

ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

Všechny základní reálné funkce reálné proměnné, s kterými jste se seznámili na začátku tohoto kurzu, lze rozšířit i na komplexní funkce komplexní proměnné.

U některých je rozšíření jednoduché, u některých je složitější, např. u obecné mocniny nebo u logaritmu.

Slovo „rozšíření“ znamená, že taková funkce $f(z)$ musí být pro komplexní z definována tak, aby pro reálná čísla z souhlasila s příslušnou funkcí reálné proměnné.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

SPECIÁLNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

V předchozích dvou kapitolách byly zavedeny některé speciální funkce:

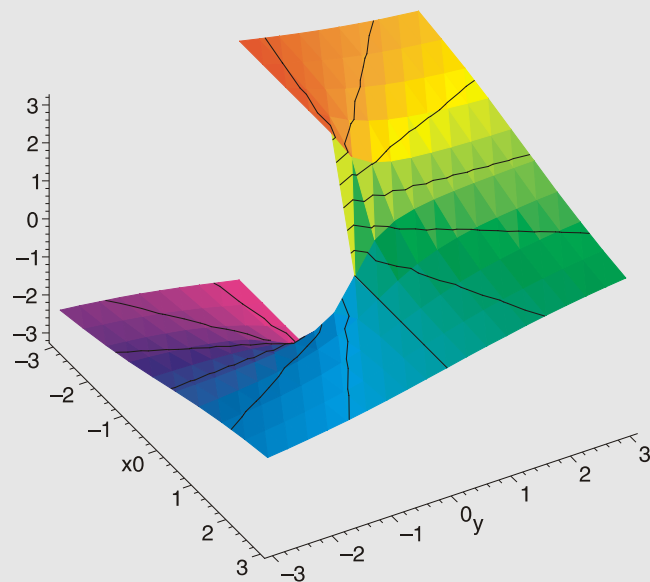
- $\Re(z)$ a $\Im(z)$ přiřazuje číslu z jeho reálnou, resp. imaginární, složku. Tyto spojité reálné funkce jsou definovány na \mathbb{C} a nejsou holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je \mathbb{R} .
- \bar{z} přiřazuje číslu z jeho komplexně sdružené číslo. Tato funkce je spojitá, prostá, definovaná na \mathbb{C} a není holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je \mathbb{C} , je sama k sobě inverzní.
- Absolutní hodnota $|z|$ je reálná funkce na \mathbb{C} , která není holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je interval $[0, \infty)$.
- Argument $\arg z$ čísla z je reálná mnohoznačná funkce s definičním oborem $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a s oborem hodnot \mathbb{R} .

Funkce argument lze znázornit jako nekonečné schodiště.



Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky 2π (přesněji interval typu $(a, a+2\pi]$ nebo $[a, a+2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

Jestliže se za obor hodnot zvolí interval $(-\pi, \pi]$, značí se tato funkce $\text{Arg } z$ a nazývá se **hlavní větev argumentu**. Funkce $\text{Arg } z$ je spojitá všude kromě záporné osy x a není holomorfní v žádném bodě.



- Polynom je funkce tvaru $c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$, kde $c_i \in \mathbb{C}$; racionální funkce je podíl dvou polynomů. Každý polynom je celistvá funkce. Racionální funkce je holomorfní funkce na celém svém definičním oboru, tj. všude na \mathbb{C} kromě konečně mnoha bodů (kořenů jmenovatele funkce).

LEKCE33-KEL
 exponenciální funkce
 trigonometrické funkce
 logaritmická funkce
 obecná mocnina
STANDARDY
 Poznámky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Příklady
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Otázky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Cvičení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Učení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Exponenciální funkce e^z se definuje rovností $e^z = e^{\Re(z)}(\cos \Im(z) + i \sin \Im(z))$.

Pro reálné číslo z je definice v souladu s reálnou funkcí e^z .

