrickými prostory (v bodě nebo na množině).

Je však možné vzít za definici spojitosti funkce f jednu z následujících ekvivalentních vlastností plynoucí ze spojitosti reálných funkcí a z rozkladu f na reálnou a imaginární složku:

1. složky $\Re f$ a $\Im f$ spojité;
2. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé okolí U bodu $f(z)$ existuje okolí V bodu z takové, že $f(V \cap \mathcal{D}(f)) \subset U$.
3. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ jakmile $|z - w| < \delta$ a $z \in \mathcal{D}(f)$.
4. jestliže $z_n \to z$ v $\mathcal{D}(f)$, pak $f(z_n) \to f(z)$.

Stejnoměrná spojitost je definovaná třetí podmínkou, jestliže volba δ nezávisí na volbě z (tj., kvantifikátor „pro každé z" se přesouvá za kvantifikátor „existuje δ").

Z kapitoly o funkcích více proměnných nyní vyplývají některé základní vlastnosti spojitých funkcí, např. o zachování souvislosti složením a zachování kompaktnosti spojitým obrazem. Platí o něco více (použijí se příslušná tvrzení o spojitosti pro funkce z roviny do přímky).

VĚTA.

1. Součet, součin a podíl spojitých k funkcí je spojitá funkce.
2. Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.
3. Spojitý obraz křivkově souvislé množiny je křivkově souvislá množina.
4. Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.
5. Spojitá funkce na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá.
6. Prostá spojitá funkce na kompaktní množině má spojitou inverzní funkci.

Limita funkce

Lze opět použít definice a tvrzení z kapitoly o funkcích více proměnných, takže pro funkci f je $\lim_{z\to u} f(z) = \lim_{z\to u} \Re(f)(z) + \mathrm{i} \lim_{z\to u} \Im(f)(z)$.

Všechny základní vlastnosti limity reálné funkce platí i pro funkce v komplexním oboru, samozřejmě kromě těch používajících uspořádání. Ale i pro funkce v komplexním oboru lze dokázat některá tvrzení u kterých se v reálných funkcích používá uspořádání, např.

$$\lim_{z\to u} f(z) = 0, g \text{ je omezená v okolí } u \Rightarrow \lim_{z\to u} f(z)g(z) = 0\,.$$

Je to proto, že i pro komplexní funkce platí $\lim f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim |f(z)| = 0$.

Následující tvrzení lze výhodně použít v některých situacích, protože převádí limitu z komplexního oboru na reálný obor jinak než je rozklad na složky.

VĚTA. Nechť f je definována na otevřené množině M a $u \in M$. Pak $\lim_{z\to u} f(z) = A$ právě když pro každou křivku φ na $[0,1]$ s vlastnostmi

$$\varphi(0) = u\,, \varphi : (0,1] \to M$$

je $\lim_{t\to 0_+} f(\varphi(t)) = A$.

Za křivku spojující body z_n lze vzít lomenou čáru. Není těžké ukázat, že lze vzít i hladkou křivku (navíc mající všechny derivace).

6

STANDARDY z kapitoly

KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE

MNOŽINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL $\mathbb{C}$

DEFINICE. Množina $\mathbb{C}$ komplexních čísel je množina $\mathbb{R}^2$ všech dvojic (x,y) reálných čísel s euklidovskou vzdáleností dvou bodů (x_1,y_1) a (x_2,y_2) rovnou

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

a algebraickými operacemi sčítání a násobení:

$$\begin{aligned}(x_1,y_1) + (x_2,y_2) &= (x_1+x_2, y_1+y_2)\\ (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\,.\end{aligned}$$

Číslo x se nazývá reálná složka komplexního čísla $z = (x,y)$ (značení $\Re(z)$) a y jeho imaginární složka (značení $\Im(z)$).

Číslo $(x,-y)$ se nazývá komplexně sdružené k číslu (x,y) (značení $\overline{(x,y)}$).

Vzdálenost bodu $z = (x,y)$ od počátku se podobně jako v reálných číslech značí absolutní hodnotou $|z| = |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$. Vzdálenost dvou čísel z_1, z_2 je potom $|z_1 - z_2|$.

