DERIVACE FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

DERIVACE

U reálných funkcí více reálných proměnných nebylo možné definovat derivaci analogicky definici derivace reálné funkce jedné reálné proměnné (nešlo dělit ...) a definovaly se jen parciální derivace, resp. derivace ve směru.

Komplexní čísla však lze dělit a je možné převzít definici derivace z jedné reálné proměnné beze změny.

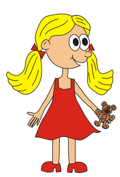
DEFINICE. Nechť je funkce f definována v okolí bodu w. Jestliže má smysl limita

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w},$$

nazývá se její hodnota derivací funkce f v bodě w a značí se $f'(w)$.

Tento způsob definovat derivaci jako limitu diferenčních podílů je tradiční. jiný, elegantní postup je aproximace funkce lineární funkcí, případně zobrazením.

Přitom chceme, aby odchylka naší funkce od té lineární aproximace byla řádově menší než lineární. Tak se definuje diferenciál funkce více proměnných. U komplexní derivace to taky funguje.

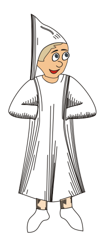


A elegantní věcičky mám ráda i já.

Tedy u komplexních funkcí se hledá lineární aproximace pomocí lineární funkce $z \mapsto z$, případně lineárně upravené.

A to donutí plochy reálné části derivované funkce chovat se jako zobrazení $(x, y) \mapsto x$ a imaginární část chovat se jako $(x, y) \mapsto y$. Takže se navěky bude imaginární část točit doleva.

To je proto, že jsme si vzali $a + ib$, kdybychom měli $a - ib$, tak by to bylo naopak.



To plus jsem vybojoval já.

Vzhledem ke stejné definici jako v reálném případě a vzhledem k předchozím stejným větám o limitách, platí i pro funkce v komplexním oboru obdobné věty jako v reálném případě:

1. platí stejné vzorce pro derivaci součtu, součinu, podílu, složené funkce a inverzní funkce;
2. má-li funkce v bodě vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá;

Nelze přenést bez podstatných úprav věty o střední hodnotě.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

CAUCHYOVY–RIEMANNOVY PODMÍNKY

Je samozřejmě možné používat i parciální derivace funkce $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$ po složkách, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f_2}{\partial y}\,,$$

Jaký mají vztah tyto parciální derivace k derivaci funkce f?

To ukazuje následující důležitá věta.

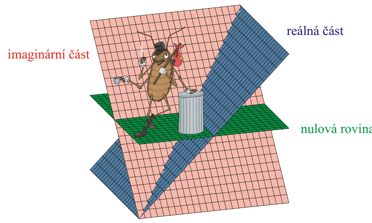
VĚTA. Nechť je funkce $f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ definována v okolí bodu $w = (u,v)$. Jestliže $f'(w)$ existuje a je vlastní, pak jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w parciální derivace prvního řádu,
2. v bodě w platí
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\,.$$

Potom platí rovnosti $f'(w) = \frac{\partial f}{\partial x}(w) = -\mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}(w)$.

Uvedené rovnosti pro parciální derivace se nazývají Cauchyovy–Riemannovy podmínky nebo rovnosti.

Cauchyovy - Riemannovy podmínky se dají zapamatovat snadno, jde tam o tu "levotočivost", která platí u $z \mapsto z$.



Důkaz. Nechť $w \in G$ a $f'(w)$ existuje. Pak existuje

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(w+h)-f(w)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(u+h_1,v+h_2)-f_1(u,v)+\mathrm{i}(f_2(u+h_1,v+h_2)-f_2(u,v))}{h_1+\mathrm{i}h_2}$$

a po odstranění imaginární jednotky z jmenovatele se dostane

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(w+h)-f(w)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f_1(u+h_1,v+h_2)-f_1(u,v))h_1-(f_2(u+h_1,v+h_2)-f_2(u,v))h_2}{h_1^2+h_2^2} \\ &+ \lim_{h\to 0} \mathrm{i}\frac{(f_1(u+h_1,v+h_2)-f_1(u,v))h_2+(f_2(u+h_1,v+h_2)-f_2(u,v))h_1}{h_1^2+h_2^2}\,.\end{aligned}$$

Jestliže se zvolí po řadě $h_1 = 0$ a pak $h_2 = 0$, dostanou se výsledky

$$-\frac{\partial f_2}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial f_1}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f_2}{\partial x}\,.$$

Porovnáním imaginárních a reálných složek plynou podmínky tvrzení. ◇

V *Příkladech* je uvedena funkce f, která splňuje všechny podmínky předchozí věty, ale nemá v bodě w derivaci.