Vlastnosti exponenciální funkce:

1. Definiční obor je \mathbb{C} a obor hodnot je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. Funkce je celistvá, $(e^z)' = e^z$.

3. Funkce je periodická s periodou $2\pi i$.

4. Platí vztahy

$$\Re(e^z) = e^{\Re(z)} \cos(\Im(z)), \Im(e^z) = e^{\Re(z)} \sin(\Im(z)),$$

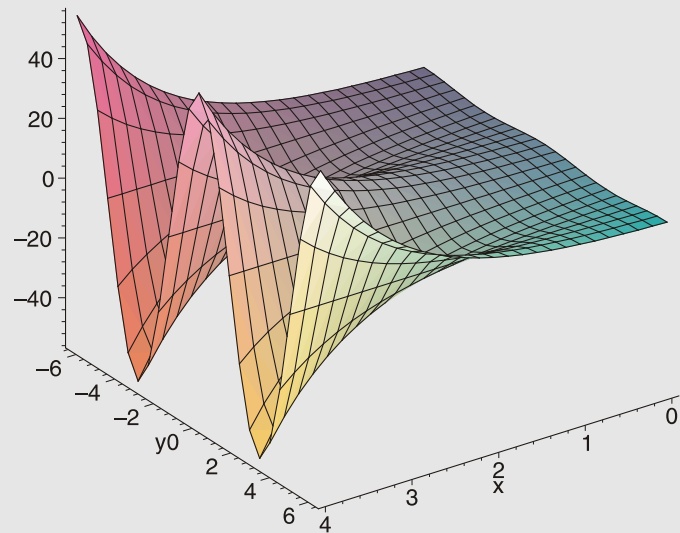
$$|e^z| = e^{\Re(z)}, \arg(e^z) = \Im(z) + 2k\pi, e^{\bar{z}} = \overline{e^z}.$$

5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

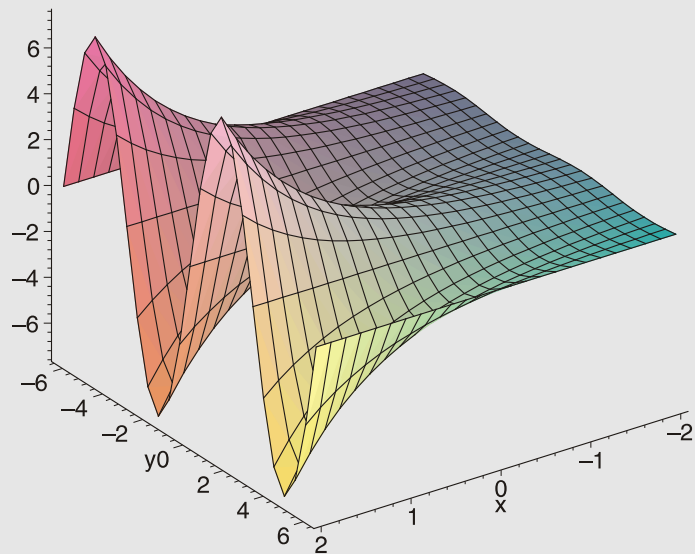
$$e^{z+w} = e^z e^w, e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}.$$

6. Funkce e^z je prostá na každém pásu šířky 2π rovnoběžném s osou x : buď $\Im(z) \in (a, a + 2\pi]$ nebo $\Im(z) \in [a, a + 2\pi)$.

