

DERIVACE FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

LEKCE32-KDE

derivace

vlastnosti derivace
Cauchyovy–
Riemannovy
podmínky

holomorfní funkce

celistvá funkce
harmonická funkce
sdružená har-
monická
funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DERIVACE

U reálných funkcí více reálných proměnných nebylo možné definovat derivaci analogicky definici derivace reálné funkce jedné reálné proměnné (nešlo dělit ...) a definovaly se jen parciální derivace, resp. derivace ve směru.

Komplexní čísla však lze dělit a je možné převzít definici derivace z jedné reálné proměnné beze změny.

DEFINICE. Necht' je funkce f definována v okolí bodu w . Jestliže má smysl limita

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w},$$

nazývá se její hodnota **derivací** funkce f v bodě w a značí se $f'(w)$.

Vzhledem ke stejné definici jako v reálném případě a vzhledem k předchozím stejným větám o limitách, platí i pro funkce v komplexním oboru obdobné věty jako v reálném případě:

1. platí stejné vzorce pro derivaci součtu, součinu, podílu, složené funkce a inverzní funkce;
2. má-li funkce v bodě vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá;

Nelze přenést bez podstatných úprav věty o střední hodnotě.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

LEKCE32-KDE

derivace

vlastnosti derivace

Cauchyovy–

Riemannovy

podmínky

holomorfní funkce

celistvá funkce

harmonická funkce

sdužená har-

monická

funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CAUCHYOVY–RIEMANNOVY PODMÍNKY

Je samozřejmě možné používat i parciální derivace funkce $f = f_1 + i f_2$ po složkách, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

VĚTA. Necht' je funkce $f = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ definována v okolí bodu $w = (u, v)$. Jestliže $f'(w)$ existuje a je vlastní, pak jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w parciální derivace prvního řádu,
2. v bodě w platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = - \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Potom platí rovnosti $f'(w) = \frac{\partial f}{\partial x}(w) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(w)$.

Uvedené rovnosti pro parciální derivace se nazývají **Cauchyovy–Riemannovy podmínky** nebo rovnosti.

LEKCE32-KDE

derivace

vlastnosti derivace
Cauchyovy–
Riemannovy
podmínky

holomorfní funkce

celistvá funkce
harmonická funkce
sdružená har-
monická
funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

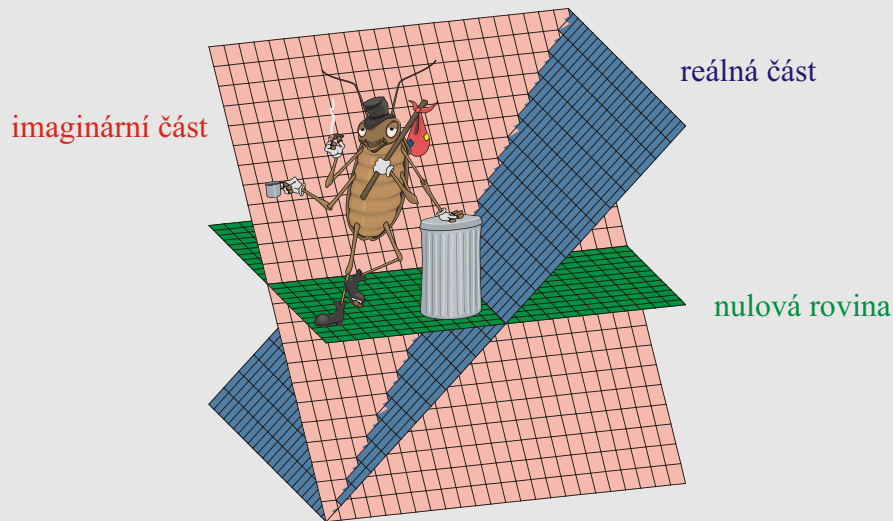
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



V *Příkladech* je uvedena funkce f , která splňuje všechny podmínky předchozí věty, ale nemá v bodě w derivaci.

Podmínky tedy nejsou postačující, je třeba k nim přidat další podmínku. Následující tvrzení ukazuje, že například spojitost parciálních derivací může být taková další podmínka (stačí však méně – viz *Poznámky*).

VĚTA. Necht' je funkce $f = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ definována v okolí bodu $w = (u, v)$ a jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w spojitě vlastní parciální derivace prvního řádu,
2. v bodě w platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Potom existuje vlastní derivace $f'(w)$.

LEKCE32-KDE

derivace

vlastnosti derivace

Cauchyovy–

Riemannovy

podmínky

holomorfní funkce

celistvá funkce

harmonická funkce

sdužená har-

monická

funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE32-KDE

derivace

vlastnosti derivace
Cauchyovy–
Riemannovy
podmínky

holomorfní funkce

celistvá funkce
harmonická funkce
sdružená har-
monická
funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HOLOMORFNÍ FUNKCE

DEFINICE. Funkce je **holomorfní v bodě**, jestliže má derivaci v nějakém okolí tohoto bodu.

