ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

Všechny základní reálné funkce reálné proměnné, s kterými jste se seznámili na začátku tohoto kurzu, lze rozšířit i na komplexní funkce komplexní proměnné.

ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

Všechny základní reálné funkce reálné proměnné, s kterými jste se seznámili na začátku tohoto kurzu, lze rozšířit i na komplexní funkce komplexní proměnné.

U některých je rozšíření jednoduché, u některých je složitější, např. u obecné mocniny nebo u logaritmu.

ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

Všechny základní reálné funkce reálné proměnné, s kterými jste se seznámili na začátku tohoto kurzu, lze rozšířit i na komplexní funkce komplexní proměnné.

U některých je rozšíření jednoduché, u některých je složitější, např. u obecné mocniny nebo u logaritmu.

Slovo „rozšíření" znamená, že taková funkce $f(z)$ musí být pro komplexní z definována tak, aby pro reálná čísla z souhlasila s příslušnou funkcí reálné proměnné.

SPECIÁLNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

SPECIÁLNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

V předchozích dvou kapitolách byly zavedeny některé speciální funkce:

SPECIÁLNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

V předchozích dvou kapitolách byly zavedeny některé speciální funkce:

- $\Re(z)$ a $\Im(z)$ přiřazuje číslu z jeho reálnou, resp. imaginární, složku. Tyto spojité reálné funkce jsou definovány na $\mathbb{C}$ a nejsou holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je $\mathbb{R}$.

SPECIÁLNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

V předchozích dvou kapitolách byly zavedeny některé speciální funkce:

- $\Re(z)$ a $\Im(z)$ přiřazuje číslu z jeho reálnou, resp. imaginární, složku. Tyto spojité reálné funkce jsou definovány na $\mathbb{C}$ a nejsou holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je $\mathbb{R}$.
- $\overline{z}$ přiřazuje číslu z jeho komplexně sdružené číslo. Tato funkce je spojitá, prostá, definovaná na $\mathbb{C}$ a není holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je $\mathbb{C}$, je sama k sobě inverzní.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

SPECIÁLNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

V předchozích dvou kapitolách byly zavedeny některé speciální funkce:

- $\Re(z)$ a $\Im(z)$ přiřazuje číslu z jeho reálnou, resp. imaginární, složku. Tyto spojité reálné funkce jsou definovány na $\mathbb{C}$ a nejsou holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je $\mathbb{R}$.
- $\overline{z}$ přiřazuje číslu z jeho komplexně sdružené číslo. Tato funkce je spojitá, prostá, definovaná na $\mathbb{C}$ a není holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je $\mathbb{C}$, je sama k sobě inverzní.
- Absolutní hodnota $|z|$ je reálná funkce na $\mathbb{C}$, která není holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je interval $[0, \infty)$.

SPECIÁLNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

V předchozích dvou kapitolách byly zavedeny některé speciální funkce:

- $\Re(z)$ a $\Im(z)$ přiřazuje číslu z jeho reálnou, resp. imaginární, složku. Tyto spojité reálné funkce jsou definovány na $\mathbb{C}$ a nejsou holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je $\mathbb{R}$.
- $\overline{z}$ přiřazuje číslu z jeho komplexně sdružené číslo. Tato funkce je spojitá, prostá, definovaná na $\mathbb{C}$ a není holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je $\mathbb{C}$, je sama k sobě inverzní.
- Absolutní hodnota $|z|$ je reálná funkce na $\mathbb{C}$, která není holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je interval $[0, \infty)$.
- Argument $\arg z$ čísla z je reálná mnohoznačná funkce s definičním oborem $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a s oborem hodnot $\mathbb{R}$.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce argument lze znázornit jako nekonečné schodiště.

Funkce argument lze znázornit jako nekonečné schodiště.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

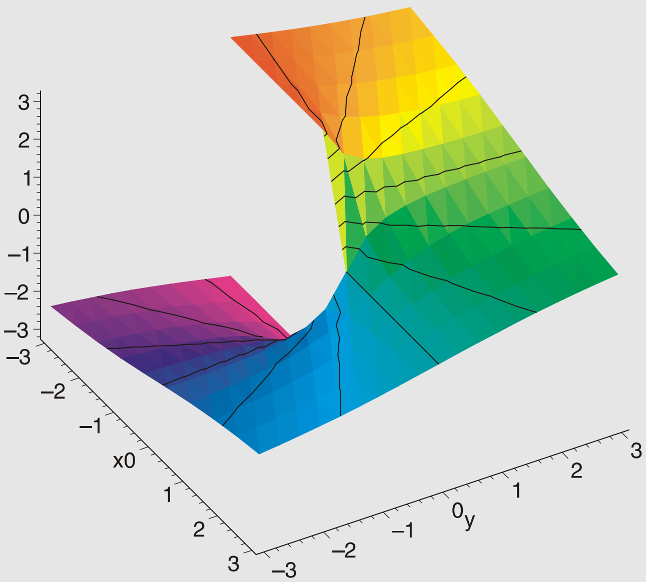
Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky 2π (přesněji interval typu $(a, a{+}2\pi]$ nebo $[a, a{+}2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky 2π (přesněji interval typu $(a, a+2\pi]$ nebo $[a, a+2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

Jestliže se za obor hodnot zvolí interval $(-\pi, \pi]$, značí se tato funkce $\mathrm{Arg}\, z$ a nazývá se hlavní větev argumentu. Funkce $\mathrm{Arg}\, z$ je spojitá všude kromě záporné osy x a není holomorfní v žádném bodě.

Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky 2π (přesněji interval typu $(a, a+2\pi]$ nebo $[a, a+2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

Jestliže se za obor hodnot zvolí interval $(-\pi, \pi]$, značí se tato funkce $\mathrm{Arg}\, z$ a nazývá se hlavní větev argumentu. Funkce $\mathrm{Arg}\, z$ je spojitá všude kromě záporné osy x a není holomorfní v žádném bodě.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Polynom je funkce tvaru $c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, kde $c_i \in \mathbb{C}$; racionální funkce je podíl dvou polynomů. Každý polynom je celistvá funkce. Racionální funkce je holomorfní funkce na celém svém definičním oboru, tj. všude na $\mathbb{C}$ kromě konečně mnoha bodů (kořenů jmenovatele funkce).

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Exponenciální funkce e^z se definuje rovností $e^z = e^{\Re(z)}(\cos\Im(z) + \mathbf{i}\sin\Im(z))$.

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Exponenciální funkce e^z se definuje rovností $e^z = e^{\Re(z)}(\cos \Im(z) + \mathbf{i} \sin \Im(z))$.

Pro reálné číslo z je definice v souladu s reálnou funkcí e^z.

Vlastnosti exponenciální funkce:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. Funkce je celistvá, $(e^z)' = e^z$.
3. Funkce je periodická s periodou $2\pi\mathrm{i}$.
4. Platí vztahy
$$\Re(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)} \cos(\Im(z)) \,, \Im(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)} \sin(\Im(z)) \,,$$
$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re(z)} \,, \arg(\mathrm{e}^z) = \Im(z) + 2k\pi \,, \mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z} \,.$$
5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w \,, \mathrm{e}^{z-w} = \frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^w} \,.$$
6. Funkce e^z je prostá na každém pásu šířky 2π rovnoběžném s osou x: buď $\Im(z) \in (a, a+2\pi]$ nebo $\Im(z) \in [a, a+2\pi)$.

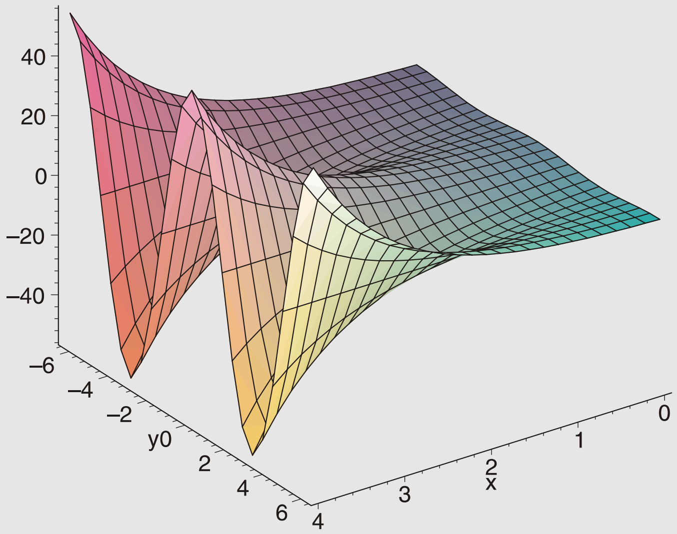
Vlastnosti exponenciální funkce:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. Funkce je celistvá, $(e^z)' = e^z$.
3. Funkce je periodická s periodou $2\pi\mathrm{i}$.
4. Platí vztahy
$$\Re(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)} \cos(\Im(z)) \, , \Im(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)} \sin(\Im(z)) \, ,$$
$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re(z)} \, , \arg(\mathrm{e}^z) = \Im(z) + 2k\pi \, , \mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z} \, .$$
5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w \, , \mathrm{e}^{z-w} = \frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^w} \, .$$
6. Funkce e^z je prostá na každém pásu šířky 2π rovnoběžném s osou x: buď $\Im(z) \in (a, a+2\pi]$ nebo $\Im(z) \in [a, a+2\pi)$.

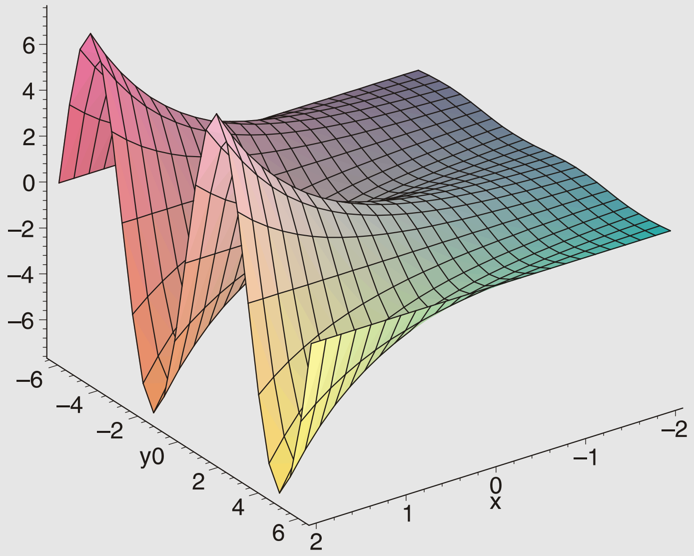
Důkazy předchozích vlastností jsou jednoduché a jsou přenechány čtenářům v *Otázkách*.

Grafy reálné a imaginární části exponenciály jsou si navzájem podobné jako vejce vejci. Následují oba dva. Poznáte, který je který?

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



40
20
0
–20
–40
–6
–4
–2
y0
2
4
6
4
3
2
x
1
0

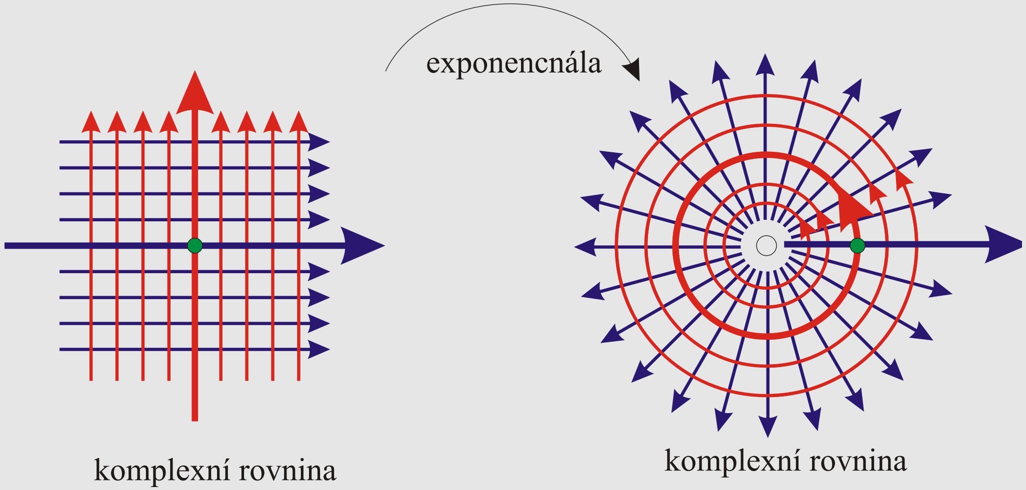


LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přímky rovnoběžné s reálnou osou exponenciála zobrazí jako polopřímky vycházející z počátku. Přímky rovnoběžné s imaginární osou exponenciála zobrazí jako kružnice se středem v počátku.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přímky rovnoběžné s reálnou osou exponenciála zobrazí jako polopřímky vycházející z počátku. Přímky rovnoběžné s imaginární osou exponenciála zobrazí jako kružnice se středem v počátku.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

Když vypočtete ze vzorců definujících e^z a e^{-z} funkce $\sin y, \cos y$ (pro $x = 0$), dostanete rovnosti $\sin y = (e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y})/(2\mathrm{i}), \cos y = (e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y})/2.$ ¨

TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

Když vypočtete ze vzorců definujících e^z a e^{-z} funkce $\sin y, \cos y$ (pro $x = 0$), dostanete rovnosti $\sin y = (e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y})/(2\mathrm{i}), \cos y = (e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y})/2$. ¨

Následující definice je tedy rozšířením těchto vztahů na komplexní čísla:

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

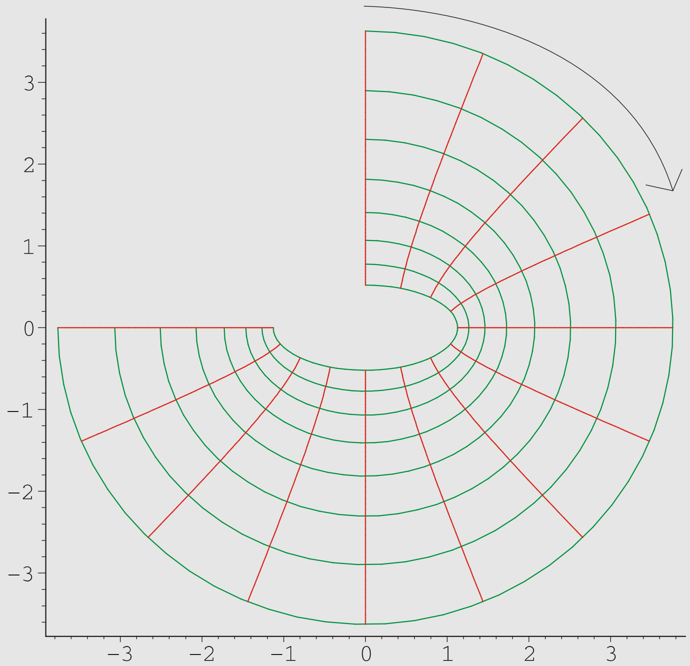
TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

Když vypočtete ze vzorců definujících e^z a e^{-z} funkce $\sin y, \cos y$ (pro $x = 0$), dostanete rovnosti $\sin y = (e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y})/(2\mathrm{i}), \cos y = (e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y})/2$. ¨

Následující definice je tedy rozšířením těchto vztahů na komplexní čísla:

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

Zobrazíme pomocí funkce sinus obdélník $[0, 3\pi/2] \times [1/10, 1]$ v rovině a dostaneme.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vidíme, že výsledný obrazec sleduje chování reálné funkce sinus od 0 do $3\pi/2$. To znamená napřed jde od 0 k 1 a pak k -1. Obrazec obtáčí reálný interval $[-1, 1]$ "zprava", a nedotočí celou otáčku, proč?