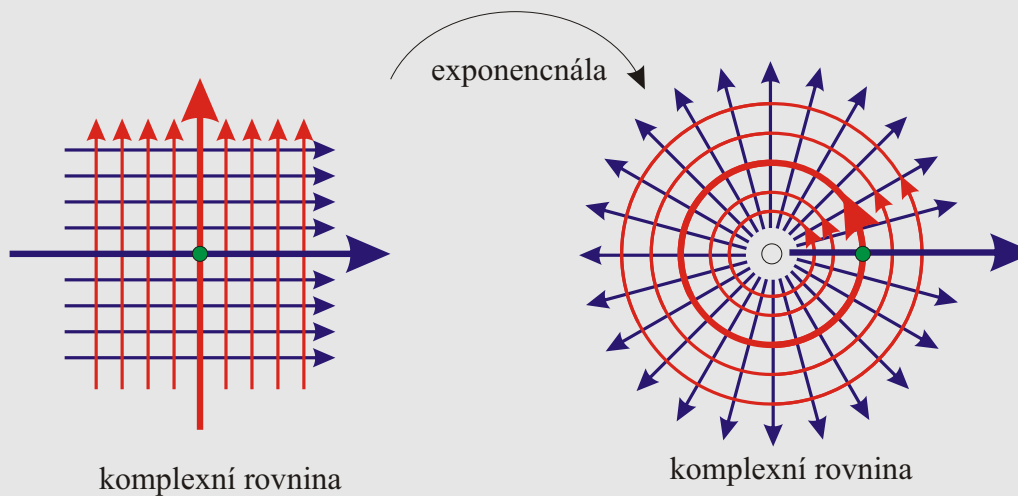
Důkazy předchozích vlastností jsou jednoduché a jsou přenechány čtenářům v *Otázkách*.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

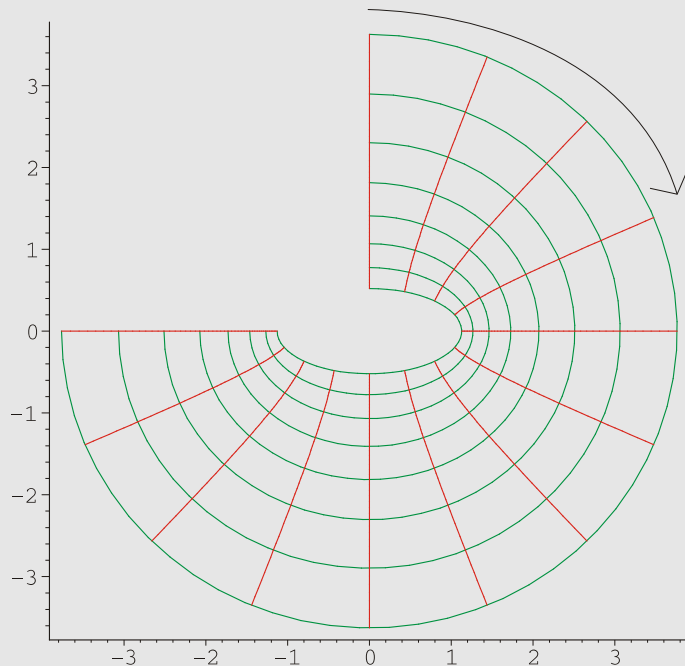
LEKCE33-KEL
 exponenciální funkce
 trigonometrické funkce
 logaritmická funkce
 obecná mocnina
STANDARDY
 Poznámky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Příklady
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Otázky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Cvičení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Učení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

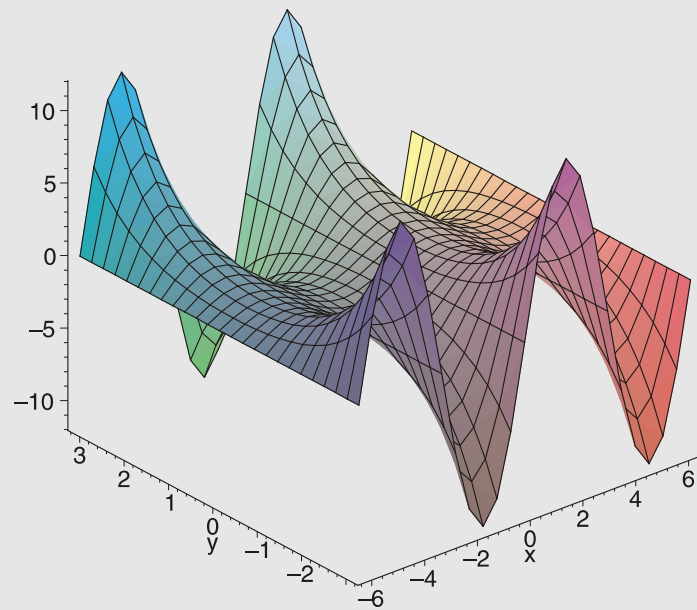
Když vypočtete ze vzorců definujících e^z a e^{-z} funkce $\sin y$, $\cos y$ (pro $x = 0$), dostanete rovnosti $\sin y = (e^{iy} - e^{-iy})/(2i)$, $\cos y = (e^{iy} + e^{-iy})/2$. ..