Podmínky tedy nejsou postačující, je třeba k nim přidat další podmínku. Následující tvrzení ukazuje, že například spojitost parciálních derivací může být taková další podmínka (stačí však méně – viz *Poznámky*).

VĚTA. Nechť je funkce $f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ definována v okolí bodu $w = (u,v)$ a jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w spojité vlastní parciální derivace prvního řádu,
2. v bodě w platí
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}\,.$$

Potom existuje vlastní derivace $f'(w)$.

Důkaz. Má se spočítat limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(u+h_1,v+h_2)-f(u,v)}{(h_1,h_2)} = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(u+h_1,v+h_2)-f_1(u,v)+\mathrm{i}(f_2(u+h_1,v+h_2)-f_(2u,v))}{h_1+\mathrm{i}h_2}\,.$$

Použije se Lagrangeova věta na funkce f_1, f_2 na úsečce s koncovými body (u,y) a $(u+h_1, y+h_2)$ (použitá derivace je směrová derivace):

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(c_h)\frac{h_1}{|h|} + \frac{\partial f_1}{\partial y}(c_h)\frac{h_2}{|h|}\right)|h| + \mathrm{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(d_h)\frac{h_1}{|h|} + \frac{\partial f_2}{\partial y}(d_h)\frac{h_2}{|h|}\right)|h|}{h_1+\mathrm{i}h_2}\,.$$

Po rozšíření zlomku číslem $\overline{h}$ bude mít např. reálná složka tvar (budeme psát zkráceně $f_{1,x}(c)$ místo parciální derivace f_1 podle x v bodě c_h, atd.)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_{1,x}(c)h_1^2 + h_1h_2(f_{1,y}(c)-f_{2,x}(d)) - f_{2,y}(d)h_2^2}{|h|^2}\,,$$

což lze upravit jako

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_{1,x}(c)(h_1^2+h_2^2)+h_1h_2(f_{1,y}(c)-f_{2,x}(d))-(f_{2,y}(d)+f_{1,x}(c))h_2^2}{|h|^2} .$$

Z předpokladu spojitosti parciálních derivací a vztahů mezi nimi vyplývá, že oba výrazy $f_{1,y}(c) - f_{2,x}(d)$ a $f_{2,y}(d) + f_{1,x}(c)$ konvergují k 0 pro $h \to 0$. Protože zlomky $h_1h_2/|h|$ a $h_2^2/|h|$ jsou omezené, má uvedená reálná složka limitu $f_{1,x}(x, y)$.

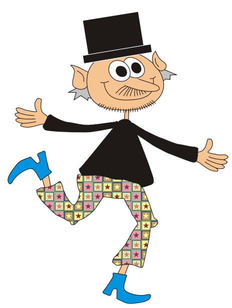
Podobně se ukáže, že imaginární složka má limitu $f_{2,x}(u, v)$, takže derivace v bodě (u, v) existuje. ◇

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 2

HOLOMORFNÍ FUNKCE

DEFINICE. Funkce je holomorfní v bodě, jestliže má derivaci v nějakém okolí tohoto bodu.

Funkce je holomorfní na množině, jestliže je holomorfní v každém bodě této množiny.



Jde jenom o derivaci. Ale vzhledem k tomu, že je to komplexní derivace, budou se dít komplexní divy.

Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá celistvá.

Jak bylo zmíněno v *Poznámkách 2*, bude později dokázáno, že holomorfní funkce má spojité parciální derivace všech řádů.

Pak přímo z Cauchyových–Riemannových podmínek vyplývá derivováním následující důsledek (reálná funkce dvou proměnných se nazývá harmonická na otevřené množině G, jestliže tam má spojité parciální derivace 2.řádu a splňuje Laplaceovu rovnici $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, zkráceně $\Delta f = 0$):

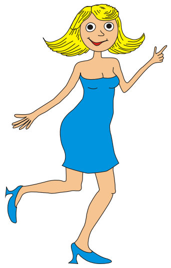
DŮSLEDEK. Nechť funkce $f = (f_1, f_2)$ je holomorfní na otevřené množině G. Potom jsou funkce f_1 a f_2 harmonické v G.