Vidíme, že výsledný obrazec sleduje chování reálné funkce sinus od 0 do $3\pi/2$. To znamená napřed jde od 0 k 1 a pak k -1. Obrazec obtáčí reálný interval $[-1, 1]$ "zprava", a nedotočí celou otáčku, proč?

Protože jsme mu to nedovolili.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A co náš milý sinus ještě umí?

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A co náš milý sinus ještě umí?

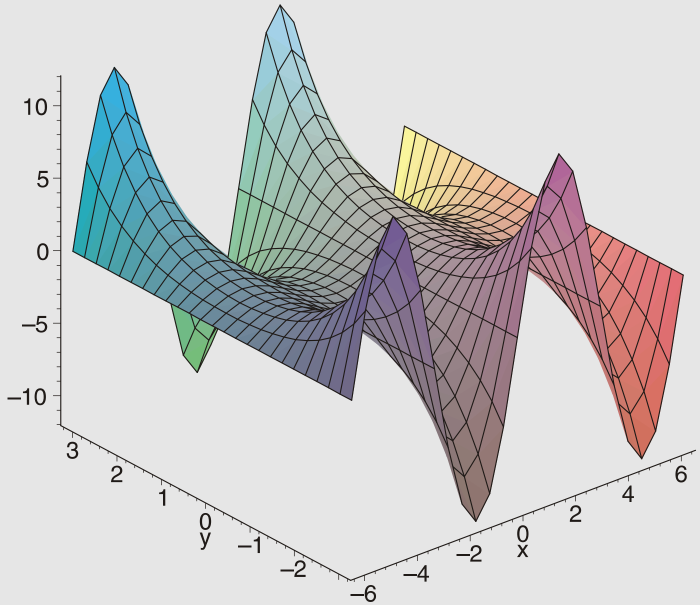
SK8.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podíváme se na jeho reálné vylomeniny.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

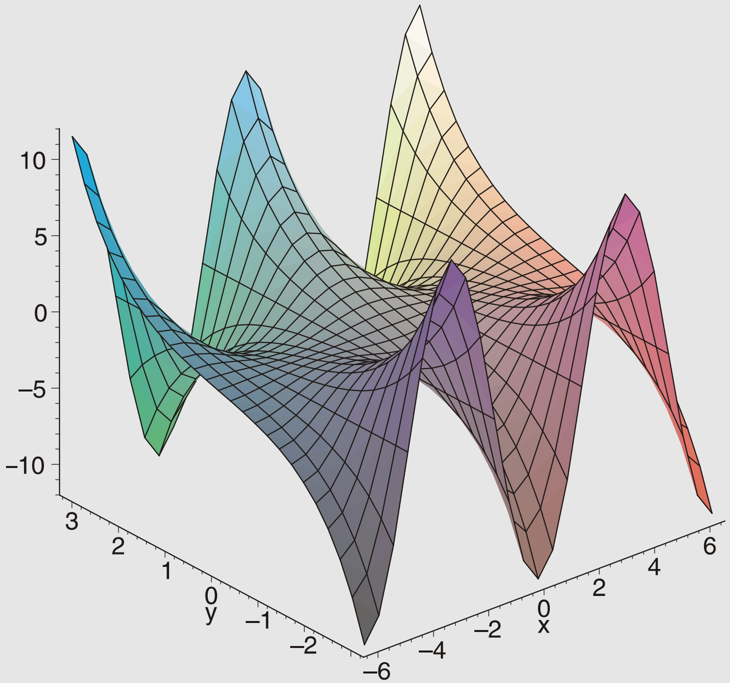
Podíváme se na jeho reálné vylomeniny.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podíváme se na jeho imaginární vylomeniny. To když simuloval.

Podíváme se na jeho imaginární vylomeniny. To když simuloval.



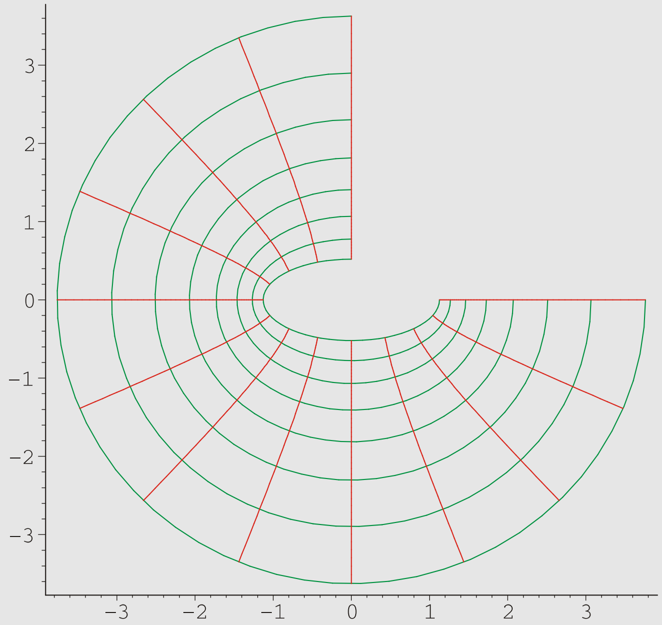
LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zobrazíme pomocí funkce kosinus obdélník $[0, 3\pi/2] \times [1/10, 1]$ v rovině a dostaneme.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zobrazíme pomocí funkce kosinus obdélník $[0, 3\pi/2] \times [1/10, 1]$ v rovině a dostaneme.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vidíme, že výsledný obrazec sleduje chování reálné funkce kosinus od 0 do $3\pi/2$. To znamená napřed jde od 1 k -1 a pak k 0. Obrazec obtáčí reálný interval $[-1, 1]$ "zprava", a nedotočí celou otáčku, proč?

Protože jsme mu to zase nedovolili.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A co naše milá funkce kosinus ještě umí?

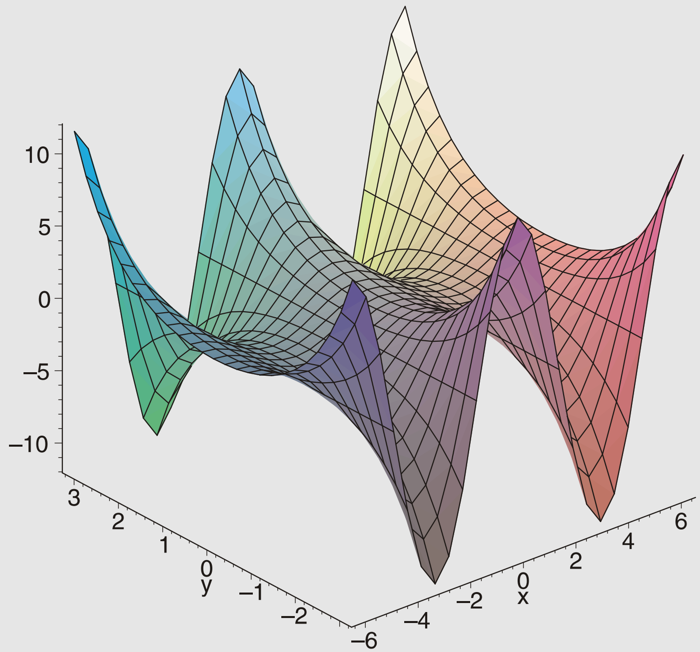
LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A co naše milá funkce kosinus ještě umí?

Všecko už umí.

Podíváme se na její reálné vylomeniny.

Podíváme se na její reálné vylomeniny.



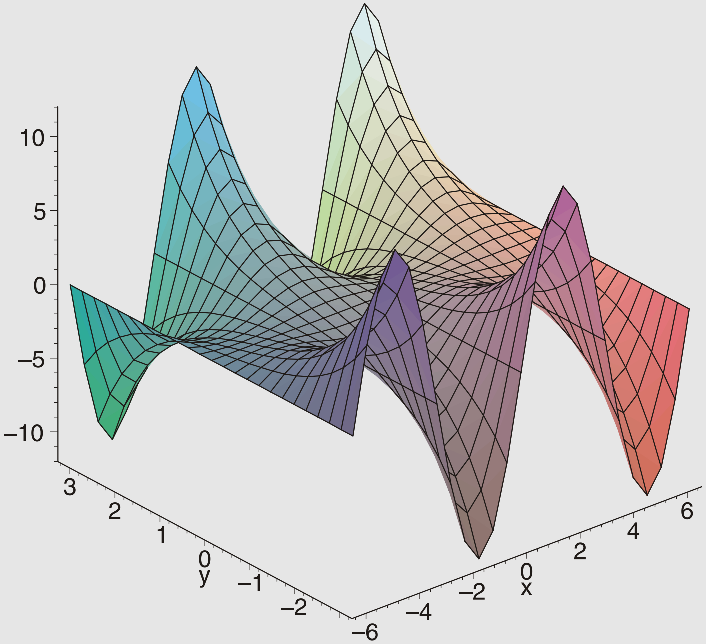
LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

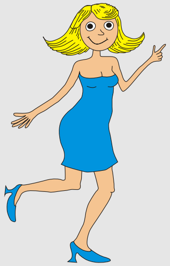
Podíváme se na její imaginární vylomeniny.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

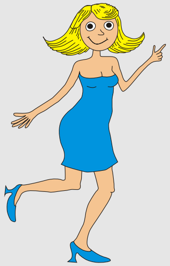
Podíváme se na její imaginární vylomeniny.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Vidíte u sinu i kosinu tu reálnou osu. To je paráda, co?



Vidíte u sinu i kosinu tu reálnou osu. To je paráda, co?

BTW, poznáte na první pohled reálnou část od imaginární?

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud budeme rozepisovat do složek, dostaneme při troše snahy toto:

Pokud budeme rozepisovat do složek, dostaneme při troše snahy toto:

$$\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+\cos x\sinh y$$

a

$$\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-\sin x\sinh y$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $y = y_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s reálnou osou.

$$\sin(x + iy_0) = \sin x \cosh y_0 + \cos x \sinh y_0$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $y = y_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s reálnou osou.

$$\sin(x + iy_0) = \sin x \cosh y_0 + \cos x \sinh y_0$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici elipsy

$$\left(\frac{\xi}{\cosh y_0}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sinh y_0}\right)^2 = 1$$

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0 + iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0 + iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici hyperboly

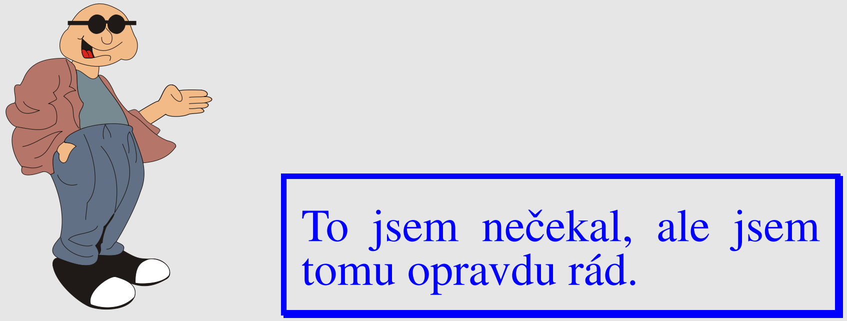
$$\left(\frac{\xi}{\sin x_0}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\cos x_0}\right)^2 = 1$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0 + iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici hyperboly

$$\left(\frac{\xi}{\sin x_0}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\cos x_0}\right)^2 = 1$$



Dále lze definovat (všude, kde to má smysl):

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}\,.$$

Dále lze definovat (všude, kde to má smysl):

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}\,.$$

V následujících vlastnostech jsou pro jednodušší vyjádření použity reálné hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,.$$

Vlastnosti:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C}$.
2. Funkce $\sin$, $\cos$ jsou celistvé, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
3. Funkce $\sin$, $\cos$ jsou periodické s periodou 2π, $\sin$ je funkce lichá, $\cos$ je funkce sudá.
4. Platí vztahy

$$\Re(\sin z) = \sin(\Re(z))\cosh(\Im(z))\,, \Re(\cos z) = \cos(\Re(z))\cosh(\Im(z))\,,$$

$$\Im(\sin z) = \cos(\Re(z))\sinh(\Im(z))\,, \Im(\cos z) = \sin(\Re(z))\sinh(\Im(z))\,,$$

$$\sin\overline{z} = \overline{\sin z}\,, \cos\overline{z} = \overline{\cos z}\,,$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z))\,, |\cos z|^2 = \cos^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z))\,.$$

5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w\,, \cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w\,, \sin^2 z + \cos^2 z = 1\,.$$

6. Funkce $\sin z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2]$ nebo $\Re(z) \in [(2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$.
7. Funkce $\cos z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in (k\pi, (k+1)\pi]$ nebo $\Re(z) \in [k\pi, (k+1)\pi)$.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LOGARITMICKÁ FUNKCE

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Logaritmus v reálném oboru se definuje jako inverzní funkce exponenciální funkce.

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Logaritmus v reálném oboru se definuje jako inverzní funkce exponenciální funkce.

Ta je prostá, což však neplatí v komplexním oboru.

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Logaritmus v reálném oboru se definuje jako inverzní funkce exponenciální funkce.

Ta je prostá, což však neplatí v komplexním oboru.

Když se zúží definiční obor funkce e^z na pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$, bude funkce prostá a má tam inverzní funkci:

Funkce Log je inverzní funkcí k e^z pro $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Logaritmus v reálném oboru se definuje jako inverzní funkce exponenciální funkce.

Ta je prostá, což však neplatí v komplexním oboru.

Když se zúží definiční obor funkce e^z na pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$, bude funkce prostá a má tam inverzní funkci:

Funkce Log je inverzní funkcí k e^z pro $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

Ano. Jinak to nemám ráda.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

BTW, jde to i jinak.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

To znamená, že je-li $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$ a $\mathrm{Log}(w) = z$, pak platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(w)} = w\,, \quad \mathrm{Log}(\mathrm{e}^{z}) = z\,.$$

To znamená, že je-li $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$ a $\mathrm{Log}(w) = z$, pak platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(w)} = w\,, \quad \mathrm{Log}(\mathrm{e}^z) = z\,.$$

Jestliže $\mathrm{Log}(w) = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$, plynou z první rovnosti vztahy $u = \mathrm{e}^x \cos y$, $v = \mathrm{e}^x \sin y$ a tedy $x = \log|w|$, $y = \mathrm{Arg}\, w$. Tím se dostává popis hodnot funkce Log, který se dá také vzít za definici Log

$$\mathrm{Log}(w) = \log|w| + \mathbf{i}\,\mathrm{Arg}(w)\,.$$

To znamená, že je-li $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$ a $\mathrm{Log}(w) = z$, pak platí

$$e^{\mathrm{Log}(w)} = w\,, \quad \mathrm{Log}(e^z) = z\,.$$

Jestliže $\mathrm{Log}(w) = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$, plynou z první rovnosti vztahy $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ a tedy $x = \log|w|$, $y = \mathrm{Arg}\, w$. Tím se dostává popis hodnot funkce Log, který se dá také vzít za definici Log

$$\mathrm{Log}(w) = \log|w| + \mathbf{i}\,\mathrm{Arg}(w)\,.$$

Je to důležitější naž váš PIN.
Pamatujte si to.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vlastnosti logaritmu:

1. Definiční obor je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a obor hodnot je pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.
2. Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\mathrm{Log}'(z) = 1/z$.
3. Platí vztahy
$$\Re(\mathrm{Log}(z)) = \log|z|\,, \Im(\mathrm{Log}(z)) = \mathrm{Arg}(z)\,, \mathrm{Log}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{Log}(z)}\,.$$
4. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)\,, \mathrm{Log}(z/w) = \mathrm{Log}(z) - \mathrm{Log}(w)\,.$$
5. Funkce Log je prostá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Já jsem v podstatě také prostá.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud se nezúží definiční obor, funkce e^z není prostá a řešení rovnice $\mathrm{e}^z = w$, pro dané w, je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi\mathrm{i}$).