Počátek, tj. bod $(0,0)$, bude často značen jako 0.

Alternativní popis komplexních čísel

Jestliže se označí $\mathrm{i} = (0,1)$ (tzv. imaginární jednotka), lze psát komplexní čísla ve tvaru $(x,y) = x + \mathrm{i}y$.

Další možností vyjádření komplexních čísel je použití polárních souřadnic: $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, kde r je vzdálenost bodu (x, y) od počátku. a φ je úhel mezi kladným směrem osy x a spojnicí bodu (x, y) s počátkem.

Číslo r je pro komplexní číslo $z = (x, y)$ určeno jednoznačně:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

Úhel φ je, kromě bodu $(0, 0)$, určen jednoznačně až na periodu 2π:

$$\cos\varphi = \frac{\Re z}{|z|}\,, \quad \sin\varphi = \frac{\Im z}{|z|}\,.$$

Množina úhlů φ pro dané z se značí $\arg(z)$, takže $z = |z|(\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\sin(\arg(z)))$.

Platí totiž zobecněné Moivreovy vzorce pro z_1, z_2 s příslušnými argumenty φ_1, φ_2:

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,, \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Rozšířená komplexní rovina $\mathbb{C}^*$

Na rozdíl od $\mathbb{R}$ se však $\mathbb{C}$ rozšiřuje jen o jedno nevlastní číslo, které bude značeno ∞ a rozšířená rovina $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ bude označena jako $\mathbb{C}^*$.

Aritmetika s ∞ je následující (operace sčítání a násobení jsou komutativní):

$$z \pm \infty = \infty \text{ pro } z \neq \infty\,, z \cdot \infty = \infty \text{ pro } z \neq 0\,,$$
$$\frac{z}{\infty} = 0 \text{ pro } z \neq \infty\,, \frac{z}{0} = \infty \text{ pro } z \neq 0\,.$$

Operace

$$\infty + \infty\,, \quad \infty \cdot 0\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{0}{0}$$

nemají smysl (neurčité výrazy).

Je vhodné zavést $|\infty| = \infty, \overline{\infty} = \infty$.

Topologie roviny

Pro úplnost:

- *okolí* bodu z je libovolná množina obsahující nějaký kruh o středu z;
- podmnožina $\mathbb{C}$ je *otevřená*, jestliže je okolím každého svého bodu;
- podmnožina $\mathbb{C}$ je *uzavřená*, jestliže její doplněk je otevřený;
- podmnožina $\mathbb{C}$ je *kompaktní*, jestliže je uzavřená a omezená;
- posloupnost z_n konverguje k $z \in \mathbb{C}$, jestliže libovolné okolí bodu z obsahuje skoro všechna z_n.

Množina A se nazývá souvislá, jestliže každá funkce spojitá na A mající jen konečně mnoho hodnot je konstantní.

Množina je křivkově souvislá, jestliže každé její dva body lze spojit křivkou ležící v oné množině.

Každá křivkově souvislá množina souvislá, důkaz je snadný. Opak obecně neplatí, platí pro otevřené množiny, kde se navíc dá křivka v definici nahradit lomenou čarou.

Otevřené souvislé množiny se nazývají oblastmi.

Oblast spolu se svou hranicí se nazývá uzavřená oblast.

Souvislá množina se nazývá jednoduše souvislá, jestliže její doplněk je souvislá množina.

Oblast G je jednoduše souvislá, jestliže s každou Jordanovou křivkou v G leží v G i její vnitřek.

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Komplexní funkce komplexní proměnné zobrazuje nějakou podmnožinu $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Můžeme se na ni tedy dívat jako na dvojrozměrné vektorové pole (reálné) definované na podmnožině roviny, neboli $f(z) = f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = f_1(x,y) + \mathrm{i} f_2(x,y)$ ($f_1 = \Re f$ je reálná složka a $f_2 = \Im f$ je imaginární složka funkce f).

Budou se vyskytovat přiřazení, která jednomu bodu přiřadí více hodnot (jako např. $\arg z$). Takovéto přiřazení se nazývá mnohoznačné zobrazení a v případě, že je definováno na komplexních číslech a hodnoty jsou opět komplexní čísla, bude se nazývat mnohoznačná funkce.