Následující definice je tedy rozšířením těchto vztahů na komplexní čísla:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE33-KEL

exponenciální funkce

trigonometrické funkce

logaritmická funkce

obecná mocnina

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

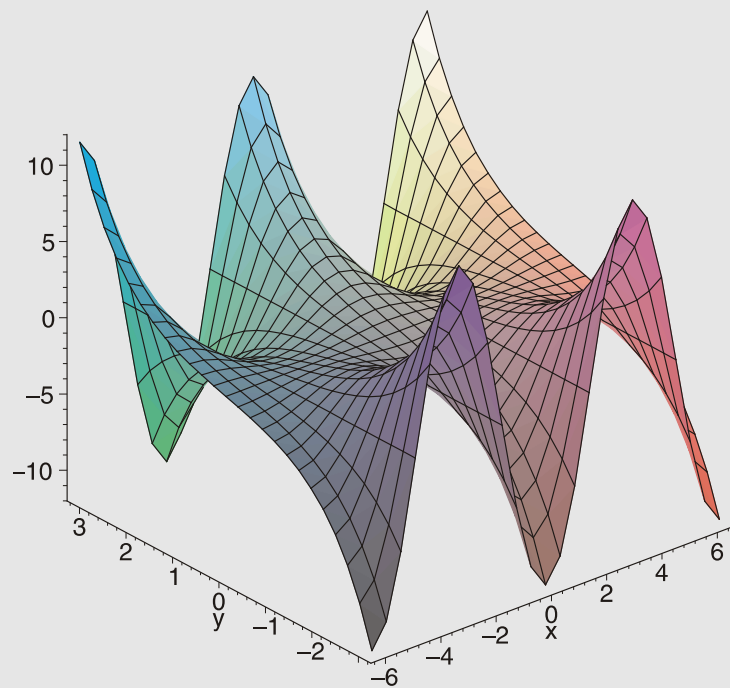
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

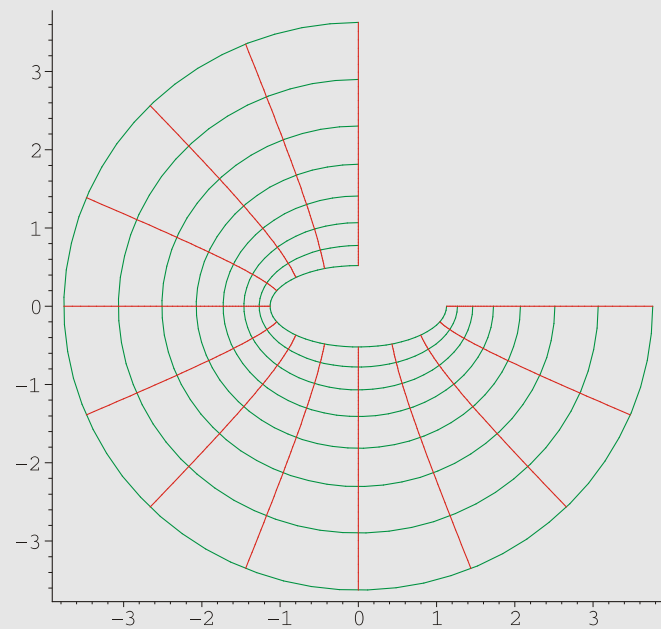
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