Pokud se nezúží definiční obor, funkce e^z není prostá a řešení rovnice $\mathrm{e}^z = w$, pro dané w, je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi\mathrm{i}$).

Množina všech těchto řešení se může označit jako $\log w$ a dostane se mnohoznačná funkce. Funkce Log se pak nazývá hlavní větev logaritmu.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud se nezúží definiční obor, funkce e^z není prostá a řešení rovnice $\mathrm{e}^z = w$, pro dané w, je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi\mathrm{i}$).

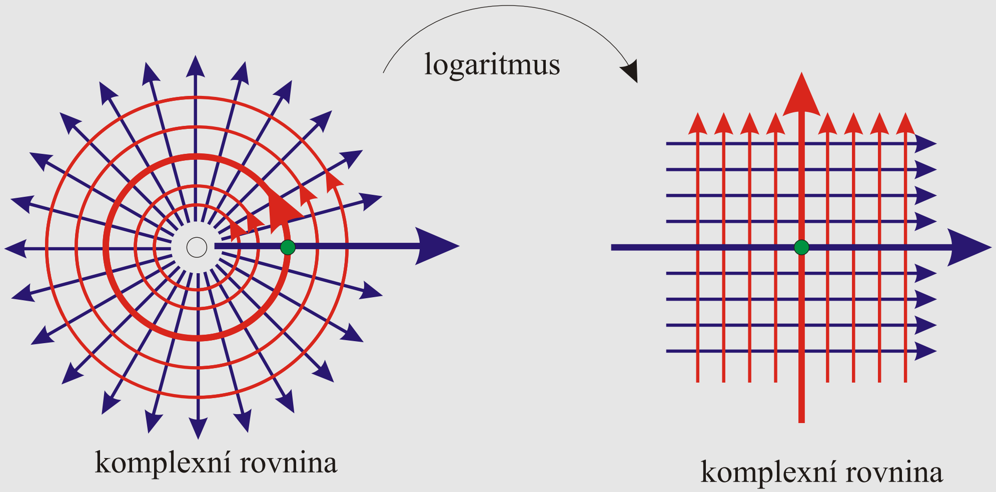
Množina všech těchto řešení se může označit jako $\log w$ a dostane se mnohoznačná funkce. Funkce Log se pak nazývá hlavní větev logaritmu.

Z této definice $\log$ vyplývá i její popis

$$\log(w) = \log|w| + \mathbf{i}\arg(w)\,,$$

z kterého se snadno odvodí další vlastnosti (viz *Otázky*).

Logaritmus převádí polopřímky vycházející z počátku ...



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Už tomu asi rozumí, tak ji to nebaví. Naštěstí ještě něčemu nerozumí.

Imaginární část logaritmu je spirálovité schodiště, protože exponenciála je 2πi periodická.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

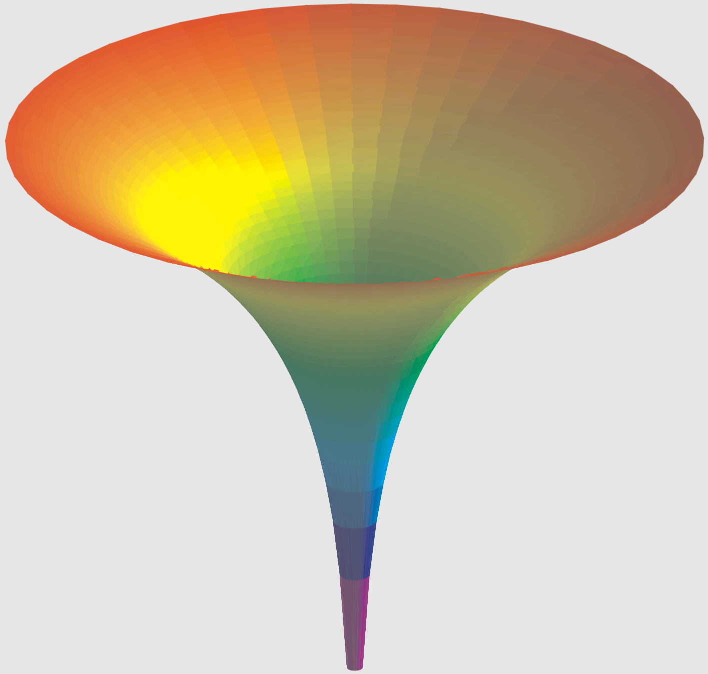
Imaginární část logaritmu je spirálovité schodiště, protože exponenciála je 2πi periodická.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Reálná část je trychtýř.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Reálná část je trychtýř.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 Cvičení 3

OBECNÁ MOCNINA

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z} .$$

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z} .$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z}\,.$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z} .$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

Pokud je potřeba mít jen jednu hodnotu, je třeba se omezit na nějakou jednoznačnou větev logaritmu, např. na Log. Nicméně, bývá výhodné pracovat se všemi hodnotami mocniny, např. při řešení rovnic (jinak se může nějaké řešení „ztratit").

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z}\,.$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

Pokud je potřeba mít jen jednu hodnotu, je třeba se omezit na nějakou jednoznačnou větev logaritmu, např. na Log. Nicméně, bývá výhodné pracovat se všemi hodnotami mocniny, např. při řešení rovnic (jinak se může nějaké řešení „ztratit").

Jednotlivé hodnoty $\log z$ se liší o $2k\pi\mathrm{i}$, což je perioda exponenciální funkce. Pokud je tedy číslo $w = n$ celé reálné, má z^n jedinou hodnotu, která odpovídá součinu n čísel z nebo $1/z$, nebo se rovná 1 pro $n = 0$.

Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Potom se exponent v definici z^w rovná $(\log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\mathrm{i})/n$ a existuje právě n hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Potom se exponent v definici z^w rovná $(\log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\mathrm{i})/n$ a existuje právě n hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

⬇

To znamená, že v tomto případě má mocnina $z^{1/n}$ přesně n hodnot.

⬇

Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Potom se exponent v definici z^w rovná $(\log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\mathrm{i})/n$ a existuje právě n hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

To znamená, že v tomto případě má mocnina $z^{1/n}$ přesně n hodnot.

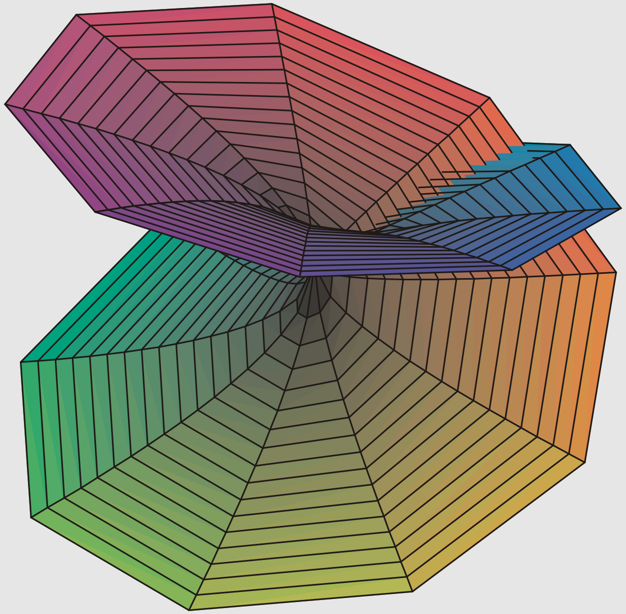
Tato n-značná funkce se nazývá n-tá odmocnina a značí se jako obvykle $\sqrt[n]{z}$. Hlavní větev odmocniny se získá volbou $k = 0$.

Předchozí úvahy lze přenést na případ, kdy w je racionální číslo a mocnina z^w má pak konečně mnoho hodnot. Jakmile je w iracionální, má již mocnina z^w spočetně mnoho hodnot. Pro w imaginární je počet hodnot vždy nekonečný.

Nejjednodušší je druhá odmocnina.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejjednodušší je druhá odmocnina.

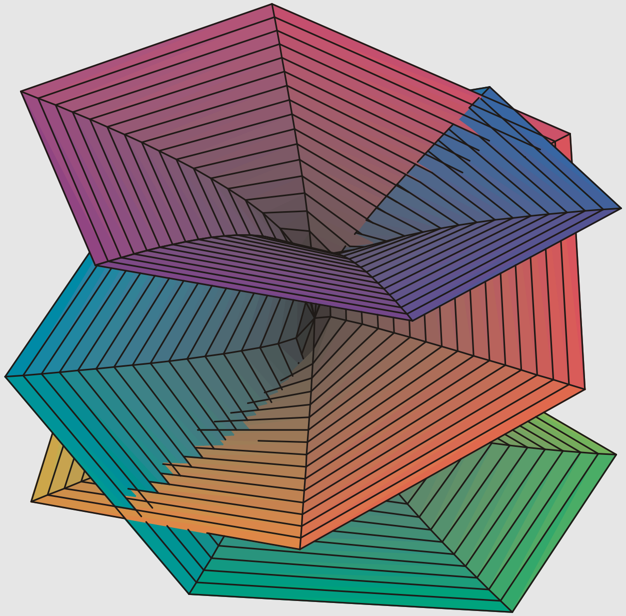


LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Komplikovanější je třetí od-
mocnina.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Komplikovanější je třetí odmocnina.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Reálné i imaginární složky odmocnin vypadají podobně. Jsou to takové propletené listy.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Reálné i imaginární složky odmocnin vypadají podobně. Jsou to takové propletené listy.

Já tomu říkám dvojplošník či trojplošník.

Z vlastností exponenciální funkce a logaritmu lze snadno odvodit následující vztahy mocniny s algebraickými operacemi (rovnost tu znamená rovnost mezi množinami hodnot):

$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}\,, \quad \left(z^w\right)^c = z^{wc}\,, \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w\,.$$

Následující vlastnosti platí pro jednoznačné větve mocniny, např. pro hlavní větev mocniny (v definici mocniny se vezme Log). Nejdříve vlastnosti funkce z^w proměnné z s daným exponentem w:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ten lze pro některá w rozšířit i na 0). Pro $w \neq 0$ je obor hodnot funkce celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(z^w)' = wz^{w-1}$.

Následující vlastnosti platí pro jednoznačné větve mocniny, např. pro hlavní větev mocniny (v definici mocniny se vezme Log). Nejdříve vlastnosti funkce z^w proměnné z s daným exponentem w:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ten lze pro některá w rozšířit i na 0). Pro $w \neq 0$ je obor hodnot funkce celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(z^w)' = wz^{w-1}$.

Nyní vlastnosti funkce w^z s proměnnou z a daným číslem $w \neq 0$, opět např. pro hlavní větev mocniny:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C}$ a její obor hodnot je celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(w^z)' = w^z \operatorname{Log} w$.

Když dělám mocninnou pizzu, udělám kruhové těsto, proříznu podél jednoho poloměru a roztahuju to tak, až mám nad sebou několik vrstev těsta.

Když dělám mocninnou pizzu, udělám kruhové těsto, proříznu podél jednoho poloměru a roztahuju to tak, až mám nad sebou několik vrstev těsta.

BTW, nerada dělá iracionální mocniny, je na to už moc pohodlná.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZNÁMKY

Poznámky 1 :

Rovnosti ukazující vlastnosti funkcí vzhledem k algebraickým operacím lze většinou dokázat snadno z definic funkcí.

Poznámky 1 :

Rovnosti ukazující vlastnosti funkcí vzhledem k algebraickým operacím lze většinou dokázat snadno z definic funkcí.

Nicméně, později bude ukázáno, že pro všechny funkce definované v této kapitole vyplývají uvedené rovnosti z rovností v reálném případě, aniž by se musely znovu dokazovat – viz kapitola o řadách.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Lineárně lomená funkce. Mezi významné funkce patří tzv. lineárně lomená funkce, což je racionální funkce tvaru $(az+b)/(cz+d)$, koeficienty a,b,c,d jsou komplexní čísla. Pokud je $c \neq 0$, je definována všude až na jeden bod, který se zobrazuje do ∞, je holomorfní, a prostá nebo konstantní.

Lineárně lomená funkce. Mezi významné funkce patří tzv. lineárně lomená funkce, což je racionální funkce tvaru $(az + b)/(cz + d)$, koeficienty a, b, c, d jsou komplexní čísla. Pokud je $c \neq 0$, je definována všude až na jeden bod, který se zobrazuje do ∞, je holomorfní, a prostá nebo konstantní.

Speciálním případem je lineární funkce $az + b$, která zachovává přímky, kružnice a další základní geometrické objekty (lineární funkce se dá napsat jako složení podobnosti, otočení a posunutí).

Lineárně lomená funkce. Mezi významné funkce patří tzv. lineárně lomená funkce, což je racionální funkce tvaru $(az+b)/(cz+d)$, koeficienty a, b, c, d jsou komplexní čísla. Pokud je $c \neq 0$, je definována všude až na jeden bod, který se zobrazuje do ∞, je holomorfní, a prostá nebo konstantní.

Speciálním případem je lineární funkce $az+b$, která zachovává přímky, kružnice a další základní geometrické objekty (lineární funkce se dá napsat jako složení podobnosti, otočení a posunutí).

Obecná lineárně lomená funkce převádí přímky na přímky nebo kružnice a kružnice na kružnice nebo přímky. Každé takovéto zobrazení lze rozložit jako složení posunutí, inverzi $(1/z)$ a lineární zobrazení.

Exponenciální funkce. Tato funkce zobrazuje přímky rovnoběžné s osou x na polopřímky vycházející z počátku, přímky rovnoběžné s osou y na kružnice se středem v počátku.

Exponenciální funkce. Tato funkce zobrazuje přímky rovnoběžné s osou x na polopřímky vycházející z počátku, přímky rovnoběžné s osou y na kružnice se středem v počátku.

Je dobré si pamatovat, že pro reálná z je $|e^{\mathrm{i}z}| = 1$ a tato čísla vyplní jednotkovou kružnici, takže každé komplexní číslo z lze psát ve tvaru $re^{\mathrm{i}w}$, kde w je argument čísla z a $r = |z|$.

