DERIVACE FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

DERIVACE

U reálných funkcí více reálných proměnných nebylo možné definovat derivaci analogicky definici derivace reálné funkce jedné reálné proměnné (nešlo dělit ...) a definovaly se jen parciální derivace, resp. derivace ve směru.

Komplexní čísla však lze dělit a je možné převzít definici derivace z jedné reálné proměnné beze změny.

DEFINICE. Nechť je funkce f definována v okolí bodu w. Jestliže má smysl limita

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,,$$

nazývá se její hodnota derivací funkce f v bodě w a značí se $f'(w)$.

Vzhledem ke stejné definici jako v reálném případě a vzhledem k předchozím stejným větám o limitách, platí i pro funkce v komplexním oboru obdobné věty jako v reálném případě:

1. platí stejné vzorce pro derivaci součtu, součinu, podílu, složené funkce a inverzní funkce;
2. má-li funkce v bodě vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá;

Nelze přenést bez podstatných úprav věty o střední hodnotě.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

CAUCHYOVY–RIEMANNOVY PODMÍNKY

Je samozřejmě možné používat i parciální derivace funkce $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$ po složkách, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f_2}{\partial y}\,,$$

VĚTA. Nechť je funkce $f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ definována v okolí bodu $w = (u,v)$. Jestliže $f'(w)$ existuje a je vlastní, pak jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w parciální derivace prvního řádu,
2. v bodě w platí
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\,.$$

Potom platí rovnosti $f'(w) = \frac{\partial f}{\partial x}(w) = -\mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}(w)$.

Uvedené rovnosti pro parciální derivace se nazývají Cauchyovy–Riemannovy podmínky nebo rovnosti.

V *Příkladech* je uvedena funkce f, která splňuje všechny podmínky předchozí věty, ale nemá v bodě w derivaci.

Podmínky tedy nejsou postačující, je třeba k nim přidat další podmínku. Následující tvrzení ukazuje, že například spojitost parciálních derivací může být taková další podmínka (stačí však méně – viz *Poznámky*).

VĚTA. Nechť je funkce $f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ definována v okolí bodu $w = (u,v)$ a jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w spojité vlastní parciální derivace prvního řádu,

2. v bodě w platí
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Potom existuje vlastní derivace $f'(w)$.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 2

HOLOMORFNÍ FUNKCE

DEFINICE. Funkce je holomorfní v bodě, jestliže má derivaci v nějakém okolí tohoto bodu.

Funkce je holomorfní na množině, jestliže je holomorfní v každém bodě této množiny.

Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá celistvá.

Jak bylo zmíněno v *Poznámkách 2*, bude později dokázáno, že holomorfní funkce má spojité parciální derivace všech řádů.

Pak přímo z Cauchyových–Riemannových podmínek vyplývá derivováním následující důsledek (reálná funkce dvou proměnných se nazývá harmonická na otevřené množině G, jestliže tam má spojité parciální derivace 2.řádu a splňuje Laplaceovu rovnici $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, zkráceně $\Delta f = 0$):

DŮSLEDEK. Nechť funkce $f = (f_1, f_2)$ je holomorfní na otevřené množině G. Potom jsou funkce f_1 a f_2 harmonické v G.

Předchozí důsledek má i následující částečně obrácené tvrzení:

DŮSLEDEK. Nechť f je harmonická reálná funkce dvou proměnných na otevřené množině G. Pak existují až na konstanty jediné reálné funkce g, h dvou proměnných tak, že funkce $f + \mathrm{i}g$ a $h + \mathrm{i}f$ jsou holomorfní v G.

Reálná funkce g z předchozího tvrzení se nazývá *sdružená harmonická funkce* k f.

Existuje ještě jiný pohled na Cauchy–Riemannovy podmínky, který spojuje teorii holomorfních funkcí s vektorovými poly a tedy s možností využít např. Greenovu větu.

Dvojrozměrné vektorové pole je dvojice dvou reálných funkcí dvou proměnných, a tedy komplexní funkce komplexní proměnné. Lze definovat i komplexní vektorové pole na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ jako dvojici (f, g) dvou komplexních funkcí komplexní proměnné, které mají spojité parciální derivace 1.řádu na G.

Komplexní vektorové pole (f, g) se v souladu s reálným případem nazývá potenciální na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže existuje funkce F taková, že $F_x = f$, $F_y = g$ (tato funkce F se pak nazývá potenciál pole (f, g)).

Zřejmě součty komplexních potenciálních polí a jejich násobky čísly (i komplexními) jsou opět potenciální.

S pomocí komplexního vektorového pole máme jiný pohled na Cauchyovy–Riemannovy podmínky. Důkaz následujícího tvrzení je jednoduchý a je přenechán čtenáři v *Otázkách*.