Spojitost

Za definici spojitosti funkce f lze vzít jednu z následujících ekvivalentních vlastností plynoucí ze spojitosti reálných funkcí a z rozkladu f na reálnou a imaginární složku:

1. složky $\Re f$ a $\Im f$ spojité;
2. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé okolí U bodu $f(z)$ existuje okolí V bodu z takové, že $f(V \cap \mathcal{D}(f)) \subset U$.
3. pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ jakmile $|z - w| < \delta$ a $z \in \mathcal{D}(f)$.
4. jestliže $z_n \to z$ v $\mathcal{D}(f)$, pak $f(z_n) \to f(z)$.

Stejnoměrná spojitost je definovaná třetí podmínkou, jestliže volba δ nezávisí na volbě z (tj., kvantifikátor „pro každé z" se přesouvá za kvantifikátor „existuje δ").

VĚTA.

1. Součet, součin a podíl spojitých k funkcí je spojitá funkce.
2. Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.
3. Spojitý obraz křivkově souvislé množiny je křivkově souvislá množina.
4. Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.
5. Spojitá funkce na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá.
6. Prostá spojitá funkce na kompaktní množině má spojitou inverzní funkci.

Limita funkce

Definujeme pro funkci f
$$\lim_{z\to u} f(z) = \lim_{z\to u} \Re(f)(z) + \mathrm{i} \lim_{z\to u} \Im(f)(z)\,.$$

VĚTA. Nechť f je definována na otevřené množině M a $u \in M$. Pak $\lim_{z\to u} f(z) = A$ právě když pro každou křivku φ na $[0,1]$ s vlastnostmi
$$\varphi(0) = u\,, \varphi : (0,1] \to M$$
je $\lim_{t\to 0_+} f(\varphi(t)) = A$.

V polárním zápisu čísla z se r nazývá *průvodič* a φ *argument* čísla z. Zobrazení $\arg$, které přiřazuje komplexnímu číslu jeho argument, není jednoznačné.

Lze se omezit jen na některé hodnoty argumentu, např. interval $[0, 2\pi)$ a potom je $\arg$ jednoznačnou funkcí (kromě 0).

Nechť S je sféra $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a P její „severní pól" (0,0,1). Rovina $\mathbb{C}$ se ztotožní s rovinou os x, y, tj. množinou $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Tzv. stereografická projekce je prosté zobrazení $S \setminus \{P\}$ na $\mathbb{C}$: vezme se přímka procházející bodem P, která není rovnoběžná s $\mathbb{C}$ – ta protíná sféru S přesně v jednom dalším bodě a rovinu $\mathbb{C}$ taky přesně v jednom bodě, jeho stereografickém obraze.

Sféra S tedy slouží jako model rozšířené komplexní roviny $\mathbb{C}^*$, přičemž P odpovídá nevlastnímu bodu ∞.

Uvedený model $\mathbb{C}^*$ ve tvaru sféry bude nazýván *Riemannova sféra*.

Je-li f mnohoznačné zobrazení na G, pro každé $z \in G$ vyberte jen jednu hodnotu z množiny $f(z)$ (označte ji $F(z)$), dostane se funkce F na G, která se nazývá (jednoznačná) větev funkce f.

Grafem mnohoznačné funkce imaginární část logaritmu je schodiště.

Pokud je třeba vyjádřit podíl dvou komplexních čísel jako dvojice reálných čísel, rozšíří se zlomek komplexně sdruženým jmenovatelem. Například pro podíl z/w, kde $z = (x, y), w = (u, v)$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \left(\frac{xu - yv}{u^2 + v^2}, \frac{xv + yu}{u^2 + v^2}\right).$$

Dokažte, že platí

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\,, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\,.$$

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))\,.$$

Jestliže pro $n \in \mathbb{N}$ značí $\sqrt[n]{z}$ ta komplexní čísla w, pro která je $w^n = z$, pak

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\varphi/n) + \mathrm{i}\sin(\varphi/n))\,.$$

Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$

Spočítejte $(1 + i)^{20}$.

Spočítejte odmocninu $\sqrt[3]{-8}$.