Exponenciální funkce. Tato funkce zobrazuje přímky rovnoběžné s osou x na polopřímky vycházející z počátku, přímky rovnoběžné s osou y na kružnice se středem v počátku.

⬇

Je dobré si pamatovat, že pro reálná z je $|e^{\mathrm{i}z}| = 1$ a tato čísla vyplní jednotkovou kružnici, takže každé komplexní číslo z lze psát ve tvaru $re^{\mathrm{i}w}$, kde w je argument čísla z a $r = |z|$.

⬇

Pro dané $r \in (0, +\infty)$ a reálnou proměnnou t je vztah $z = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ rovnicí kružnice se středem z_0 a poloměrem r.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2 :

Uvědomte si velký rozdíl oproti reálnému oboru, kde $\sin$ a $\cos$ jsou omezené funkce. V komplexním oboru nabývají všech hodnot.

Poznámky 2 :

Uvědomte si velký rozdíl oproti reálnému oboru, kde $\sin$ a $\cos$ jsou omezené funkce. V komplexním oboru nabývají všech hodnot.

Funkce $\sin$ zobrazuje imaginární osu na sebe. V pásu šířky π rovnoběžném s osou y se úsečky rovnoběžné s osou x zobrazují na poloviny elips, přímky rovnoběžné s osou y se zobrazují na větve hyperbol.

Poznámky 2 :

Uvědomte si velký rozdíl oproti reálnému oboru, kde $\sin$ a $\cos$ jsou omezené funkce. V komplexním oboru nabývají všech hodnot.

$\Downarrow$

Funkce $\sin$ zobrazuje imaginární osu na sebe. V pásu šířky π rovnoběžném s osou y se úsečky rovnoběžné s osou x zobrazují na poloviny elips, přímky rovnoběžné s osou y se zobrazují na větve hyperbol.

$\Downarrow$

Uvedené definice hyperbolických funkcí lze automaticky přenést do komplexního oboru.

Konec poznámek 2.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Protože Log je inverzní k exponenciální funkci, zobrazuje polopřímky vycházející z počátku na přímky rovnoběžné s osou x a kružnice se středem v počátku na úsečky rovnoběžné s osou y.

Poznámky 3 :

Protože Log je inverzní k exponenciální funkci, zobrazuje polopřímky vycházející z počátku na přímky rovnoběžné s osou x a kružnice se středem v počátku na úsečky rovnoběžné s osou y.

Uvědomte si, že nyní je definován i logaritmus záporných reálných čísel, je to však komplexní číslo (imaginární).

Poznámky 3 :

Protože Log je inverzní k exponenciální funkci, zobrazuje polopřímky vycházející z počátku na přímky rovnoběžné s osou x a kružnice se středem v počátku na úsečky rovnoběžné s osou y.

⬇

Uvědomte si, že nyní je definován i logaritmus záporných reálných čísel, je to však komplexní číslo (imaginární).

⬇

Navíc, hlavní větev logaritmu není v záporných číslech spojitá. Lze vzít jinou polopřímku vycházející z počátku a větev logaritmu, která bude spojitá všude kromě oné polopřímky.

⬇

Poznámky 3 :

Protože Log je inverzní k exponenciální funkci, zobrazuje polopřímky vycházející z počátku na přímky rovnoběžné s osou x a kružnice se středem v počátku na úsečky rovnoběžné s osou y.

⬇

Uvědomte si, že nyní je definován i logaritmus záporných reálných čísel, je to však komplexní číslo (imaginární).

⬇

Navíc, hlavní větev logaritmu není v záporných číslech spojitá. Lze vzít jinou polopřímku vycházející z počátku a větev logaritmu, která bude spojitá všude kromě oné polopřímky.

⬇

Velká výhoda hlavní větve logaritmu je ta, že souhlasí s reálným přirozeným logaritmem kladných čísel. Vezme-li se spojitá větev argumentu neobsahující hodnotu 0, nemá příslušná větev logaritmu nikdy reálné hodnoty.

Konec poznámek 3.

PŘÍKLADY

Příklady 1 :

1. Najděte všechna řešení rovnic

$$e^z = 1 + \mathbf{i}\sqrt{2}\,, \quad e^z = \mathbf{i}\,, \quad e^{2z-1} = -\mathbf{i}\,.$$

2. Je funkce $\mathrm{e}^{\overline{z}}$ holomorfní?

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Najděte všechna z, pro která je e^z reálné, resp. ryze imaginární číslo.

4. Najděte všechna z, pro která je $|\mathrm{e}^{-2z}| < 1$.

Konec příkladů 1.

Příklady 2 :

1. Najděte všechna řešení rovnice $\sin z = \mathrm{i}$.

2. Kde je holomorfní funkce $\cos \overline{z}$?

3. Najděte všechna řešení rovnice $\operatorname{tg} z = -\mathrm{i}$.

Konec příkladů 2.

Příklady 3 :

1. Najděte všechny hodnoty $\log i$.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte všechna řešení rovnice $\log z = -\mathrm{i}$.

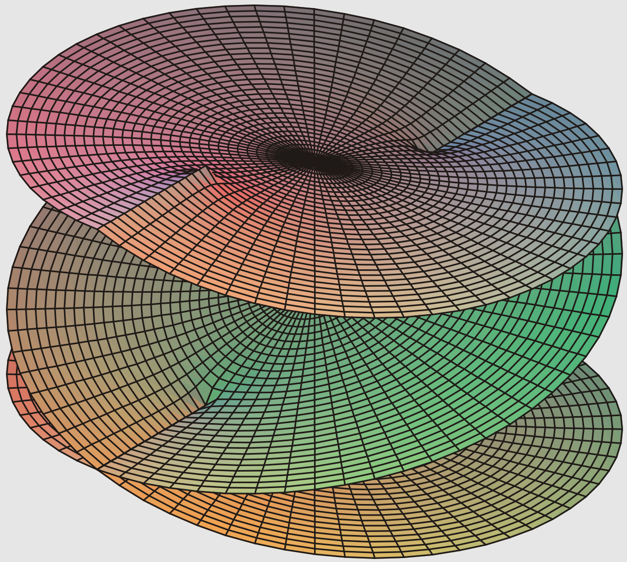
3. Ukažte, že funkce $\mathrm{Log}(x^2 + y^2)$ je harmonická v každé oblasti neobsahující 0.

4. Vyřešte obecně rovnici $\sin w = z$. [Návod: místo $\sin$ napište příslušné vyjádření pomocí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ a položte $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = q$; řešení získané kvadratické rovnice nyní stačí zlogaritmovat. Ve výsledku $w = -\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2})$ se vyskytují dvě mnohoznačné funkce. Vezmete-li u obou z nich hlavní větve, získáte hlavní větev $\arcsin$ v komplexním oboru; jaký má definiční obor?

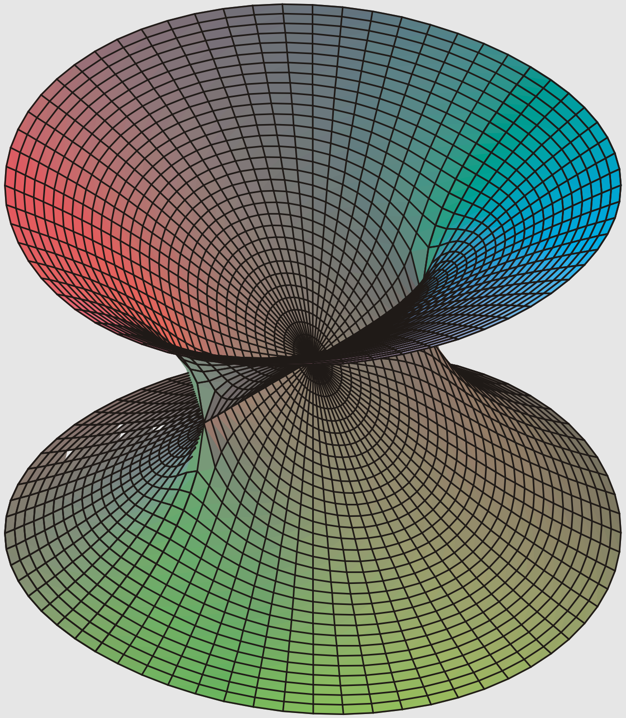
4. Vyřešte obecně rovnici $\sin w = z$. [Návod: místo $\sin$ napište příslušné vyjádření pomocí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ a položte $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = q$; řešení získané kvadratické rovnice nyní stačí zlogaritmovat. Ve výsledku $w = -\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2})$ se vyskytují dvě mnohoznačné funkce. Vezmete-li u obou z nich hlavní větve, získáte hlavní větev $\arcsin$ v komplexním oboru; jaký má definiční obor?

U následujících obrázků udržujte vizuální kontakt se zemí, aby se vám nezatočila hlava. Jde o arkus-sinus.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nejprve byla reálná část a pak imaginární arkus-sinu. Pokud půjdete opačným směrem, bude to opačně.

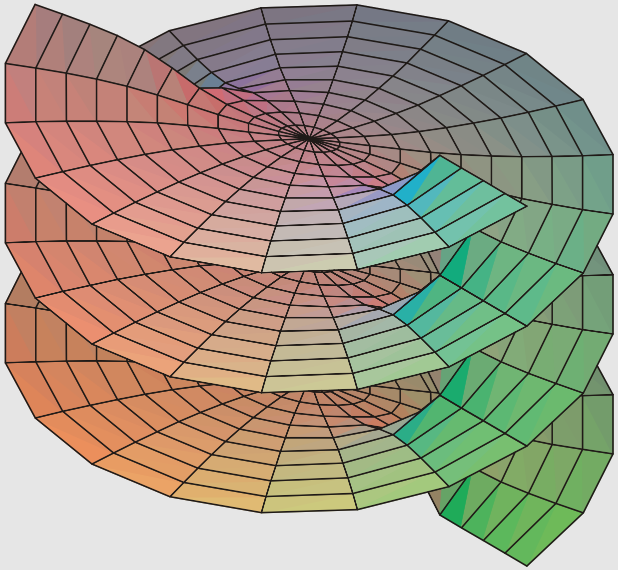
LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Ukažte, že pro hlavní větev funkce $\arcsin$ platí $\arcsin' z = 1/\sqrt{1 - z^2}$.

6. Stejným postupem jako v předchozím případě najděte vzorec pro $\arccos z$ ($\arccos z = -\mathbf{i}\log(\mathbf{i}z + \sqrt{z^2 - 1})$). Vypočtěte derivaci $\arccos$.

7. Obdobně najděte výraz pro $\operatorname{arctg} z$ ($\mathrm{i}\log\sqrt{(\mathrm{i}+z)/(\mathrm{i}-z)}$). Ukažte, že derivace je rovna $1/(z^2+1)$.

7. Obdobně najděte výraz pro $\operatorname{arctg} z$ ($\mathrm{i} \log \sqrt{(\mathrm{i}+z)/(\mathrm{i}-z)}$). Ukažte, že derivace je rovna $1/(z^2+1)$.



Konec příkladů 3.

Příklady 4 :

1. Najděte všechny hodnoty mocnin

$$\mathbf{i}^{\mathrm{i}}\,, \quad , (1-\mathbf{i})^{4\mathrm{i}}\,, \quad \mathbf{i}^{\sqrt{2}}\,, \quad 1^{-\mathrm{i}}\,, \quad (-1)^{1/\pi}\,.$$

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočtěte limity pro $z = x + \mathrm{i}y$:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \mathrm{e}^x\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = y\,.$$

Konec příkladů 4.

OTÁZKY

Otázky 1 :

1. Dokažte, že pro každé $w \neq 0$ existuje z tak, že $\mathrm{e}^z = w$.

2. Spočítejte derivaci exponenciální funkce pomocí Cauchyových-Riemannových podmínek.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Dokažte, že $\mathrm{e}^{-z} = 1/\mathrm{e}^{z}$ pro každé z.

4. Pomocí součtových vzorců pro reálné funkce $\sin$ a $\cos$ dokažte, že $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w$.

5. Dokažte, že $\mathrm{e}^z = 1$ právě pro $z = 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$ a z tohoto řešení najděte příslušné pásy, kde je exponenciální funkce prostá.

Konec otázek 1.

Otázky 2 :

1. Ukažte, že $\sin$ nabývá reálných hodnot jen na ose x a na přímkách $\Re(z) = \pi/2 + k\pi$.

2. Ukažte, že obor hodnot funkcí $\sin$ a $\cos$ je celé $\mathbb{C}$.

3. Vypočtěte derivace funkcí $\sin$ a $\cos$.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Dokažte vlastnosti uvedené v bodě 4.

5. Dokažte součtové vzorce z bodu 5.

6. Ukažte, že $\sin$ je prostá na pásu $\Re(z) \in (-\pi/2, \pi/2]$ a $\cos$ na pásu $\Re(z) \in [0, \pi)$.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Dokažte, že $|\sin z| \geq |\sin(\Re(z))|$ a podobně pro $\cos$.

8. Uveďte základní vlastnosti funkcí tg, cotg.

Konec otázek 2.

Otázky 3 :

1. Ukažte, že pro $z \neq 0$ platí $\mathrm{e}^{\log(z)} = z$. Platí vždy rovnost $\log(\mathrm{e}^z) = z$?

2. Spočtěte derivaci funkce Log. [Návod: Lze použít Cauchyovy-Riemannovy podmínky, nebo vzorec pro derivaci inverzní funkce, nebo zderivovat rovnost $\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(z)} = z$, víte-li, že Log má derivaci.]

3. Dokažte rovnost $\mathrm{Log}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{Log}(z)}$.

4. Pomocí příslušných rovností pro exponenciální funkci dokažte rovnosti $\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)\,, \quad \mathrm{Log}(1/z) = -\mathrm{Log}(z)$.

5. Dokažte, že Log je prostá funkce na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6. Ukažte, že platí rovnost množin

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w)\,, \quad \log(1/z) = -\log(z)\,.$$

Konec otázek 3.

Otázky 4 :

1. Ukažte, že pro reálné číslo r je $|z^r| = |z|^r$.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte všechny případy, kdy z^w je reálné číslo.

3. Ukažte, že leží-li z na jednotkové kružnici a w je iracionální, tvoří hodnoty z^w hustou množinu na jednotkové kružnici.

4. Jak rozloženou množinu na jednotkové kružnici tvoří hodnoty $\sqrt[n]{z}$ pro $|z| = 1$?

5. Napište Moivreův vzorec pro libovolné reálné číslo r a $(\cos x + \mathbf{i} \sin x)^r$.

6. Dokažte rovnosti

$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}\,, \quad \left(z^w\right)^c = z^{wc}\,, \quad \left(z_1 z_2\right)^w = z_1^w z_2^w\,.$$

7. Najděte obory hodnot funkcí z^w a w^z proměnné z.

8. Vypočtěte derivace funkcí z^w a w^z proměnné z.

Konec otázek 4.