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro komplexní funkci $f = (f_1, f_2)$ mající spojité parciální derivace 1.řádu na otevřené množině G:

1. f je holomorfní na G;
2. pole $(f_1, -f_2)$ a (f_2, f_1) jsou potenciální na G;
3. pole $(f, \mathrm{i}f)$ je potenciální na G.

Předchozí charakterizace bude využita v integraci funkcí.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3 4 5 6

STANDARDY z kapitoly

DERIVACE FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

DERIVACE

DEFINICE. Nechť je funkce f definována v okolí bodu w. Jestliže má smysl limita

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,,$$

nazývá se její hodnota derivací funkce f v bodě w a značí se $f'(w)$.

CAUCHYOVY–RIEMANNOVY PODMÍNKY

Je samozřejmě možné používat i parciální derivace funkce $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$ po složkách, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f_2}{\partial y}\,,$$

VĚTA. Nechť je funkce $f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ definována v okolí bodu $w = (u,v)$. Jestliže $f'(w)$ existuje a je vlastní, pak jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w parciální derivace prvního řádu,
2. v bodě w platí
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\,.$$

Potom platí rovnosti $f'(w) = \frac{\partial f}{\partial x}(w) = -\mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}(w)$.

Uvedené rovnosti pro parciální derivace se nazývají Cauchyovy–Riemannovy podmínky nebo rovnosti.

VĚTA. Nechť je funkce $f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ definována v okolí bodu $w = (u,v)$ a jsou splněny podmínky

1. f_1 a f_2 mají v bodě w spojité vlastní parciální derivace prvního řádu,
2. v bodě w platí
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\,.$$

Potom existuje vlastní derivace $f'(w)$.

HOLOMORFNÍ FUNKCE

DEFINICE. Funkce je holomorfní v bodě, jestliže má derivaci v nějakém okolí tohoto bodu.

Funkce je holomorfní na množině, jestliže je holomorfní v každém bodě této množiny.

Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá celistvá.

Pak přímo z Cauchyových–Riemannových podmínek vyplývá derivováním následující důsledek (reálná funkce dvou proměnných se nazývá harmonická na otevřené množině G, jestliže tam má spojité parciální derivace 2.řádu a splňuje Laplaceovu rovnici $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, zkráceně $\Delta f = 0$):

DŮSLEDEK. Nechť funkce $f = (f_1, f_2)$ je holomorfní na otevřené množině G. Potom jsou funkce f_1 a f_2 harmonické v G.

DŮSLEDEK. Nechť f je harmonická reálná funkce dvou proměnných na otevřené množině G. Pak existují až na konstanty jediné reálné funkce g, h dvou proměnných tak, že funkce $f + \mathrm{i}g$ a $h + \mathrm{i}f$ jsou holomorfní v G.

Reálná funkce g z předchozího tvrzení se nazývá sdružená harmonická funkce k f.

Dvojrozměrné vektorové pole je dvojice dvou reálných funkcí dvou proměnných, a tedy komplexní funkce komplexní proměnné. Lze definovat i komplexní vektorové pole na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ jako dvojici (f, g) dvou komplexních funkcí komplexní proměnné, které mají spojité parciální derivace 1.řádu na G.

Komplexní vektorové pole (f, g) se v souladu s reálným případem nazývá potenciální na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže existuje funkce F taková, že $F_x = f$, $F_y = g$ (tato funkce F se pak nazývá potenciál pole (f, g)).

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro komplexní funkci $f = (f_1, f_2)$ mající spojité parciální derivace 1.řádu na otevřené množině G:

1. f je holomorfní na G;
2. pole $(f_1, -f_2)$ a (f_2, f_1) jsou potenciální na G;
3. pole $(f, \mathrm{i}f)$ je potenciální na G.

Pomocí Cauchyových–Riemannových podmínek zkoumejte holomorfnost funkcí.

K zadané harmonické funkci najděte harmonicky sdruženou.

Příklad. Jestliže funkce f definovaná v okolí bodu $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ má v bodě z_0 nenulovou derivaci $f'(z_0)$, pak se křivka procházející bodem z_0 ve směru α zobrazí pomocí f do křivky procházející bodem $f(z_0)$ ve směru $f'(z_0)\alpha$. Tedy se zachovávají úhly křivek procházející bodem z_0. Dokažte.

Řešení. Spočteme tečný vektor křivky $f(\varphi(t))$ pro vhodnou křivku φ. Uvědomíme si nakonec, že násobení $f'(z_0)\alpha$ násobí úhel α komplexním číslem $f'(z_0) = r(\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z))$, kde r způsobí protažení vektoru a ten je následně otočen o příslušný úhel.