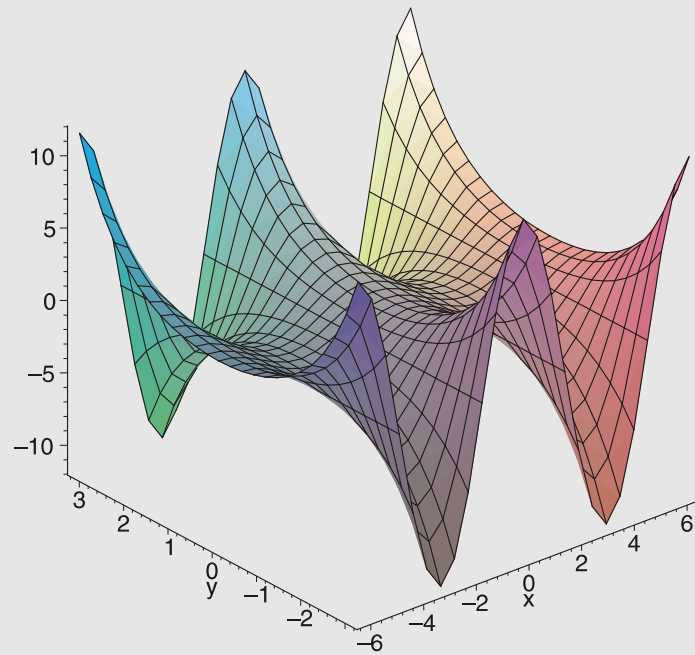
1 2 3 4 5 6 7 8 9



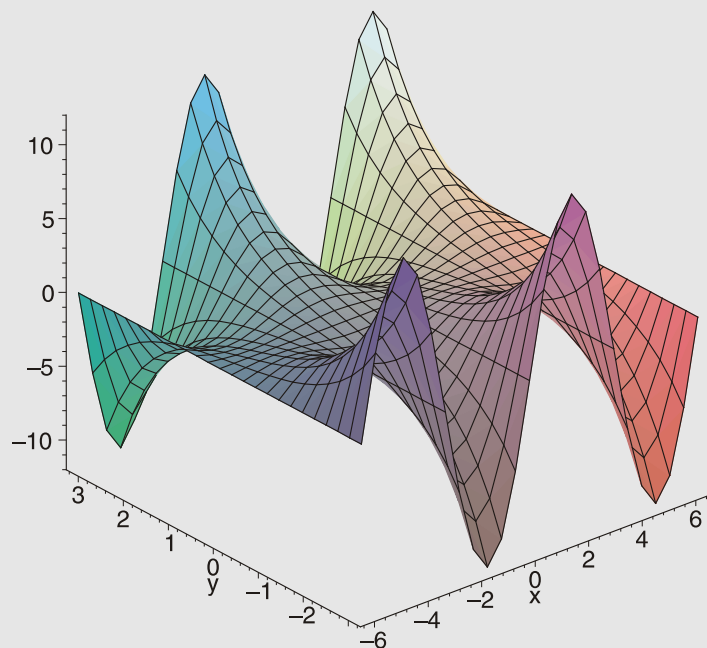
LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
Příklady
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
Otázky
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
Cvičení
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
Učení
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



a

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $y = y_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s reálnou osou.

$$\sin(x + iy_0) = \sin x \cosh y_0 + \cos x \sinh y_0$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici elipsy

$$\left(\frac{\xi}{\cosh y_0}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sinh y_0}\right)^2 = 1$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0 + iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici hyperboly

$$\left(\frac{\xi}{\sin x_0}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\cos x_0}\right)^2 = 1$$

Dále lze definovat (všude, kde to má smysl):

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

V následujících vlastnostech jsou pro jednodušší vyjádření použity reálné hyperbolicke funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Vlastnosti:

1. Definiční obor je \mathbb{C} a obor hodnot je \mathbb{C} .
2. Funkce \sin , \cos jsou celistvé, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
3. Funkce \sin , \cos jsou periodické s periodou 2π , \sin je funkce lichá, \cos je funkce sudá.