CVIČENÍ

Cvičení 1 :

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Cvičení 1 :

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

Cvičení 1 :

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

⬇

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

⬇

Označme ještě pro jednoduchost reálné a imaginární části čísel $z_1,\ z_2$ takto

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

⬇

Cvičení 1 :

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

⬇

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

⬇

Označme ještě pro jednoduchost reálné a imaginární části čísel $z_1,\ z_2$ takto

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

⬇

Potom podle definice

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)),$$

⬇

Cvičení 1 :

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

⬇

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

⬇

Označme ještě pro jednoduchost reálné a imaginární části čísel $z_1,\ z_2$ takto

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

⬇

Potom podle definice

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)),$$

⬇

a

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2 + i(\sin y_1\cos y_2 + \cos y_1\sin y_2)\right] \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right] \end{aligned}$$

Taky se na to může jít od lesa. Exponenciála se napíše jako řada a na řadu přijde součin číselných (či mocninných) řad.

Taky se na to může jít od lesa. Exponenciála se napíše jako řada a na řadu přijde součin číselných (či mocninných) řad.

BTW, vyjde IMHO to samé.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 1.

Cvičení 2 :

Příklad. Dokažte, že funkce f proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.

Cvičení 2 :

Příklad. Dokažte, že funkce f proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.

⬇

Řešení. Označme nejdříve reálnou a imaginární část funkce f po řadě

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

a

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

⬇

Cvičení 2 :

Příklad. Dokažte, že funkce f proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.

Řešení. Označme nejdříve reálnou a imaginární část funkce f po řadě

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

a

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

Obě tyto funkce mají spojité parciální derivace všech řádů podle proměnných x, y, a mají tedy totální diferenciál. Postačí tedy dokázat, že jsou splněny Cachy-Riemannovy podmínky.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Dokažte, že funkce f proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.

⬇

Řešení. Označme nejdříve reálnou a imaginární část funkce f po řadě

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

a

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

⬇

Obě tyto funkce mají spojité parciální derivace všech řádů podle proměnných x, y, a mají tedy totální diferenciál. Postačí tedy dokázat, že jsou splněny Cachy-Riemannovy podmínky.

⬇

To je ale snadné:

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

To je ale snadné:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

To je ale snadné:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Podle známé věty dostáváme

$$f'(x+iy) = \frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

To je ale snadné:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Podle známé věty dostáváme

$$f'(x+iy) = \frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Jedna má známá . . .

Konec cvičení 2.

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte funkci f holomorfní v $\mathbb{C}$, jejíž reálná část je

$$x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y),$$

kde $z = x + iy$.

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte funkci f holomorfní v $\mathbb{C}$, jejíž reálná část je

$$x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y),$$

kde $z = x + iy$.

Řešení. Položíme $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y)$. Derivováním se snadno přesvědčíme, že u je harmonická, a tedy naše úloha má smysl. Dále je $\mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, a tedy úloha má řešení.

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte funkci f holomorfní v $\mathbb{C}$, jejíž reálná část je

$$x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y),$$

kde $z = x + iy$.

Řešení. Položíme $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y)$. Derivováním se snadno přesvědčíme, že u je harmonická, a tedy naše úloha má smysl. Dále je $\mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, a tedy úloha má řešení.

Jak ale najít funkci v sdruženou k u?

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek najdeme soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic, které musí funkce v splňovat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y).$$

Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek najdeme soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic, které musí funkce v splňovat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y).$$

První rovnici integrujeme podle y, druhou podle x (integrační konstanta může v obou případech záviset na zbývající proměnné!):

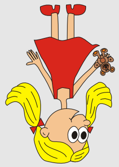
$$u = 2xy + e^x(x\sin y - y\cos y) + \varphi(x),$$

$$v = 2xy + e^x(x\sin y - y\cos y) + \psi(y),$$

takže $\varphi(x) = \psi(y) = k \in \mathbb{R}$.

Můj ty smutku. Nevím nevím, zda se úloha zjednodušila. Zvolil bych opačný postup.

Můj ty smutku. Nevím nevím, zda se úloha zjednodušila. Zvolil bych opačný postup.

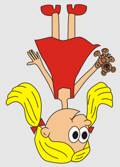


Já jsem taky pro naopak.

Nakonec je tedy

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\
&= x^2 + i2xy - y^2 + e^x[x(\cos y + i\sin y) + iy(\cos y + i\sin y)] + ik \\
&= (x+iy)^2 + (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) + ik = z^2 + ze^z + ik.
\end{aligned}
$$

Můj ty smutku. Nevím nevím, zda se úloha zjednodušila. Zvolil bych opačný postup.



Já jsem taky pro naopak.

Nakonec je tedy

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\
&= x^2 + i2xy - y^2 + e^x[x(\cos y + i\sin y) + iy(\cos y + i\sin y)] + ik \\
&= (x+iy)^2 + (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) + ik = z^2 + ze^z + ik.
\end{aligned}
$$

Tak jsme se s tím nepěkně nadřeli.

Tak jsme se s tím nepěkně nadřeli.

BTW, tu konstantu jsem tam tušil.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 3.

Cvičení 4 :

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx.$$

Cvičení 4 :

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx.$$

Řešení. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\cos kx = \Re\, e^{ikx},$$

Cvičení 4 :

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx.$$

Řešení. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\cos kx = \Re\, e^{ikx},$$

takže místo zadané řady můžeme vyšetřovat řadu

$$1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx},$$

což je geometrická řada, jejíž součet známe:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} &= \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{ix} - 1)}{(e^{-ix} - 1)(e^{-ix} - 1)} \\ &= \frac{-e^{(n+1)x} + e^{inx} - e^{-ix} + 1}{2(1 - \cos x)} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right).\end{aligned}$$

Cvičení 4 :

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx.$$

Řešení. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\cos kx = \Re\, e^{ikx},$$

takže místo zadané řady můžeme vyšetřovat řadu

$$1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx},$$

což je geometrická řada, jejíž součet známe:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} &= \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{ix} - 1)}{(e^{-ix} - 1)(e^{-ix} - 1)} \\ &= \frac{-e^{(n+1)x} + e^{inx} - e^{-ix} + 1}{2(1 - \cos x)} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2}\right).\end{aligned}$$

A jaká je reálná část tohoto výrazu?

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A jaká je reálná část tohoto výrazu?

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

A jaká je reálná část tohoto výrazu?

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

To, že se ty ošklivé siny a kosiny dají schovat do pěkné exponenciály, je super.

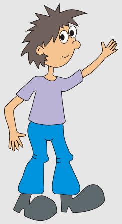
Konec cvičení 4.

Cvičení 5 :

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.

Cvičení 5 :

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.

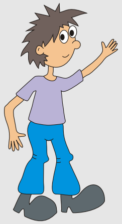


To vypadá jako pěkná hloupost.

Cvičení 5 :

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.

⬇



To vypadá jako pěkná hloupost.

⬇

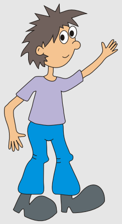
Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

⬇

Cvičení 5 :

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.



To vypadá jako pěkná hloupost.

Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

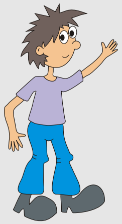
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

Odtud dostaneme rovnici

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Cvičení 5 :

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.



To vypadá jako pěkná hloupost.

Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

Odtud dostaneme rovnici

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Označme $w = e^{iz}$, pak hledáme řešení kvadratické rovnice

$$w^2 - 4w + 1 = 0,$$

což jsou čísla

$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \qquad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

což jsou čísla

$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \qquad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Vrátíme-li se zpět k proměnné z :

$$e^{iz_1} = 2 + \sqrt{3}, \qquad e^{iz_2} = 2 - \sqrt{3}.$$

což jsou čísla

$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \qquad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Vrátíme-li se zpět k proměnné z :

$$e^{iz_1} = 2 + \sqrt{3}, \qquad e^{iz_2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Logaritmováním

$$z_1 \in -i\,\mathrm{Log}(2 + \sqrt{3}), \qquad z_2 \in -i\,\mathrm{Log}(2 - \sqrt{3}).$$

což jsou čísla

$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \qquad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Vrátíme-li se zpět k proměnné z :

$$e^{iz_1} = 2 + \sqrt{3}, \qquad e^{iz_2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Logaritmováním

$$z_1 \in -i\,\mathrm{Log}(2 + \sqrt{3}), \qquad z_2 \in -i\,\mathrm{Log}(2 - \sqrt{3}).$$

Tyto výrazy ještě upravíme.

což jsou čísla

$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \qquad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Vrátíme-li se zpět k proměnné z :

$$e^{iz_1} = 2 + \sqrt{3}, \qquad e^{iz_2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Logaritmováním

$$z_1 \in -i\,\mathrm{Log}(2 + \sqrt{3}), \qquad z_2 \in -i\,\mathrm{Log}(2 - \sqrt{3}).$$

Tyto výrazy ještě upravíme.

Proč?

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aby se všechny líbily.

LEKCE33-KEL

exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aby se všechny líbily.

My se líbíme vždycky.

Aby se všechny líbily.

My se líbíme vždycky.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(2+\sqrt{3}) &= \log(2+\sqrt{3}) + i\operatorname{Arg}(2+\sqrt{3}) = \log(2+\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\operatorname{Log}(2-\sqrt{3}) &= \log(2-\sqrt{3}) + i\operatorname{Arg}(2-\sqrt{3}) = \log(2-\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aby se všechny líbily.

My se líbíme vždycky.

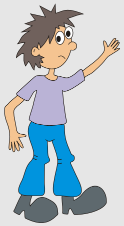
$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(2+\sqrt{3}) &= \log(2+\sqrt{3}) + i\,\operatorname{Arg}(2+\sqrt{3}) = \log(2+\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\ \operatorname{Log}(2-\sqrt{3}) &= \log(2-\sqrt{3}) + i\,\operatorname{Arg}(2-\sqrt{3}) = \log(2-\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

A výsledek je

$$z = -i \log(2 \pm \sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A výsledek je

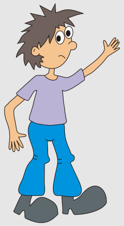
$$z = -i\log(2 \pm \sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Já jsem vsadil na to, že to řešení neexistuje.

A výsledek je

$$z = -i \log(2 \pm \sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Já jsem vsadil na to, že to řešení neexistuje.

A příště si asi vsadí zase.

Konec cvičení 5.

Cvičení 6 :

Příklad. Určete hodnotu $\log_6(\sqrt{3}+i)$, kde

$$\log_{\theta} w = \{z \in \operatorname{Log} w : \ \theta - \pi < Im\, z \leq \pi + \theta\}.$$

Cvičení 6 :

Příklad. Určete hodnotu $\log_6(\sqrt{3}+i)$, kde

$$\log_{\theta} w = \{z \in \operatorname{Log} w : \ \theta - \pi < Im\, z \le \pi + \theta\}.$$

Řešení. Podle definice je

$$\log_6(\sqrt{3}+i) = \log|\sqrt{3}+i| + i\arg_6(\sqrt{3}+i),$$

kde $\arg_6(\sqrt{3}+i)$ je takový argument, že

$$6 - \pi < \arg_6(\sqrt{3}+i) \le 6 + \pi.$$

Cvičení 6 :

Příklad. Určete hodnotu $\log_6(\sqrt{3}+i)$, kde

$$\log_{\theta} w = \{z \in \mathrm{Log}\, w :\ \theta - \pi < Im\, z \le \pi + \theta\}.$$

Řešení. Podle definice je

$$\log_6(\sqrt{3}+i) = \log|\sqrt{3}+i| + i\arg_6(\sqrt{3}+i),$$

kde $\arg_6(\sqrt{3}+i)$ je takový argument, že

$$6 - \pi < \arg_6(\sqrt{3}+i) \le 6 + \pi.$$

Je tedy $\arg_6(\sqrt{3}+i) = \frac{13}{6}\pi$ a celkový výsledek

$$\log_6(\sqrt{3}+i) = \log 2 + i\frac{13}{6}\pi.$$

Konec cvičení 6.

STANDARDY z kapitoly

ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

STANDARDY z kapitoly

ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

ARGUMENT

Argument $\arg z$ čísla z je reálná mnohoznačná funkce s definičním oborem $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a s oborem hodnot $\mathbb{R}$.

Funkce argument lze znázornit jako nekonečné schodiště.

Funkce argument lze znázornit jako nekonečné schodiště.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky 2π (přesněji interval typu $(a, a + 2\pi]$ nebo $[a, a + 2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

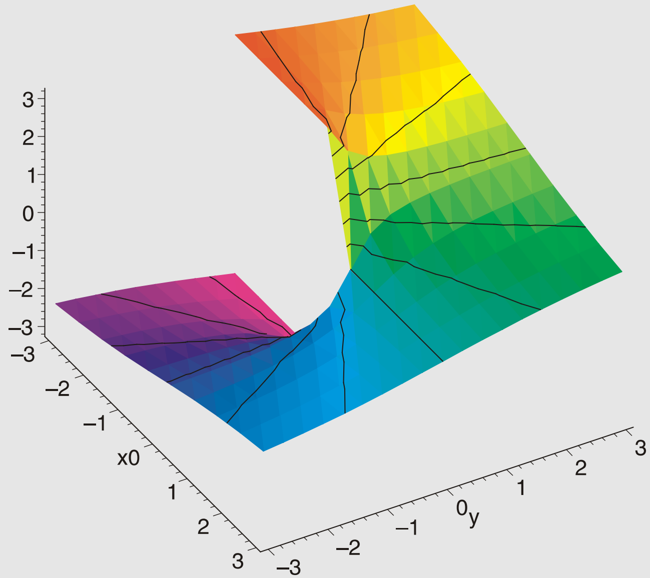
Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky 2π (přesněji interval typu $(a, a+2\pi]$ nebo $[a, a+2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

Jestliže se za obor hodnot zvolí interval $(-\pi, \pi]$, značí se tato funkce $\operatorname{Arg} z$ a nazývá se hlavní větev argumentu. Funkce $\operatorname{Arg} z$ je spojitá všude kromě záporné osy x a není holomorfní v žádném bodě.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky 2π (přesněji interval typu $(a, a+2\pi]$ nebo $[a, a+2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

Jestliže se za obor hodnot zvolí interval $(-\pi, \pi]$, značí se tato funkce $\operatorname{Arg} z$ a nazývá se hlavní větev argumentu. Funkce $\operatorname{Arg} z$ je spojitá všude kromě záporné osy x a není holomorfní v žádném bodě.



EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Exponenciální funkce e^z se definuje rovností $e^z = e^{\Re(z)}(\cos \Im(z) + \mathbf{i} \sin \Im(z))$.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Exponenciální funkce e^z se definuje rovností $e^z = e^{\Re(z)}(\cos\Im(z) + \mathbf{i}\sin\Im(z))$.