Funkce je **holomorfní na množině**, jestliže je holomorfní v každém bodě této množiny.

Funkce holomorfní na \mathbb{C} se nazývá **celistvá**.

Jak bylo zmíněno v *Poznámkách 2*, bude později dokázáno, že holomorfní funkce má spojitě parciální derivace všech řádů.

Pak přímo z Cauchyových–Riemannových podmínek vyplývá derivováním následující důsledek (reálná funkce dvou proměnných se nazývá **harmonická** na otevřené množině G , jestliže tam má spojitě parciální derivace 2.řádu a splňuje Laplaceovu rovnici $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, zkráceně $\Delta f = 0$):

DŮSLEDEK. Necht' funkce $f = (f_1, f_2)$ je holomorfní na otevřené množině G . Potom jsou funkce f_1 a f_2 harmonické v G .

Předchozí důsledek má i následující částečně obrácené tvrzení:

DŮSLEDEK. Necht' f je harmonická reálná funkce dvou proměnných na otevřené množině G . Pak existují až na konstanty jediné reálné funkce g, h dvou proměnných tak, že funkce $f + ig$ a $h + if$ jsou holomorfní v G .

Reálná funkce g z předchozího tvrzení se nazývá *sdužená harmonická funkce* k f .

Existuje ještě jiný pohled na Cauchy–Riemannovy podmínky, který spojuje teorii holomorfních funkcí s vektorovými poly a tedy s možností využít např. Greenovu větu.

LEKCE32-KDE

derivace

vlastnosti derivace
Cauchyovy–
Riemannovy
podmínky

holomorfní funkce

celistvá funkce
harmonická funkce
sdužená funkce
harmonická funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dvojměrné **vektorové pole** je dvojice dvou reálných funkcí dvou proměnných, a tedy komplexní funkce komplexní proměnné. Lze definovat i komplexní vektorové pole na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ jako dvojici (f, g) dvou komplexních funkcí komplexní proměnné, které mají spojité parciální derivace 1.řádu na G .

Komplexní vektorové pole (f, g) se v souladu s reálným případem nazývá **potenciální** na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže existuje funkce F taková, že $F_x = f, F_y = g$ (tato funkce F se pak nazývá **potenciál** pole (f, g)).

Zřejmě součty komplexních potenciálních polí a jejich násobky čísly (i komplexními) jsou opět potenciální.

S pomocí komplexního vektorového pole máme jiný pohled na Cauchyovy–Riemannovy podmínky. Důkaz následujícího tvrzení je jednoduchý a je přenechán čtenáři v *Otázkách*.

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro komplexní funkci $f = (f_1, f_2)$ mající spojité parciální derivace 1.řádu na otevřené množině G :

1. f je holomorfní na G ;
2. pole $(f_1, -f_2)$ a (f_2, f_1) jsou potenciální na G ;
3. pole (f, if) je potenciální na G .

Předchozí charakterizace bude využita v **integraci funkcí**.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3 4 5 6

STANDARDY z kapitoly

DERIVACE FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

LEKCE32-KDE

derivace

vlastnosti derivace

Cauchyovy–

Riemannovy

podmínky

holomorfní funkce

celistvá funkce

harmonická funkce

sdružená har-

monická

funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DERIVACE

DEFINICE. Necht' je funkce f definována v okolí bodu w . Jestliže má smysl limita

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w},$$

nazývá se její hodnota **derivací** funkce f v bodě w a značí se $f'(w)$.

LEKCE32-KDE

derivace

vlastnosti derivace
Cauchyovy–
Riemannovy
podmínky

holomorfní funkce

celistvá funkce
harmonická funkce
sdružená har-
monická
funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CAUCHYOVY–RIEMANNOVY PODMÍNKY

Je samozřejmě možné používat i parciální derivace funkce $f = f_1 + i f_2$ po složkách, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

VĚTA. Necht' je funkce $f = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ definována v okolí bodu $w = (u, v)$. Jestliže $f'(w)$ existuje a je vlastní, pak jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w parciální derivace prvního řádu,
2. v bodě w platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Potom platí rovnosti $f'(w) = \frac{\partial f}{\partial x}(w) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(w)$.

Uvedené rovnosti pro parciální derivace se nazývají **Cauchyovy–Riemannovy podmínky** nebo rovnosti.