Předchozí důsledek má i následující částečně obrácené tvrzení:

DŮSLEDEK. Nechť f je harmonická reálná funkce dvou proměnných na otevřené množině G. Pak existují až na konstanty jediné reálné funkce g, h dvou proměnných tak, že funkce $f + \mathrm{i}g$ a $h + \mathrm{i}f$ jsou holomorfní v G.

Důkaz. Má-li být $f+\mathrm{i}g$ holomorfní, musí platit $f_x = g_y$ a tedy $g(x, y) = F(x, y)+\varphi(x)$, kde $F(x, y)$ je primitivní k f v proměnné y a φ je nějaká reálná funkce jedné reálné proměnné x.

Druhá Cauchyova–Riemannova podmínka implikuje rovnost $F_x(x, y) + \varphi'(x) = -f_y(x, y)$. Odtud vyplývá existence až na konstantu jediné vhodné funkce φ (použije se spojitost a derivace integrálu podle parametru).



Kde se použije podmínky, že f je harmonická?

Podobně se ukáže druhá část tvrzení. $\diamond$

Reálná funkce g z předchozího tvrzení se nazývá *sdružená harmonická funkce* k f.

Existuje ještě jiný pohled na Cauchy–Riemannovy podmínky, který spojuje teorii holomorfních funkcí s vektorovými poli a tedy s možností využít např. Greenovu větu.

Dvojrozměrné vektorové pole je dvojice dvou reálných funkcí dvou proměnných, a tedy komplexní funkce komplexní proměnné. Lze definovat i komplexní vektorové pole na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ jako dvojici (f, g) dvou komplexních funkcí komplexní proměnné, které mají spojité parciální derivace 1.řádu na G.

Komplexní vektorové pole (f, g) se v souladu s reálným případem nazývá potenciální na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže existuje funkce F taková, že $F_x = f, F_y = g$ (tato funkce F se pak nazývá potenciál pole (f, g)).

Zřejmě součty komplexních potenciálních polí a jejich násobky čísly (i komplexními) jsou opět potenciální.

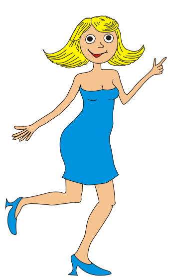
S pomocí komplexního vektorového pole máme jiný pohled na Cauchyovy–Riemannovy podmínky. Důkaz následujícího tvrzení je jednoduchý a je přenechán čtenáři v *Otázkách*.

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro komplexní funkci $f = (f_1, f_2)$ mající spojité parciální derivace 1.řádu na otevřené množině G:

1. f je holomorfní na G;
2. pole $(f_1, -f_2)$ a (f_2, f_1) jsou potenciální na G;
3. pole $(f, \mathrm{i}f)$ je potenciální na G.

Předchozí charakterizace bude využita v integraci funkcí.

Potenciál je jakási forma primitivní funkce. To se bude hodit.



Všimněte si, že Cauchyovy - Riemannovy podmínky jsou v podstatě jakési diferenciální rovnice, jejichž řešením jsou právě kolomorfní funkce. To je hezké.

Kdybych například ty podmínky trochu změnil, dostanu jino holomorfní funkce.

A už se můžeme pomalu připravit na to, že jako řešení diferenciální rovnice budou holomorfní funkce jednoznačně určeny svými počátečními / okrajovými podmínkami. Navíc k reálné části jde dopočíst (až na konstantu) jednoznačně i imaginární část tak, aby to pak bylo holomorfní. Kouzlo nás zastihne v pravý čas a my budeme připraveni.

Vždycky mě dovede okouzlit. Starám se, aby jeho kouzelná síla nevyprchala.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3 4 5 6

POZNÁMKY

Poznámky 1:

Tak jako u reálných funkcí reálné proměnné se definovaly jednostranné derivace, i u funkcí v komplexním oboru by šlo definovat derivace v bodě w, aniž by funkce byla definována všude v nějakém okolí bodu w. Pro účely tohoto textu by to znamenalo zbytečné komplikace výkladu. Proto je derivace definována jen ve vnitřních bodech svého definičního oboru.

Asi je zřejmé, proč se do komplexního oboru nedají přenést věty o střední hodnotě ve tvaru známém z reálných funkcí reálné proměnné.

Z těchto vět se odvodily další věty, např. L'Hospitalovo pravidlo nebo výpočet derivace jako limita derivací.