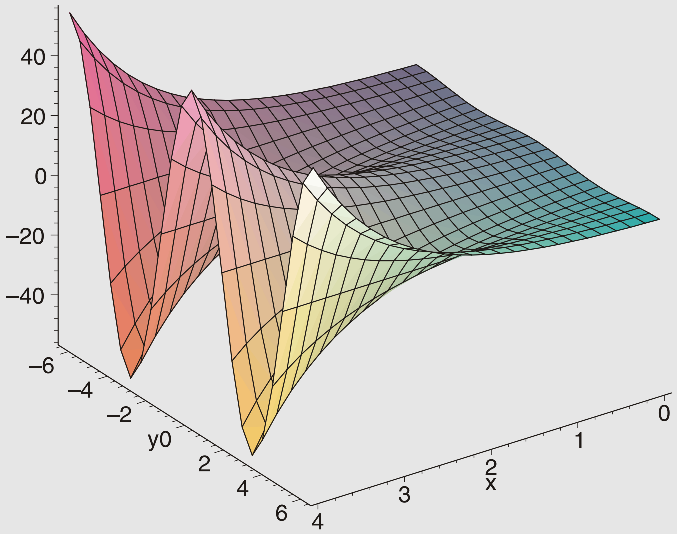
Vlastnosti exponenciální funkce:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
2. Funkce je celistvá, $(e^z)' = e^z$.
3. Funkce je periodická s periodou $2\pi\mathrm{i}$.
4. Platí vztahy
$$\Re(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)}\cos(\Im(z))\,,\, \Im(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)}\sin(\Im(z))\,,$$
$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re(z)}\,,\, \arg(\mathrm{e}^z) = \Im(z) + 2k\pi\,,\, \mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}\,.$$
5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w\,,\, \mathrm{e}^{z-w} = \frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^w}\,.$$
6. Funkce e^z je prostá na každém pásu šířky 2π rovnoběžném s osou x: buď $\Im(z)\in(a, a+2\pi]$ nebo $\Im(z)\in[a, a+2\pi)$.

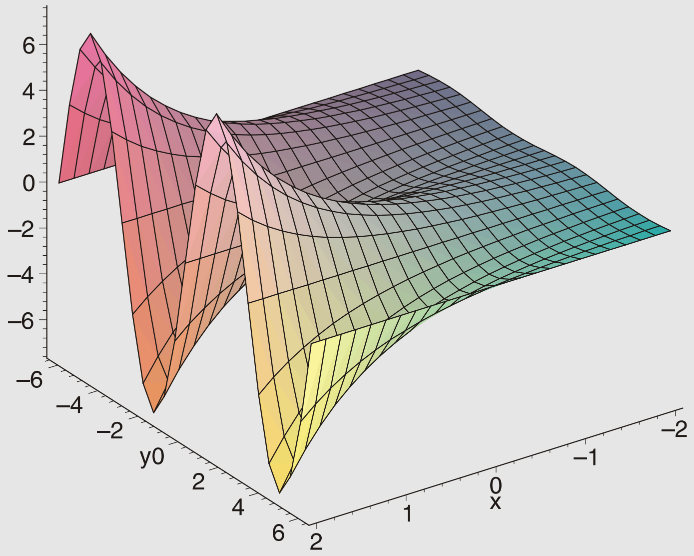
LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Grafy reálné a imaginární části exponenciály jsou si navzájem podobné jako vejce vejci. Následují oba dva. Poznáte, který je který?

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



40
20
0
–20
–40
–6
–4
–2
y0
2
4
6
4
3
2
x
1
0

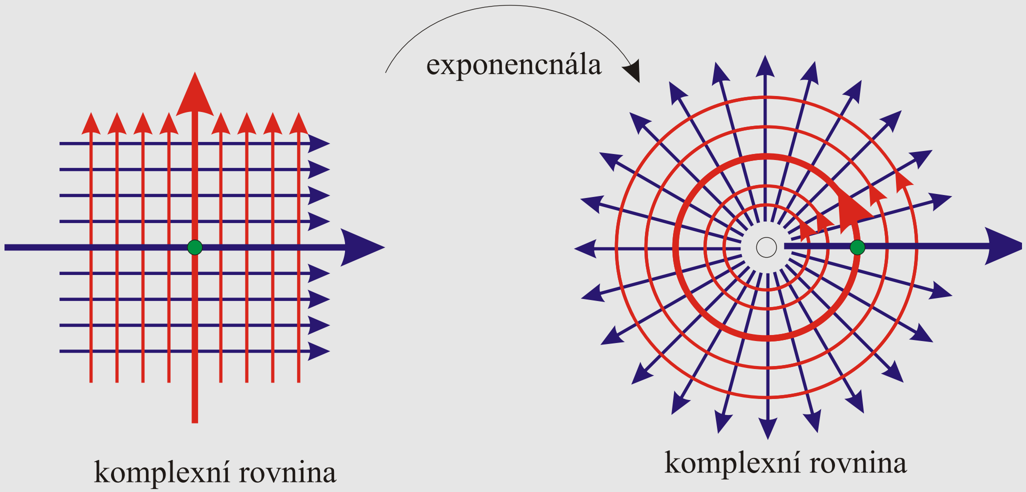


LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přímky rovnoběžné s reálnou osou exponenciála zobrazí jako polopřímky vycházející z počátku. Přímky rovnoběžné s imaginární osou exponenciála zobrazí jako kružnice se středem v počátku.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přímky rovnoběžné s reálnou osou exponenciála zobrazí jako polopřímky vycházející z počátku. Přímky rovnoběžné s imaginární osou exponenciála zobrazí jako kružnice se středem v počátku.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

Když vypočtete ze vzorců definujících e^z a e^{-z} funkce $\sin y, \cos y$ (pro $x = 0$), dostanete rovnosti $\sin y = (e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y})/(2\mathrm{i}), \cos y = (e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y})/2.$ ¨

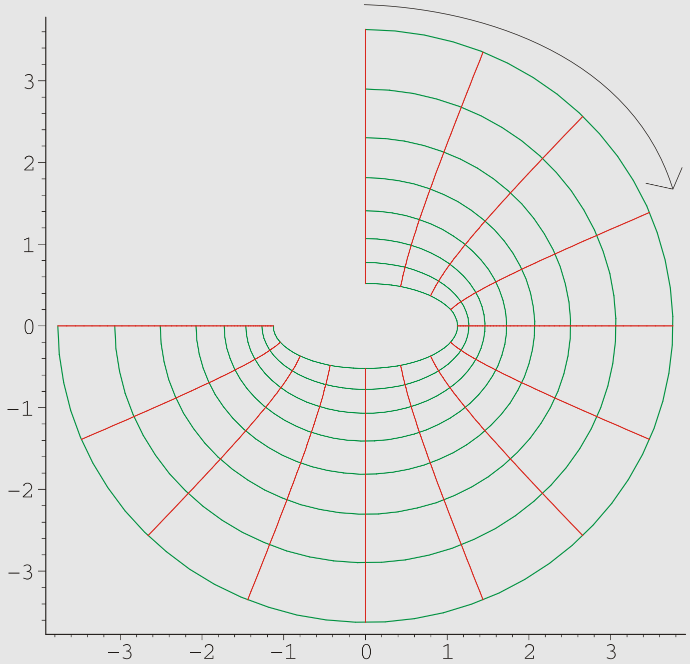
TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

Když vypočtete ze vzorců definujících e^z a e^{-z} funkce $\sin y, \cos y$ (pro $x = 0$), dostanete rovnosti $\sin y = (e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y})/(2\mathrm{i}), \cos y = (e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y})/2.$ ¨

Následující definice je tedy rozšířením těchto vztahů na komplexní čísla:

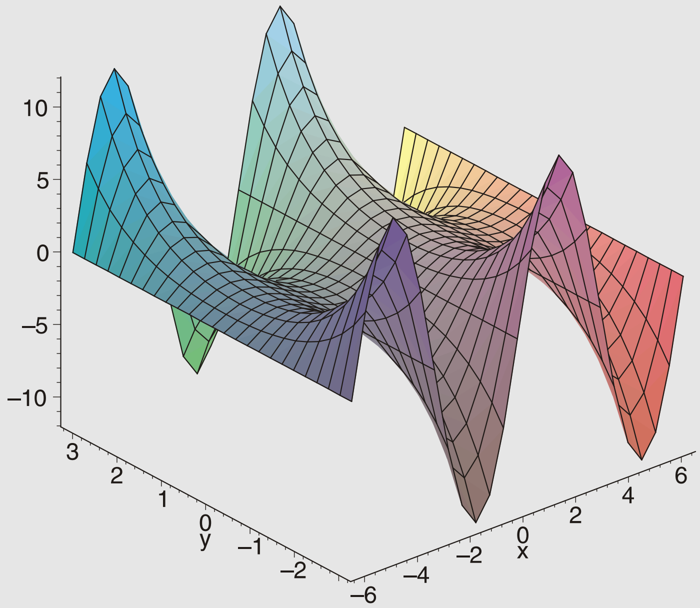
$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

Zobrazíme pomocí funkce sinus obdélník $[0, 3\pi/2] \times [1/10, 1]$ v rovině a dostaneme.

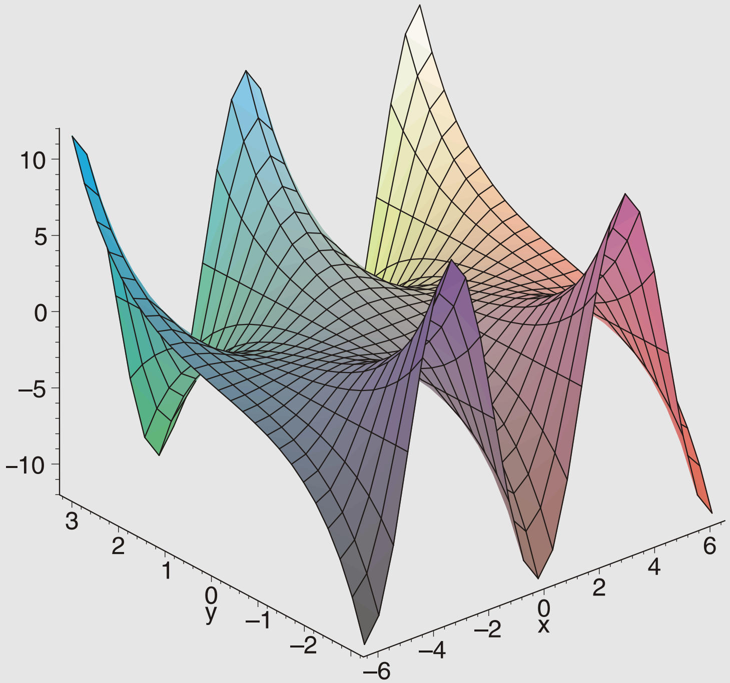


Vidíme, že výsledný obrazec sleduje chování reálné funkce sinus od 0 do $3\pi/2$. To znamená napřed jde od 0 k 1 a pak k -1. Obrazec obtáčí reálný interval $[-1, 1]$ "zprava", a nedotočí celou otáčku, proč?

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



10
5
0
–5
–10
3
2
1
0
y
–1
–2
–6
–4
–2
0
x
2
4
6

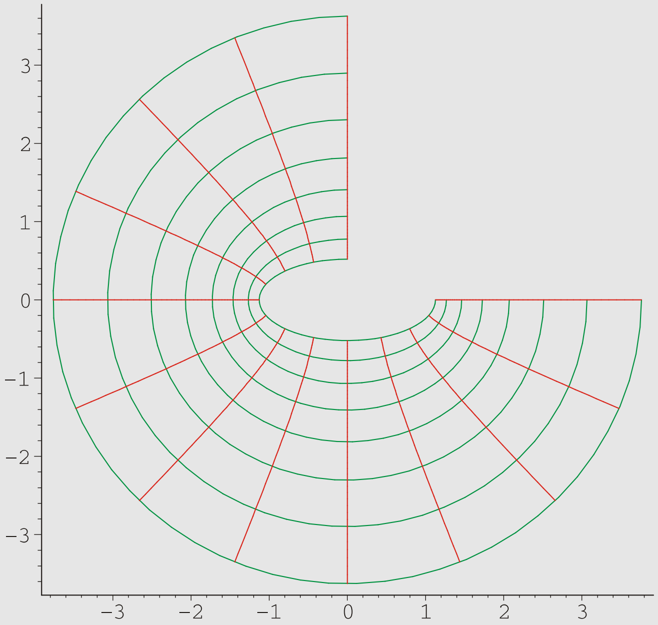


10
5
0
–5
–10
3
2
1
0
y
–1
–2
–6
–4
–2
0
x
2
4
6

Zobrazíme pomocí funkce kosinus obdélník $[0, 3\pi/2] \times [1/10, 1]$ v rovině a dostaneme.

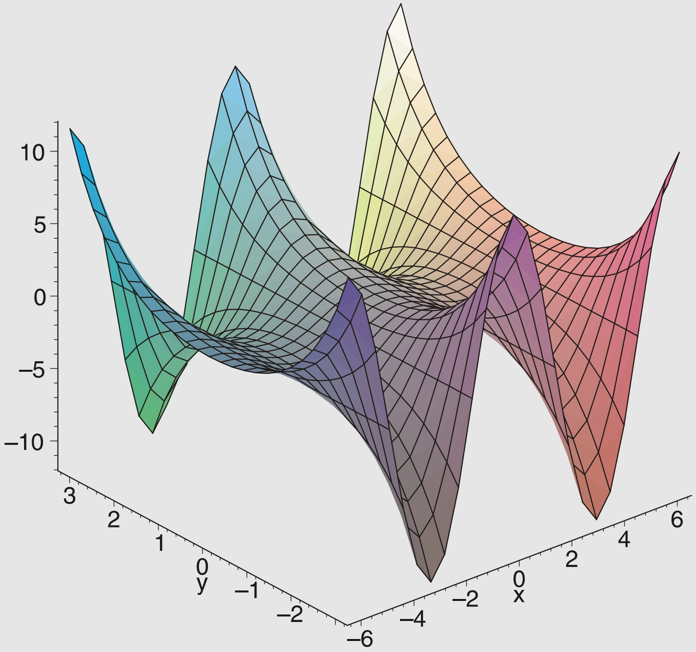
LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zobrazíme pomocí funkce kosinus obdélník $[0, 3\pi/2] \times [1/10, 1]$ v rovině a dostaneme.

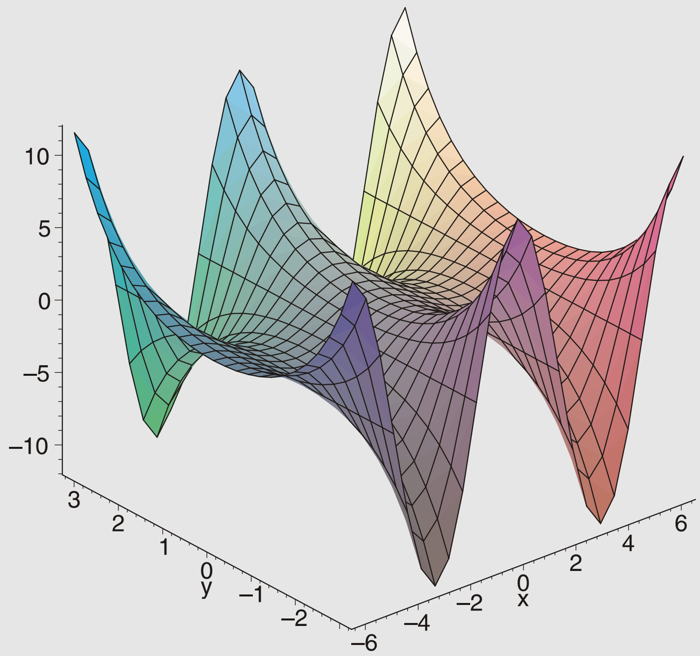


Vidíme, že výsledný obrazec sleduje chování reálné funkce kosinus od 0 do $3\pi/2$. To znamená napřed jde od 1 k -1 a pak k 0. Obrazec obtáčí reálný interval $[-1, 1]$ "zprava", a nedotočí celou otáčku, proč?