LEKCE32-KDE

derivace

vlastnosti derivace
Cauchyovy–
Riemannovy
podmínky

holomorfní funkce

celistvá funkce
harmonická funkce
sdružená har-
monická
funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

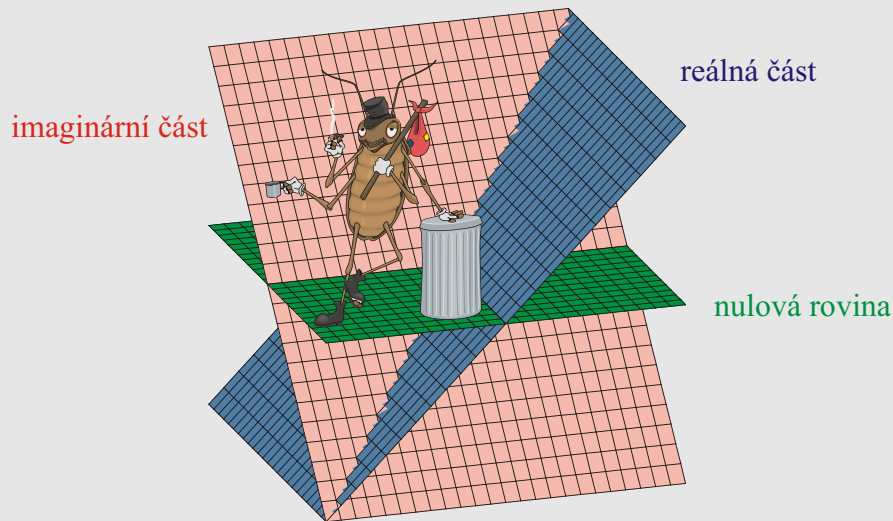
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



VĚTA. Necht' je funkce $f = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ definována v okolí bodu $w = (u, v)$ a jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w spojitě vlastní parciální derivace prvního řádu,
2. v bodě w platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Potom existuje vlastní derivace $f'(w)$.

LEKCE32-KDE

derivace

vlastnosti derivace
Cauchyovy–
Riemannovy
podmínky

holomorfní funkce

celistvá funkce
harmonická funkce
sdružená funkce
harmonická funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HOLOMORFNÍ FUNKCE

DEFINICE. Funkce je holomorfní v bodě, jestliže má derivaci v nějakém okolí tohoto bodu.

Funkce je holomorfní na množině, jestliže je holomorfní v každém bodě této množiny. Funkce holomorfní na \mathbb{C} se nazývá celistvá.

Pak přímo z Cauchyových–Riemannových podmínek vyplývá derivováním následující důsledek (reálná funkce dvou proměnných se nazývá harmonická na otevřené množině G , jestliže tam má spojité parciální derivace 2.řádu a splňuje Laplaceovu rovnici $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, zkráceně $\Delta f = 0$):

DŮSLEDEK. Necht' funkce $f = (f_1, f_2)$ je holomorfní na otevřené množině G . Potom jsou funkce f_1 a f_2 harmonické v G .

DŮSLEDEK. Necht' f je harmonická reálná funkce dvou proměnných na otevřené množině G . Pak existují až na konstanty jediné reálné funkce g, h dvou proměnných tak, že funkce $f + ig$ a $h + if$ jsou holomorfní v G .

Reálná funkce g z předchozího tvrzení se nazývá sružená harmonická funkce k f .

Dvojměrné vektorové pole je dvojice dvou reálných funkcí dvou proměnných, a tedy komplexní funkce komplexní proměnné. Lze definovat i komplexní vektorové pole na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ jako dvojici (f, g) dvou komplexních funkcí komplexní proměnné, které mají spojité parciální derivace 1.řádu na G .

LEKCE32-KDE

derivace

vlastnosti derivace

Cauchyovy–

Riemannovy

podmínky

holomorfní funkce

celistvá funkce

harmonická funkce

sružená

har-

monická

funkce

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Komplexní vektorové pole (f, g) se v souladu s reálným případem nazývá **potenciální** na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže existuje funkce F taková, že $F_x = f, F_y = g$ (tato funkce F se pak nazývá **potenciál** pole (f, g)).

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro komplexní funkci $f = (f_1, f_2)$ mající spojité parciální derivace 1.řádu na otevřené množině G :

1. f je holomorfní na G ;
2. pole $(f_1, -f_2)$ a (f_2, f_1) jsou potenciální na G ;
3. pole (f, if) je potenciální na G .

Pomocí Cauchyových–Riemannových podmínek zkoumejte holomorfnost funkcí.
K zadané harmonické funkci najděte harmonicky sdruženou.

Příklad. Jestliže funkce f definovaná v okolí bodu $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ má v bodě z_0 nenulovou derivaci $f'(z_0)$, pak se křivka procházející bodem z_0 ve směru α zobrazí pomocí f do křivky procházející bodem $f(z_0)$ ve směru $f'(z_0)\alpha$. Tedy se zachovávají úhly křivek procházející bodem z_0 . Dokažte.

Řešení. Spočteme tečný vektor křivky $f(\varphi(t))$ pro vhodnou křivku φ . Uvědomíme si nakonec, že násobení $f'(z_0)\alpha$ násobí úhel α komplexním číslem $f'(z_0) = r(\cos(\text{Arg } z) + i \sin(\text{Arg } z))$, kde r způsobí protažení vektoru a ten je následně otočen o příslušný úhel.

LEKCE32-KDE derivace

vlastnosti derivace
Cauchyovy–
Riemannovy
podmínky
holomorfní funkce
celistvá funkce
harmonická funkce
sdružená funkce
monická funkce

STANDARDY

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9