Uvidíte později, že se tyto důsledky dají dokázat i pro funkce v komplexním oboru bez použití vět o střední hodnotě.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

Cauchyovy–Riemannovy podmínky se nazývají podle A.L.Cauchyho (1789–1857), který tyto podmínky používal a podle F.B.Riemanna (1826–1866), který z nich učinil účinný nástroj teorie komplexních funkcí komplexní proměnné. Ale už v polovině 18.století tyto rovnosti používali D'Alembert a L.Euler, a proto někteří autoři nazývají rovnosti D'Alembertovými–Eulerovými podmínkami.

Později uvidíte, že tyto rovnosti mají velmi blízko k rovnostem charakterizujícím potenciální vektorová pole (D'Alembert a L.Euler je také používali při řešení úloh proudění tekutin).

Jak je uvedeno, samy Cauchyovy–Riemannovy podmínky nestačí k existenci derivace. Pokud jsou parciální derivace spojité, už tyto podmínky stačí. Nicméně, v tuto chvíli je obtížné ukázat, že existence derivace v okolí bodu implikuje spojitost parciálních derivací. Z tohoto důvodu nejsou uvedená tvrzení tvaru ekvivalence.

Existuje slabší podmínka, která spolu s rovnostmi Cauchyho a Riemanna implikuje existenci derivace a naopak, z existence derivace se dá snadno tato podmínka dokázat. Je to existence tzv. *totálního diferenciálu*.

Tento pojem však nebude nikde v dalším výkladu potřeba a není nutné ho zavádět jen kvůli hezké formulaci věty o existenci derivace.

Pro tuto chvíli stačí věřit, že existence derivace funkce v okolí bodu implikuje existenci jejích spojitých parciálních derivací 1.řádu v tomto bodě. Později se totiž ukáže, že má-li funkce derivaci v otevřené množině, má v této množině derivace všech řádů (a tedy všechny tyto derivace i všechny parciální derivace všech řádů reálné a imaginární složky funkce jsou spojité).

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

Uvědomte si rozdíl mezi tvrzeními *f má derivaci v bodě w* a *f je holomorfní v bodě w*.

Místo termínu *holomorfní* funkce se používají i jiné termíny, např. *analytická* funkce (např. v anglické literatuře) nebo *regulární* funkce nebo *monogenní* funkce. V české (i např. v polské) literatuře značí analytická funkce něco jiného, totiž tzv. analytické pokračování holomorfní funkce – výsledkem je mnohoznačná funkce.

Pokud je už známo, že složky holomorfní funkce mají spojité parciální derivace 1.řádu, pak holomorfnost f na G implikuje potenciálnost pole $/f, \mathrm{i}f)$. Je-li $(f, \mathrm{i}f)$ potenciální, je nutné pro důkaz holomorfnosti f předpokládat existenci spojitých parciálních derivací 1.řádu funkce f (někdy se tento předpoklad vyskytuje již v definici potenciálního pole).

Konec poznámek 3.

PŘÍKLADY

Příklady 1:

1. Dokažte z definice derivace, že derivace konstantní funkce je 0 a že derivace funkce z je 1.

2. Odvoďte indukcí pomocí věty o derivaci součinu, že derivace funkce $z^n, n \in \mathbb{N}$, je rovna nz^{n-1}.

3. Ukažte, že polynomy a racionální funkce mají derivaci v každém bodě svého definičního oboru.

4. Ukažte z definice derivace, že funkce $\overline{z}$ nemá derivaci v žádném bodě.

5. Ukažte z definice derivace, že funkce $|z|^2$ má derivaci pouze v 0.

6. Vypočtěte z definice derivaci funkce $1/z$. Indukcí ukažte, že derivace funkce $z^n, n \in \mathbb{Z}$, je rovna nz^{n-1}.

7. Ukažte z definice derivace, že funkce $|z|, \Re(z), \Im(z)$ nemají derivaci v žádném bodě.

Konec příkladů 1.

Příklady 2:

1. Ukažte pomocí Cauchyových–Riemannových podmínek, že funkce $|z|, \Re(z), \Im(z), \overline{z}$ nemají derivaci v žádném bodě.

2. Ukažte pomocí Cauchyových–Riemannových podmínek, že funkce z^2 má derivaci v každém bodě.

3. Ukažte pomocí Cauchyových–Riemannových podmínek, že funkce $|z|^2$ má derivaci pouze v 0.

4. Určete všechny body, kde mají následující funkce derivaci:

$$\mathrm{e}^{-y}(\cos x + \mathrm{i} \sin x)\,, \quad (x^2 - 2)\mathrm{e}^{-x}(\cos y - \mathrm{i} \sin y)\,, \quad y(x + \mathrm{i}y)\,.$$

5. Ukažte, že funkce

$$f(z) = \begin{cases} z^5/|z|^4, & \text{pro } z \neq 0; \\ 0, & \text{pro } z = 0. \end{cases}$$

nemá derivaci v bodě 0, ale splňuje tam Cauchyovy–Riemannovy rovnosti.