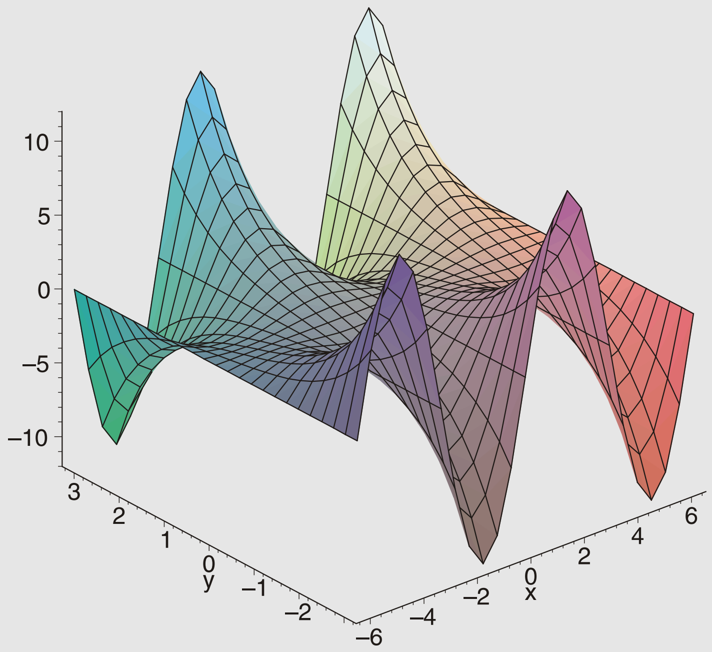
LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



10
5
0
–5
–10
3
2
1
0
y
–1
–2
–6
–4
–2
0
x
2
4
6


10
5
0
–5
–10
3
2
1
0
y
–1
–2
–6
–4
–2
0
x
2
4
6

Pokud budeme rozepisovat do složek, dostaneme při troše snahy toto:

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud budeme rozepisovat do složek, dostaneme při troše snahy toto:

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$$

a

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y$$

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $y = y_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s reálnou osou.

$$\sin(x + iy_0) = \sin x \cosh y_0 + \cos x \sinh y_0$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $y = y_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s reálnou osou.

$$\sin(x + iy_0) = \sin x \cosh y_0 + \cos x \sinh y_0$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici elipsy

$$\left(\frac{\xi}{\cosh y_0}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sinh y_0}\right)^2 = 1$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0 + iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0 + iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici hyperboly

$$\left(\frac{\xi}{\sin x_0}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\cos x_0}\right)^2 = 1$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0 + iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici hyperboly

$$\left(\frac{\xi}{\sin x_0}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\cos x_0}\right)^2 = 1$$

Dále lze definovat (všude, kde to má smysl):

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}\,.$$

Dále lze definovat (všude, kde to má smysl):

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}\,.$$

V následujících vlastnostech jsou pro jednodušší vyjádření použity reálné hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,.$$

Vlastnosti:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C}$.
2. Funkce $\sin$, $\cos$ jsou celistvé, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
3. Funkce $\sin$, $\cos$ jsou periodické s periodou 2π, $\sin$ je funkce lichá, $\cos$ je funkce sudá.
4. Platí vztahy

$$\Re(\sin z) = \sin(\Re(z))\cosh(\Im(z)), \Re(\cos z) = \cos(\Re(z))\cosh(\Im(z)),$$

$$\Im(\sin z) = \cos(\Re(z))\sinh(\Im(z)), \Im(\cos z) = \sin(\Re(z))\sinh(\Im(z)),$$

$$\sin\overline{z} = \overline{\sin z}, \cos\overline{z} = \overline{\cos z},$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z)), |\cos z|^2 = \cos^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z)).$$

5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w, \cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w, \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

6. Funkce $\sin z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2]$ nebo $\Re(z) \in [(2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$.
7. Funkce $\cos z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in (k\pi, (k+1)\pi]$ nebo $\Re(z) \in [k\pi, (k+1)\pi)$.

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Funkce Log je inverzní funkcí k e^z pro $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Funkce Log je inverzní funkcí k e^z pro $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

To znamená, že je-li $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$ a $\mathrm{Log}(w) = z$, pak platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(w)} = w\,, \quad \mathrm{Log}(\mathrm{e}^z) = z\,.$$

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Funkce Log je inverzní funkcí k e^z pro $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

To znamená, že je-li $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$ a $\mathrm{Log}(w) = z$, pak platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(w)} = w\,, \quad \mathrm{Log}(\mathrm{e}^z) = z\,.$$

Jestliže $\mathrm{Log}(w) = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$, plynou z první rovnosti vztahy $u = \mathrm{e}^x \cos y$, $v = \mathrm{e}^x \sin y$ a tedy $x = \log|w|$, $y = \mathrm{Arg}\, w$. Tím se dostává popis hodnot funkce Log, který se dá také vzít za definici Log

$$\mathrm{Log}(w) = \log|w| + \mathbf{i}\,\mathrm{Arg}(w)\,.$$

Vlastnosti logaritmu:

1. Definiční obor je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a obor hodnot je pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.
2. Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\mathrm{Log}'(z) = 1/z$.
3. Platí vztahy
$$\Re(\mathrm{Log}(z)) = \log|z|\,, \Im(\mathrm{Log}(z)) = \mathrm{Arg}(z)\,, \mathrm{Log}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{Log}(z)}\,.$$
4. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)\,, \mathrm{Log}(z/w) = \mathrm{Log}(z) - \mathrm{Log}(w)\,.$$
5. Funkce Log je prostá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Pokud se nezúží definiční obor, funkce e^z není prostá a řešení rovnice $\mathrm{e}^z = w$, pro dané w, je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi\mathrm{i}$).

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud se nezúží definiční obor, funkce e^z není prostá a řešení rovnice $\mathrm{e}^z = w$, pro dané w, je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi\mathrm{i}$).

Množina všech těchto řešení se může označit jako $\log w$ a dostane se mnohoznačná funkce. Funkce Log se pak nazývá hlavní větev logaritmu.

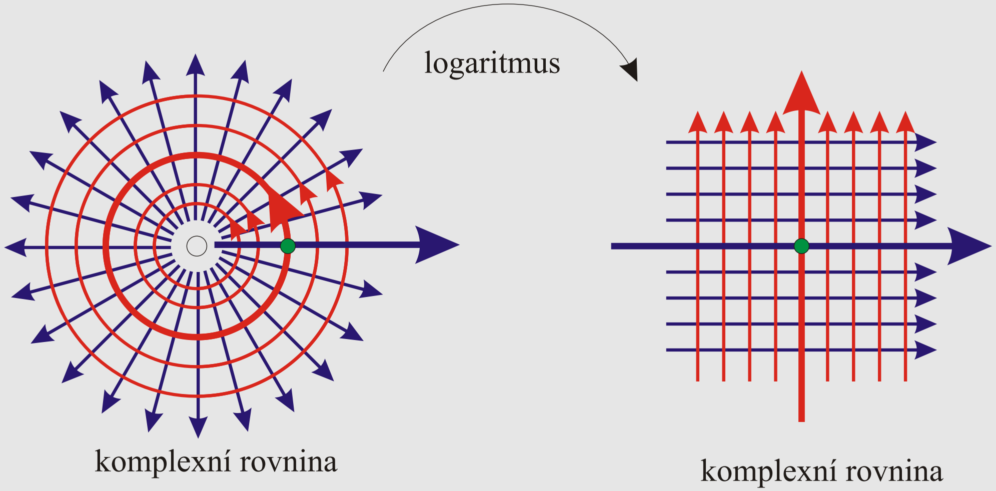
Pokud se nezúží definiční obor, funkce e^z není prostá a řešení rovnice $\mathrm{e}^z = w$, pro dané w, je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi\mathrm{i}$).

Množina všech těchto řešení se může označit jako $\log w$ a dostane se mnohoznačná funkce. Funkce Log se pak nazývá hlavní větev logaritmu.

Z této definice $\log$ vyplývá i její popis

$$\log(w) = \log|w| + \mathbf{i}\arg(w)\,.$$

Logaritmus převádí polopřímky vycházející z počátku ...



Imaginární část logaritmu je spirálovité schodiště, protože exponenciála je 2πi periodická.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

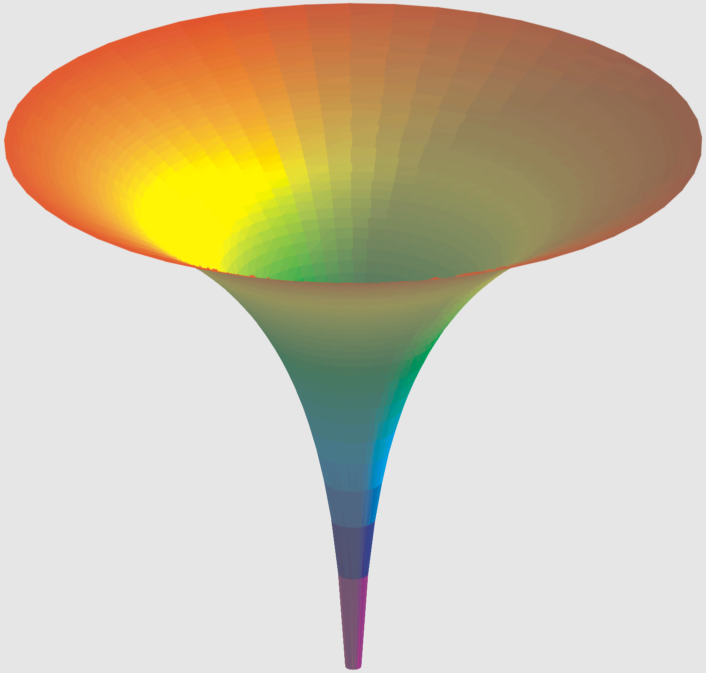
Imaginární část logaritmu je spirálovité schodiště, protože exponenciála je 2πi periodická.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Reálná část je trychtýř.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Reálná část je trychtýř.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBECNÁ MOCNINA

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z} \,.$$

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = e^{w \log z} .$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z}\,.$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z}\,.$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

Pokud je potřeba mít jen jednu hodnotu, je třeba se omezit na nějakou jednoznačnou větev logaritmu, např. na Log. Nicméně, bývá výhodné pracovat se všemi hodnotami mocniny, např. při řešení rovnic (jinak se může nějaké řešení „ztratit").

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z}\,.$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

Pokud je potřeba mít jen jednu hodnotu, je třeba se omezit na nějakou jednoznačnou větev logaritmu, např. na Log. Nicméně, bývá výhodné pracovat se všemi hodnotami mocniny, např. při řešení rovnic (jinak se může nějaké řešení „ztratit").

Jednotlivé hodnoty $\log z$ se liší o $2k\pi\mathrm{i}$, což je perioda exponenciální funkce. Pokud je tedy číslo $w = n$ celé reálné, má z^n jedinou hodnotu, která odpovídá součinu n čísel z nebo $1/z$, nebo se rovná 1 pro $n = 0$.

Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Potom se exponent v definici z^w rovná $(\log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\mathrm{i})/n$ a existuje právě n hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Potom se exponent v definici z^w rovná $(\log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\mathrm{i})/n$ a existuje právě n hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

⬇

To znamená, že v tomto případě má mocnina $z^{1/n}$ přesně n hodnot.

⬇

Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Potom se exponent v definici z^w rovná $(\log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\mathrm{i})/n$ a existuje právě n hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

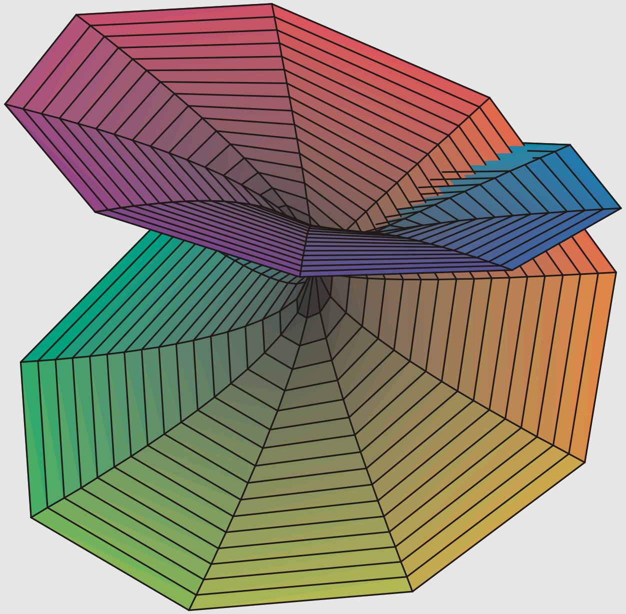
To znamená, že v tomto případě má mocnina $z^{1/n}$ přesně n hodnot.

Tato n-značná funkce se nazývá n-tá odmocnina a značí se jako obvykle $\sqrt[n]{z}$. Hlavní větev odmocniny se získá volbou $k = 0$.

Předchozí úvahy lze přenést na případ, kdy w je racionální číslo a mocnina z^w má pak konečně mnoho hodnot. Jakmile je w iracionální, má již mocnina z^w spočetně mnoho hodnot. Pro w imaginární je počet hodnot vždy nekonečný.

Nejjednodušší je druhá odmocnina.

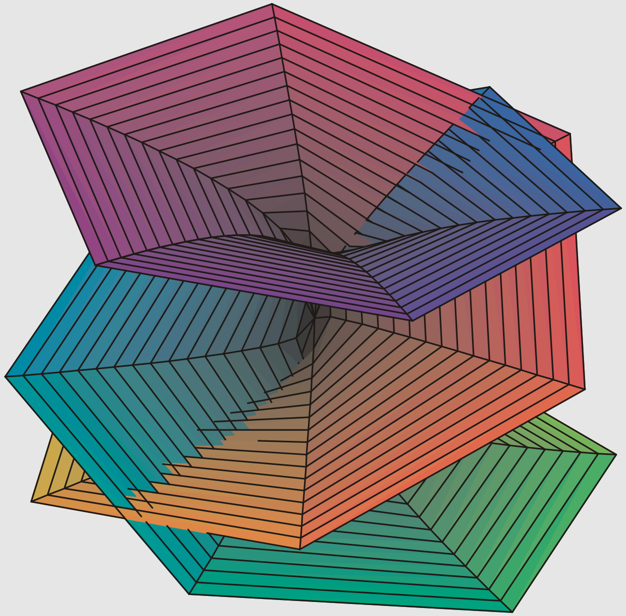
Nejjednodušší je druhá odmocnina.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Komplikovanější je třetí odmocnina.

Komplikovanější je třetí odmocnina.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z vlastností exponenciální funkce a logaritmu lze snadno odvodit následující vztahy mocniny s algebraickými operacemi (rovnost tu znamená rovnost mezi množinami hodnot):

$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}\,, \quad \left(z^w\right)^c = z^{wc}\,, \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w\,.$$

Následující vlastnosti platí pro jednoznačné větve mocniny, např. pro hlavní větev mocniny (v definici mocniny se vezme Log). Nejdříve vlastnosti funkce z^w proměnné z s daným exponentem w:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ten lze pro některá w rozšířit i na 0). Pro $w \neq 0$ je obor hodnot funkce celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(z^w)' = wz^{w-1}$.