4. Platí vztahy

$$\Re(\sin z) = \sin(\Re(z)) \cosh(\Im(z)), \Re(\cos z) = \cos(\Re(z)) \cosh(\Im(z)),$$

$$\Im(\sin z) = \cos(\Re(z)) \sinh(\Im(z)), \Im(\cos z) = -\sin(\Re(z)) \sinh(\Im(z)),$$

$$\sin \bar{z} = \overline{\sin z}, \cos \bar{z} = \overline{\cos z},$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z)), |\cos z|^2 = \cos^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z)).$$

5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

6. Funkce $\sin z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2]$ nebo $\Re(z) \in [(2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$.

7. Funkce $\cos z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in (k\pi, (k+1)\pi]$ nebo $\Re(z) \in [k\pi, (k+1)\pi)$.

[Poznámky 2](#) [Příklady 2](#) [Otázky 2](#) [2](#)

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Logaritmus v reálném oboru se definuje jako inverzní funkce exponenciální funkce.

Ta je prostá, což však neplatí v komplexním oboru.

Když se zúží definiční obor funkce e^z na pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$, bude funkce prostá a má tam inverzní funkci:

Funkce Log je inverzní funkcí k e^z pro $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

To znamená, že je-li $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$ a $\text{Log}(w) = z$, pak platí

$$e^{\text{Log}(w)} = w, \quad \text{Log}(e^z) = z.$$

Jestliže $\text{Log}(w) = x + iy$, $w = u + iv$, plynou z první rovnosti vztahy $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ a tedy $x = \log |w|$, $y = \text{Arg } w$. Tím se dostává popis hodnot funkce Log, který se dá také vzít za definici Log

$$\text{Log}(w) = \log |w| + i \text{Arg}(w).$$

Vlastnosti logaritmu:

1. Definiční obor je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a obor hodnot je pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

2. Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\text{Log}'(z) = 1/z$.

3. Platí vztahy

$$\Re(\text{Log}(z)) = \log |z|, \quad \Im(\text{Log}(z)) = \text{Arg}(z), \quad \text{Log}(\bar{z}) = \overline{\text{Log}(z)}.$$

4. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$\text{Log}(zw) = \text{Log}(z) + \text{Log}(w), \quad \text{Log}(z/w) = \text{Log}(z) - \text{Log}(w).$$

5. Funkce Log je prostá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

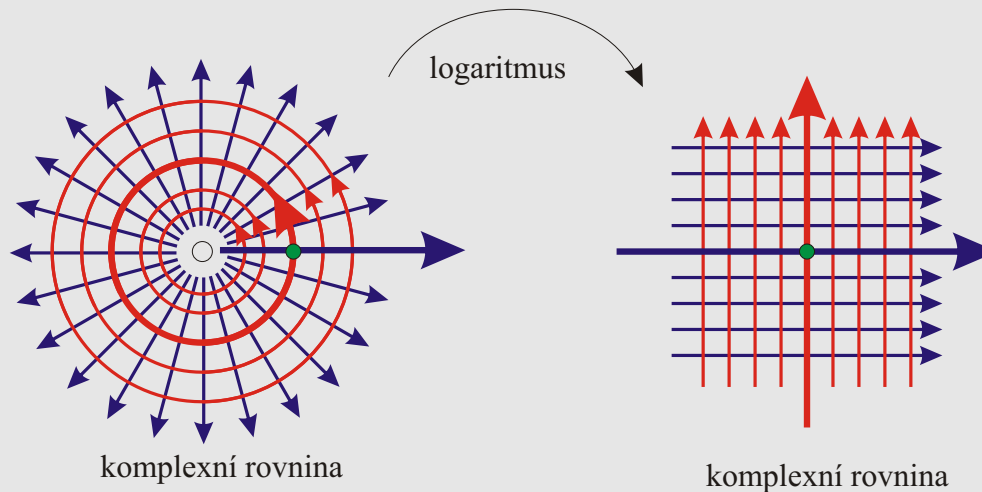
Pokud se nezúží definiční obor, funkce e^z není prostá a řešení rovnice $e^z = w$, pro dané w , je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi i$).