Konec příkladů 2.

Příklady 3:

1. Ukažte, že funkce $|z|^2$ má v 0 derivaci, ale není tam holomorfní.

2. Polynomy jsou celistvé funkce. Které racionální funkce jsou celistvé?

3. Zjistěte, zda a kde jsou následující funkce harmonické a pokud ano, najděte k nim sdružené harmonické funkce:

$$y^3 - 3x^2 y\,, \qquad \frac{y}{x^2+y^2}\,, \qquad \sin x \cosh y\,.$$

4. Uvažte, že pokud jsou f, g sdružené harmonické funkce, tak i $-g, f$ jsou sdružené.

Sám jsem tomu nevěřil. Taky radši nevěřte a dokažte si to sami.

5. Z Cauchyových–Riemannových podmínek plyne následující tvrzení (dokažte ho): *Má-li $f = f_1 + i f_2$ nenulovou vlastní derivaci v bodě (u, v), pak tečny ke křivkám $f_1(z) = u$, $f_2(z) = v$ v bodě (u, v) jsou na sebe kolmé.*

To je základní poznatek, kterým komplexní funkce přispěly k teorii proudění tekutin (zachovává se kolmost proudu vody na tlakové vrstevnice vzduchu, což se použilo při návrhu profilu křídla letadla).

Nakreslete příslušný soubor křivek např. pro funkci z^2.

6. Modifikujte tvrzení v předchozí otázce pro dvojici sdružených harmonických funkcí.

7. Ukažte, že je-li f holomorfní a nekonstantní na neprázdné otevřené množině G, tak $|f|$ není na G konstantní. [Použijte rovnost $|f|^2 = f\overline{f}$ a fakt, že pro nekonstantní holomorfní funkci f nemůže být $\overline{f}$ holomorfní.]

Konec příkladů 3.

OTÁZKY

Otázky 1:

1. Dokažte vzorce pro derivaci součtu, součinu a podílu.

2. Dokažte, že pro derivaci složené funkce platí stejný vzorec jako v reálném případě.

3. Dokažte, že pro derivaci inverzní funkce platí stejný vzorec jako v reálném případě (za předpokladu, že inverzní funkce k prosté spojité funkci na oblasti je spojitá).

4. Ukažte, že funkce, která má vlastní derivaci v bodě w, je v tomto bodě spojitá.

Konec otázek 1.

Otázky 2:

Cauchyovy–Riemannovy rovnosti lze vyjádřit i v jiných směrech, než jsou osy souřadnic, nebo v jiných souřadnicích:

1. Nechť u, v jsou dva jednotkové vektory v rovině na sebe kolmé, přičemž pravý úhel jde v kladném směru (proti otáčení hodinových ručiček) od u k v (tj., $v = \mathrm{i}u$). Má-li f derivaci v bodě w, pak platí rovnosti

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}\,,$$

kde uvedené derivace jsou derivace v příslušných směrech v bodě w a f_1, f_2 jsou reálná a imaginární složka funkce f.

Potom

$$f'(w) = \frac{1}{u}\Big(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f_2}{\partial u}\Big) = \frac{1}{v}\Big(\frac{\partial f_1}{\partial v} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f_2}{\partial v}\Big)\,.$$

2. Převodem k polárním souřadnicím ($z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$) ukažte, že Cauchyovy–Riemannovy rovnosti se vyjádří ve tvaru

$$r\,\frac{\partial f_1}{\partial r} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\,, \quad r\,\frac{\partial f_2}{\partial r} = -\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}$$

a potom

$$f'(w) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial r} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f_2}{\partial r}\Big)(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)\,.$$

Ukažte, že uvedené rovnosti mají za důsledek, že reálné funkce f_1, f_2 jsou řešením parciální diferenciální rovnice o neznámé g

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0\,.$$

3. Předchozí rovnosti pro polární souřadnice se dají získat z prvních rovností pro derivace ve směru. Vezměte za u jednotkový tečný vektor ke kružnici $|z| = r$ v bodě w v záporném směru, a za vektor v normálu této tečny mířící k počátku. Spočítejte, že derivace podle u je rovna derivaci podle φ vydělená r a že derivace podle v je rovna derivaci podle r s opačným znaménkem.