Následující vlastnosti platí pro jednoznačné větve mocniny, např. pro hlavní větev mocniny (v definici mocniny se vezme Log). Nejdříve vlastnosti funkce z^w proměnné z s daným exponentem w:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ten lze pro některá w rozšířit i na 0). Pro $w \neq 0$ je obor hodnot funkce celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(z^w)' = wz^{w-1}$.

Nyní vlastnosti funkce w^z s proměnnou z a daným číslem $w \neq 0$, opět např. pro hlavní větev mocniny:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C}$ a její obor hodnot je celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(w^z)' = w^z \,\mathrm{Log}\, w$.

PŘÍKLADY

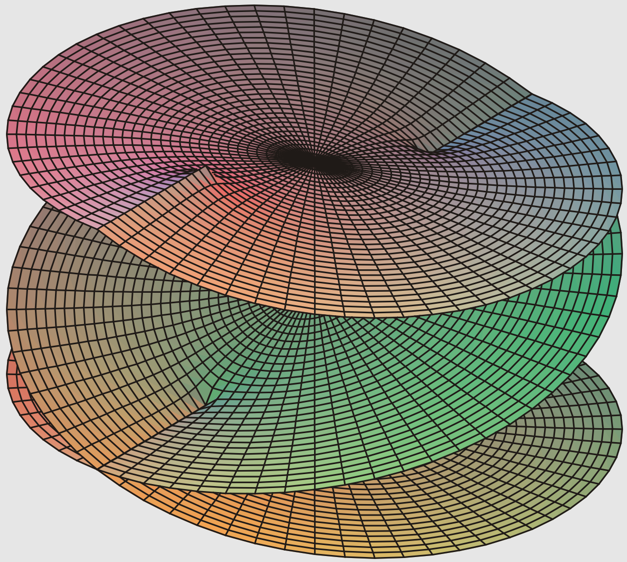
PŘÍKLADY

Příklad. Najděte všechna řešení rovnice $\sin z = \mathrm{i}$.

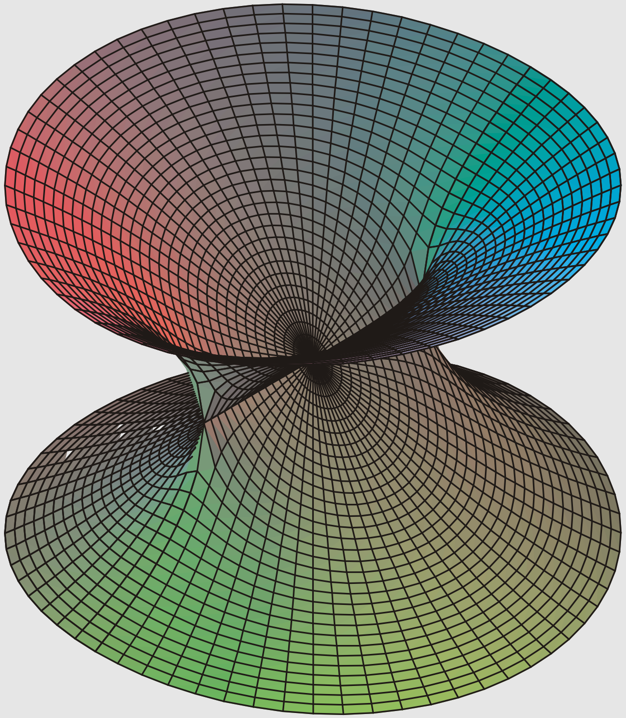
PŘÍKLADY

Příklad. Najděte všechna řešení rovnice $\sin z = \mathrm{i}$.

Řešení. Vyřešte obecně rovnici $\sin w = z$. [Návod: místo $\sin$ napište příslušné vyjádření pomocí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ a položte $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = q$; řešení získané kvadratické rovnice nyní stačí zlogaritmovat. Ve výsledku $w = -\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2})$ se vyskytují dvě mnohoznačné funkce. Vezmete-li u obou z nich hlavní větve, získáte hlavní větev $\arcsin$ v komplexním oboru; jaký má definiční obor?



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Příklad. Najděte všechny hodnoty $\log \mathrm{i}$.

Příklad. Najděte všechny hodnoty $\log \mathbf{i}$.

Příklad. Najděte všechny hodnoty mocnin

$$\mathbf{i}^{\mathrm{i}}\,, \quad ,(1-\mathbf{i})^{4\mathrm{i}}, \quad \mathbf{i}^{\sqrt{2}}, \quad 1^{-\mathrm{i}}, \quad (-1)^{1/\pi}\,.$$

Příklad. Najděte všechny hodnoty $\log \mathbf{i}$.

Příklad. Najděte všechny hodnoty mocnin

$$\mathbf{i}^{\mathrm{i}}, \quad , (1-\mathbf{i})^{4\mathrm{i}}, \quad \mathbf{i}^{\sqrt{2}}, \quad 1^{-\mathrm{i}}, \quad (-1)^{1/\pi}.$$

Příklad. Ukažte, že $\sin$ nabývá reálných hodnot jen na ose x a na přímkách $\Re(z) = \pi/2 + k\pi$.

Příklad. Najděte všechny hodnoty $\log \mathbf{i}$.

Příklad. Najděte všechny hodnoty mocnin

$$\mathbf{i}^{\mathrm{i}}, \quad ,(1-\mathbf{i})^{4\mathrm{i}}, \quad \mathbf{i}^{\sqrt{2}}, \quad 1^{-\mathrm{i}}, \quad (-1)^{1/\pi}.$$

Příklad. Ukažte, že $\sin$ nabývá reálných hodnot jen na ose x a na přímkách $\Re(z) = \pi/2 + k\pi$.

Příklad. Ukažte, že obor hodnot funkcí $\sin$ a $\cos$ je celé $\mathbb{C}$.

Příklad. Najděte všechny hodnoty $\log \mathrm{i}$.

Příklad. Najděte všechny hodnoty mocnin

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}}, \quad ,(1-\mathrm{i})^{4\mathrm{i}}, \quad \mathrm{i}^{\sqrt{2}}, \quad 1^{-\mathrm{i}}, \quad (-1)^{1/\pi}.$$

Příklad. Ukažte, že $\sin$ nabývá reálných hodnot jen na ose x a na přímkách $\Re(z) = \pi/2 + k\pi$.

Příklad. Ukažte, že obor hodnot funkcí $\sin$ a $\cos$ je celé $\mathbb{C}$.

Příklad. Ukažte, že pro $z \neq 0$ platí $\mathrm{e}^{\log(z)} = z$. Platí vždy rovnost $\log(\mathrm{e}^z) = z$?

Příklad. Najděte všechny hodnoty $\log \mathrm{i}$.

Příklad. Najděte všechny hodnoty mocnin

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}}, \quad , (1-\mathrm{i})^{4\mathrm{i}}, \quad \mathrm{i}^{\sqrt{2}}, \quad 1^{-\mathrm{i}}, \quad (-1)^{1/\pi}.$$

Příklad. Ukažte, že $\sin$ nabývá reálných hodnot jen na ose x a na přímkách $\Re(z) = \pi/2 + k\pi$.

Příklad. Ukažte, že obor hodnot funkcí $\sin$ a $\cos$ je celé $\mathbb{C}$.

Příklad. Ukažte, že pro $z \neq 0$ platí $\mathrm{e}^{\log(z)} = z$. Platí vždy rovnost $\log(\mathrm{e}^z) = z$?

Příklad. Spočtěte derivaci funkce Log. [Návod: Lze použít Cauchyovy-Riemannovy podmínky, nebo vzorec pro derivaci inverzní funkce, nebo zderivovat rovnost $\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(z)} = z$, víte-li, že Log má derivaci.]

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

Označme ještě pro jednoduchost reálné a imaginární části čísel $z_1,\ z_2$ takto

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1, \ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

Označme ještě pro jednoduchost reálné a imaginární části čísel $z_1, \ z_2$ takto

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Potom podle definice

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)),$$

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

Označme ještě pro jednoduchost reálné a imaginární části čísel $z_1,\ z_2$ takto

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Potom podle definice

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)),$$

a

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2 + i(\sin y_1\cos y_2 + \cos y_1\sin y_2)\right] \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right] \end{aligned}$$

Příklad. Dokažte, že funkce f proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.

Příklad. Dokažte, že funkce f proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.

Řešení. Označme nejdříve reálnou a imaginární část funkce f po řadě

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

a

$$u(x,y) = e^x \sin y.$$

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Dokažte, že funkce f proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.

Řešení. Označme nejdříve reálnou a imaginární část funkce f po řadě

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

a

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

Obě tyto funkce mají spojité parciální derivace všech řádů podle proměnných x, y, a mají tedy totální diferenciál. Postačí tedy dokázat, že jsou splněny Cachy-Riemannovy podmínky.

Příklad. Dokažte, že funkce f proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.

Řešení. Označme nejdříve reálnou a imaginární část funkce f po řadě

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

a

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

Obě tyto funkce mají spojité parciální derivace všech řádů podle proměnných x, y, a mají tedy totální diferenciál. Postačí tedy dokázat, že jsou splněny Cachy-Riemannovy podmínky.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Dokažte, že funkce f proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.

Řešení. Označme nejdříve reálnou a imaginární část funkce f po řadě

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

a

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

Obě tyto funkce mají spojité parciální derivace všech řádů podle proměnných x, y, a mají tedy totální diferenciál. Postačí tedy dokázat, že jsou splněny Cachy-Riemannovy podmínky.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Podle známé věty dostáváme

$$f'(x+iy) = \frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Příklad. Najděte funkci f holomorfní v $\mathbb{C}$, jejíž reálná část je

$$x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y),$$

kde $z = x + iy$.

Příklad. Najděte funkci f holomorfní v $\mathbb{C}$, jejíž reálná část je

$$x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y),$$

kde $z = x + iy$.

Řešení. Položíme $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y)$. Derivováním se snadno přesvědčíme, že u je harmonická, a tedy naše úloha má smysl. Dále je $\mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, a tedy úloha má řešení.

Příklad. Najděte funkci f holomorfní v $\mathbb{C}$, jejíž reálná část je

$$x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y),$$

kde $z = x + iy$.

Řešení. Položíme $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y)$. Derivováním se snadno přesvědčíme, že u je harmonická, a tedy naše úloha má smysl. Dále je $\mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, a tedy úloha má řešení.

Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek najdeme soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic, které musí funkce v splňovat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y).$$

Příklad. Najděte funkci f holomorfní v $\mathbb{C}$, jejíž reálná část je

$$x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y),$$

kde $z = x + iy$.

Řešení. Položíme $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y)$. Derivováním se snadno přesvědčíme, že u je harmonická, a tedy naše úloha má smysl. Dále je $\mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, a tedy úloha má řešení.

Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek najdeme soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic, které musí funkce v splňovat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y).$$

První rovnici integrujeme podle y, druhou podle x (integrační konstanta může v obou případech záviset na zbývající proměnné!):

$$u = 2xy + e^x(x\sin y - y\cos y) + \varphi(x),$$

$$v = 2xy + e^x(x\sin y - y\cos y) + \psi(y),$$

takže $\varphi(x) = \psi(y) = k \in \mathbb{R}$.

Nakonec je tedy

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= x^2 + i2xy - y^2 + e^x[x(\cos y + i\sin y) + iy(\cos y + i\sin y)] + ik \\ &= (x+iy)^2 + (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) + ik = z^2 + ze^z + ik. \end{aligned}$$

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx.$$

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx.$$

Řešení. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\cos kx = \Re\, e^{ikx},$$

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx.$$

Řešení. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\cos kx = \Re\, e^{ikx},$$

takže místo zadané řady můžeme vyšetřovat řadu

$$1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx},$$

což je geometrická řada, jejíž součet známe:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} &= \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{ix} - 1)}{(e^{-ix} - 1)(e^{-ix} - 1)} \\ &= \frac{-e^{(n+1)x} + e^{inx} - e^{-ix} + 1}{2(1 - \cos x)} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right). \end{aligned}$$

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx.$$

Řešení. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\cos kx = \Re\, e^{ikx},$$

takže místo zadané řady můžeme vyšetřovat řadu

$$1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx},$$

což je geometrická řada, jejíž součet známe:

$$\sum_{k=0}^{n} = \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{ix} - 1)}{(e^{-ix} - 1)(e^{-ix} - 1)}$$

$$= \frac{-e^{(n+1)x} + e^{inx} - e^{-ix} + 1}{2(1 - \cos x)} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right).$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.

Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.

Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

Odtud dostaneme rovnici

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.

Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

Odtud dostaneme rovnici

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Označme $w = e^{iz}$, pak hledáme řešení kvadratické rovnice

$$w^2 - 4w + 1 = 0,$$

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.

⬇

Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

⬇

Odtud dostaneme rovnici

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

⬇

Označme $w = e^{iz}$, pak hledáme řešení kvadratické rovnice

$$w^2 - 4w + 1 = 0,$$

⬇

což jsou čísla

$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \qquad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

⬇

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.

⬇

Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

⬇

Odtud dostaneme rovnici

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

⬇

Označme $w = e^{iz}$, pak hledáme řešení kvadratické rovnice

$$w^2 - 4w + 1 = 0,$$

⬇

což jsou čísla

$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \qquad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

⬇

Vrátíme-li se zpět k proměnné z :

$$e^{iz_1} = 2 + \sqrt{3}, \qquad e^{iz_2} = 2 - \sqrt{3}.$$

⬇

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.

Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

Odtud dostaneme rovnici

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Označme $w = e^{iz}$, pak hledáme řešení kvadratické rovnice

$$w^2 - 4w + 1 = 0,$$

což jsou čísla

$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \qquad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Vrátíme-li se zpět k proměnné z :

$$e^{iz_1} = 2 + \sqrt{3}, \qquad e^{iz_2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Logaritmováním

$$z_1 \in -i\,\mathrm{Log}(2+\sqrt{3}), \qquad z_2 \in -i\,\mathrm{Log}(2-\sqrt{3}).$$

Logaritmováním

$$z_1 \in -i\,\mathrm{Log}(2+\sqrt{3}), \qquad z_2 \in -i\,\mathrm{Log}(2-\sqrt{3}).$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}(2+\sqrt{3}) &= \log(2+\sqrt{3}) + i\,\mathrm{Arg}(2+\sqrt{3}) = \log(2+\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\mathrm{Log}(2-\sqrt{3}) &= \log(2-\sqrt{3}) + i\,\mathrm{Arg}(2-\sqrt{3}) = \log(2-\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Logaritmováním

$$z_1 \in -i\,\mathrm{Log}(2+\sqrt{3}), \qquad z_2 \in -i\,\mathrm{Log}(2-\sqrt{3}).$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(2+\sqrt{3}) &= \log(2+\sqrt{3}) + i\,\mathrm{Arg}(2+\sqrt{3}) = \log(2+\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\ \mathrm{Log}(2-\sqrt{3}) &= \log(2-\sqrt{3}) + i\,\mathrm{Arg}(2-\sqrt{3}) = \log(2-\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

A výsledek je

$$z = -i\log(2\pm\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$