Množina všech těchto řešení se může označit jako $\log w$ a dostane se mnohoznačná funkce. Funkce Log se pak nazývá **hlavní větev logaritmu**.

Z této definice log vyplývá i její popis

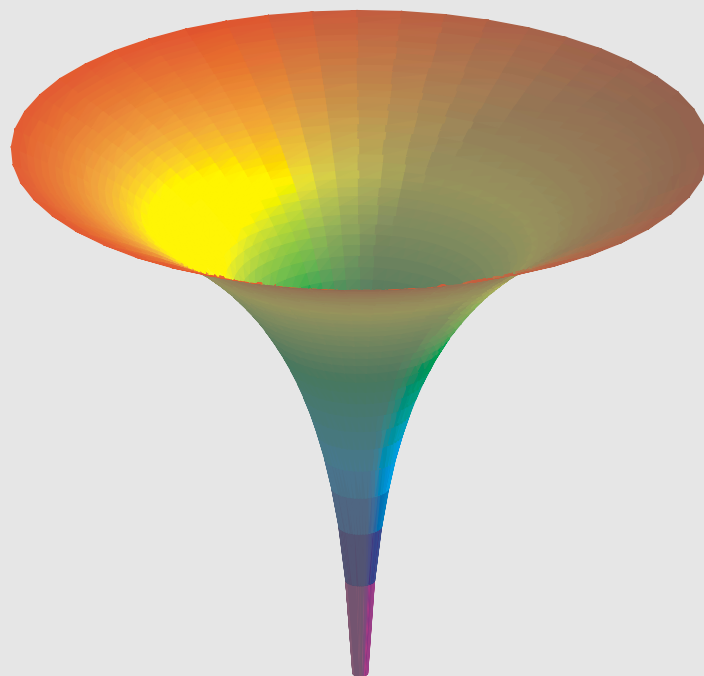
$$\log(w) = \log |w| + i \arg(w),$$

z kterého se snadno odvodí další vlastnosti (viz *Otázky*).





LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



[Poznámky 3](#) [Příklady 3](#) [Otázky 3](#) [3](#)

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBEČNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = e^{w \log z}.$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

Pokud je potřeba mít jen jednu hodnotu, je třeba se omezit na nějakou jednoznačnou větev logaritmu, např. na Log . Nicméně, bývá výhodné pracovat se všemi hodnotami mocniny, např. při řešení rovnic (jinak se může nějaké řešení „ztratit“).

Jednotlivé hodnoty $\log z$ se liší o $2k\pi i$, což je perioda exponenciální funkce. Pokud je tedy číslo $w = n$ celé reálné, má z^n jedinou hodnotu, která odpovídá součinu n čísel z nebo $1/z$, nebo se rovná 1 pro $n = 0$.