Konec otázek 2.

Otázky 3:

Následující tři otázky jsou jednoduché za předpokladu, že množiny A, B jsou otevřené – tento případ se také nejvíce používá. Nicméně, zkuste dokázat tvrzení i pro obecné množiny A, B. Zvláště u druhé a třetí otázky je nutná opatrnost.

1. Ukažte, že součet a součin dvou funkcí holomorfních na A je holomorfní na A.

2. Jsou-li f, g holomorfní funkce na A a g se nikde na A neanuluje, pak podíl f/g je holomorfní na A.

3. Ukažte, že je-li f holomorfní na A, g je holomorfní na B a $g(B) \subset A$, pak $f \circ g$ je holomorfní na B.

4. Ukažte, že složení dvou celistvých funkcí je celistvá funkce.

5. Dokažte, že reálná a imaginární složka holomorfní funkce jsou funkce harmonické (předpokládejte, že parciální derivace 2.řádu těchto složek jsou spojité).

6. Dokažte charakterizaci holomorfní funkce na otevřené množině potenciálními poly. [Použijte charakterizaci potenciálních polí.]

Konec otázek 3.

CVIČENÍ

Cvičení 1: Příklad. Zjistěte, zda je funkce $f(z) = z^2 - 3z + 5$ holomorfní na nějaké oblasti v komplexní rovině. Pokud ano, spočítejte její derivaci.

Řešení. Označme $z = x + iy,\ f = u + iv$, kde x, y jsou reálná čísla a u, v jsou reálné funkce. Přímým dosazením snadno zjistíme, že

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 3x + 5$$

a

$$v(x,y) = 2xy - 3y.$$

Dále budeme ověřovat Cauchyovy-Riemannovy podmínky. Tedy počítáme následující parciální derivace:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,$$

a

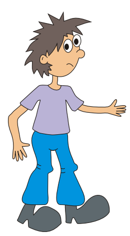
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 3.$$

Vidíme tedy, že

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Jelikož jsou Cauchy-Riemannovy podmínky splněny a funkce u, v mají vlastní parciální derivace všech řádů, je funkce f holomorfní na $\mathbb{C}$. Navíc víme, že platí

$$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 + i2y.$$



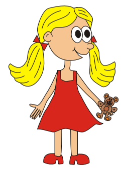
Doufal jsem, že derivace nebude existovat, abych jí nemusel počítat.

Vždyť to nebolelo.

Konec cvičení 1.

Cvičení 2: Příklad. Zjistěte, zda funkce $f(z) = 2 + |z| + 3|z|^2$ je v nějaké oblasti $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ holomorfní.

Řešení. Podle Cauchy-Riemannových podmínek každá funkce, která je reálná a holomorfní v nějaké oblasti $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, je v $\mathcal{O}$ konstantní. Funkce f je reálná v $\mathbb{C}$, ale není konstantní v žádné oblasti. Proto není v žádné oblasti holomorfní.



To je škoda.

Konec cvičení 2.

Cvičení 3: Příklad. K funkci $u(x, y) = x^3 + y^3$ najděte na $\mathbb{C}$ funkci sdruženou.

Řešení. Spočítáme parciální derivace

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 3x^2, \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 3y^2$$

a druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 6y.$$

Vidíme, že rovnost

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 6x + 6y = 0$$

platí pouze na přímce $x = y$. Funkce u tedy není harmonická, a neexistuje k ní sdružená funkce.

Konec cvičení 3.

Cvičení 4: Příklad. Najděte holomorfní funkci, jejíž reálnou částí je funkce

$$u(x, y) = e^{xy}.$$

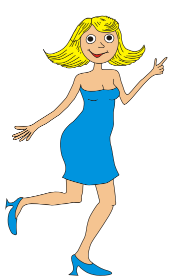
Řešení. Nejprve se podíváme na parciální derivace funkce u :

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = ye^{xy}, \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = xe^{xy}$$

a druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}.$$

V důsledku Cauchy-Riemannových podmínek musí být reálná část holomorfní funkce harmonická. Z právě spočtených druhých parciálních derivací je však patrné, že funkce u harmonická není.



Hledaná funkce tedy neexistuje.

Šímnul sem si, že když to x a y spolu nevystupujou zásadně v páru $x + iy$, tak se na tu holomorfnost nevyhoupneme.

Aha . . .

Konec cvičení 4.

Cvičení 5: Příklad. Spočítejte následující limitu

$$\lim_{z \to 2e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16} = \frac{3}{8} - i\frac{\sqrt{3}}{8}$$

Řešení. Limita čitatele i jmenovatele je v tomto případě nula. Postupnými úpravami zlomku ale dostaneme výsledek.

$\lim_{z \to 2e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16} = \lim_{z \to 2e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{(z+2)(z-2e^{\frac{i\pi}{3}})(z-2e^{\frac{i5\pi}{3}})}{(z-2e^{\frac{i\pi}{3}})(z-2e^{\frac{i2\pi}{3}})(z-2e^{\frac{i4\pi}{3}})(z-2e^{\frac{i5\pi}{3}})}$

$= \lim_{z \to 2e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{(z+2)}{(z-2e^{\frac{i2\pi}{3}})(z-2e^{\frac{i4\pi}{3}})}$

$= \dots$

Konec cvičení 5.

Cvičení 6: Příklad. Spočítejte následující limitu

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z}.$$

Řešení. Pokud by tato limita existovala, nezávisela by její hodnota na způsobu, jakým se blížíme k nule. V tomto případě však máme:

$$\lim_{z \to 0 Im\, z = 0} \frac{|z|}{z} = 1$$

a

$$\lim_{z \to 0 Re\, z = 0} \frac{|z|}{z} = -1.$$

Tedy, když jsme se k nule blížili po reálné ose, vyšla limita 1, ale když jsme se k nule blížili po imaginární ose, vyšla limita -1.

Z toho plyne, že limita v nule neexistuje.

Blížit se stačí ze dvou směrů, když chceme dokázat nespojitost. Když chceme spojitost, musíme se přibližovat současně ze všech směrů.

Asi schováni pod rouškou ε.

Příklad. Jestliže funkce f definovaná v okolí bodu $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ má v bodě z_0 nenulovou derivaci $f'(z_0)$, pak se křivka procházející bodem z_0 ve směru α zobrazí pomocí f do křivky procházející bodem $f(z_0)$ ve směru $f'(z_0)\alpha$. Tedy se zachovávají úhly křivek procházející bodem z_0. Dokažte.

Řešení. Spočteme tečný vektor křivky $f(\varphi(t))$ pro vhodnou křivku φ. Uvědomíme si nakonec, že násobení $f'(z_0)\alpha$ násobí úhel α komplexním číslem $f'(z_0) = r(\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z))$, kde r způsobí protažení vektoru a ten je následně otočen o příslušný úhel.

Konec cvičení 6.

STANDARDY z kapitoly

DERIVACE FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

DERIVACE

DEFINICE. Nechť je funkce f definována v okolí bodu w. Jestliže má smysl limita

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w},$$

nazývá se její hodnota derivací funkce f v bodě w a značí se $f'(w)$.

CAUCHYOVY–RIEMANNOVY PODMÍNKY

Je samozřejmě možné používat i parciální derivace funkce $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$ po složkách, tj.

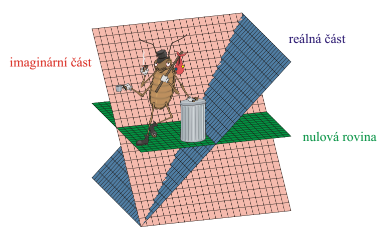
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mathrm{i} \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mathrm{i} \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

VĚTA. Nechť je funkce $f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ definována v okolí bodu $w = (u,v)$. Jestliže $f'(w)$ existuje a je vlastní, pak jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w parciální derivace prvního řádu,
2. v bodě w platí
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\ .$$
Potom platí rovnosti $f'(w) = \frac{\partial f}{\partial x}(w) = -\mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}(w)$.

Uvedené rovnosti pro parciální derivace se nazývají Cauchyovy–Riemannovy podmínky nebo rovnosti.

Cauchyovy - Riemannovy podmínky se dají zapamatovat snadno, jde tam o tu "levotočivost", která platí u $z \mapsto z$.



Důkaz. Nechť $w \in G$ a $f'(w)$ existuje. Pak existuje
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(u+h_1, v+h_2) - f_1(u,v) + \mathrm{i}(f_2(u+h_1, v+h_2) - f_2(u,v))}{h_1 + \mathrm{i}h_2}$$
a po odstranění imaginární jednotky z jmenovatele se dostane
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f_1(u+h_1, v+h_2) - f_1(u,v))h_1 - (f_2(u+h_1, v+h_2) - f_2(u,v))h_2}{h_1^2 + h_2^2} \\ &+ \lim_{h\to 0} \mathrm{i}\,\frac{(f_1(u+h_1, v+h_2) - f_1(u,v))h_2 + (f_2(u+h_1, v+h_2) - f_2(u,v))h_1}{h_1^2 + h_2^2}\ .\end{aligned}$$
Jestliže se zvolí po řadě $h_1 = 0$ a pak $h_2 = 0$, dostanou se výsledky
$$-\,\frac{\partial f_2}{\partial y} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f_1}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\ .$$
Porovnáním imaginárních a reálných složek plynou podmínky tvrzení. $\diamond$

VĚTA. Nechť je funkce $f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ definována v okolí bodu $w = (u,v)$ a jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w spojité vlastní parciální derivace prvního řádu,
2. v bodě w platí
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\ .$$
Potom existuje vlastní derivace $f'(w)$.

HOLOMORFNÍ FUNKCE

DEFINICE. Funkce je holomorfní v bodě, jestliže má derivaci v nějakém okolí tohoto bodu.

Funkce je holomorfní na množině, jestliže je holomorfní v každém bodě této množiny.

Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá celistvá.

Pak přímo z Cauchyových–Riemannových podmínek vyplývá derivováním následující důsledek (reálná funkce dvou proměnných se nazývá harmonická na otevřené množině G, jestliže tam má spojité parciální derivace 2.řádu a splňuje Laplaceovu rovnici $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, zkráceně $\Delta f = 0$):

DŮSLEDEK. Nechť funkce $f = (f_1, f_2)$ je holomorfní na otevřené množině G. Potom jsou funkce f_1 a f_2 harmonické v G.

DŮSLEDEK. Nechť f je harmonická reálná funkce dvou proměnných na otevřené množině G. Pak existují až na konstanty jediné reálné funkce g, h dvou proměnných tak, že funkce $f + \mathrm{i}g$ a $h + \mathrm{i}f$ jsou holomorfní v G.

Důkaz. Má-li být $f + \mathrm{i}g$ holomorfní, musí platit $f_x = g_y$ a tedy $g(x, y) = F(x, y) + \varphi(x)$, kde $F(x, y)$ je primitivní k f v proměnné y a φ je nějaká reálná funkce jedné reálné proměnné x.

Druhá Cauchyova–Riemannova podmínka implikuje rovnost $F_x(x, y) + \varphi'(x) = -f_y(x, y)$. Odtud vyplývá existence až na konstantu jediné vhodné funkce φ (použije se spojitost a derivace integrálu podle parametru). $\diamond$

Reálná funkce g z předchozího tvrzení se nazývá sdružená harmonická funkce k f.

Dvojrozměrné vektorové pole je dvojice dvou reálných funkcí dvou proměnných, a tedy komplexní funkce komplexní proměnné. Lze definovat i komplexní vektorové pole na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ jako dvojici (f, g) dvou komplexních funkcí komplexní proměnné, které mají spojité parciální derivace 1.řádu na G.

Komplexní vektorové pole (f, g) se v souladu s reálným případem nazývá potenciální na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže existuje funkce F taková, že $F_x = f$, $F_y = g$ (tato funkce F se pak nazývá potenciál pole (f, g)).

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro komplexní funkci $f = (f_1, f_2)$ mající spojité parciální derivace 1.řádu na otevřené množině G:

1. f je holomorfní na G;
2. pole $(f_1, -f_2)$ a (f_2, f_1) jsou potenciální na G;
3. pole $(f, \mathrm{i}f)$ je potenciální na G.

PŘÍKLADY

Pomocí Cauchyových–Riemannových podmínek zkoumejte holomorfnost funkcí.

K zadané harmonické funkci najděte harmonicky sdruženou.

Příklad. Jestliže funkce f definovaná v okolí bodu $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ má v bodě z_0 nenulovou derivaci $f'(z_0)$, pak se křivka procházející bodem z_0 ve směru α zobrazí pomocí f do křivky procházející bodem $f(z_0)$ ve směru $f'(z_0)\alpha$. Tedy se zachovávají úhly křivek procházející bodem z_0. Dokažte.

Řešení. Spočteme tečný vektor křivky $f(\varphi(t))$ pro vhodnou křivku φ. Uvědomíme si nakonec, že násobení $f'(z_0)\alpha$ násobí úhel α komplexním číslem $f'(z_0) = r(\cos(\operatorname{Arg} z) + i\sin(\operatorname{Arg} z))$, kde r způsobí protažení vektoru a ten je následně otočen o příslušný úhel.