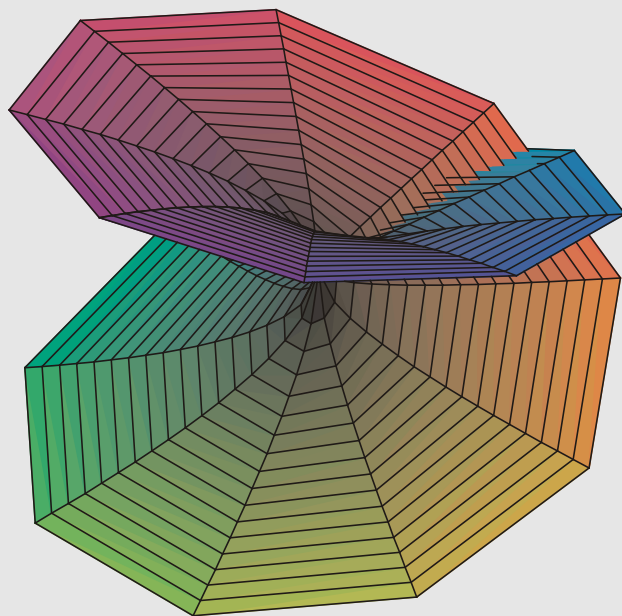
Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Potom se exponent v definici z^w rovná $(\log |z| + i \text{Arg}(z) + 2k\pi i)/n$ a existuje právě n hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

To znamená, že v tomto případě má mocnina $z^{1/n}$ přesně n hodnot.

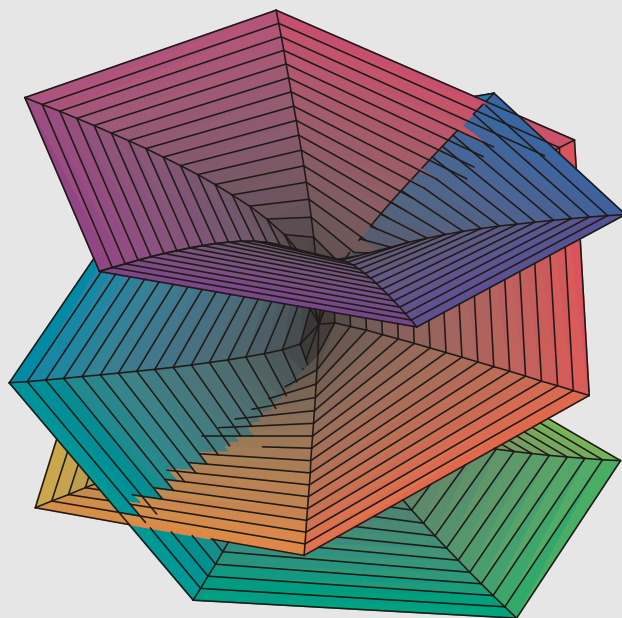
Tato n -značná funkce se nazývá **n -tá odmocnina** a značí se jako obvykle $\sqrt[n]{z}$. Hlavní větev odmocniny se získá volbou $k = 0$.

Předchozí úvahy lze přenést na případ, kdy w je racionální číslo a mocnina z^w má pak konečně mnoho hodnot. Jakmile je w iracionální, má již mocnina z^w spočetně mnoho hodnot. Pro w imaginární je počet hodnot vždy nekonečný.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Z vlastností exponenciální funkce a logaritmu lze snadno odvodit následující vztahy mocniny s algebraickými operacemi (rovnost tu znamená rovnost mezi množinami hodnot):

$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}, \quad (z^w)^c = z^{wc}, \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w.$$

Následující vlastnosti platí pro jednoznačné větve mocniny, např. pro hlavní větev mocniny (v definici mocniny se vezme Log). Nejdříve vlastnosti funkce z^w proměnné z s daným exponentem w :

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ten lze pro některá w rozšířit i na 0). Pro $w \neq 0$ je obor hodnot funkce celé \mathbb{C} .
2. Funkce je holomorfní, $(z^w)' = w z^{w-1}$.

Nyní vlastnosti funkce w^z s proměnnou z a daným číslem $w \neq 0$, opět např. pro hlavní větev mocniny:

1. Definiční obor funkce je \mathbb{C} a její obor hodnot je celé \mathbb{C} .
2. Funkce je holomorfní, $(w^z)' = w^z \operatorname{Log} w$.

Příklady 4 Otázky 4 4 5 6

STANDARDY z kapitoly

ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ARGUMENT

Argument $\arg z$ čísla z je reálná mnohoznačná funkce s definičním oborem $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a s oborem hodnot \mathbb{R} .

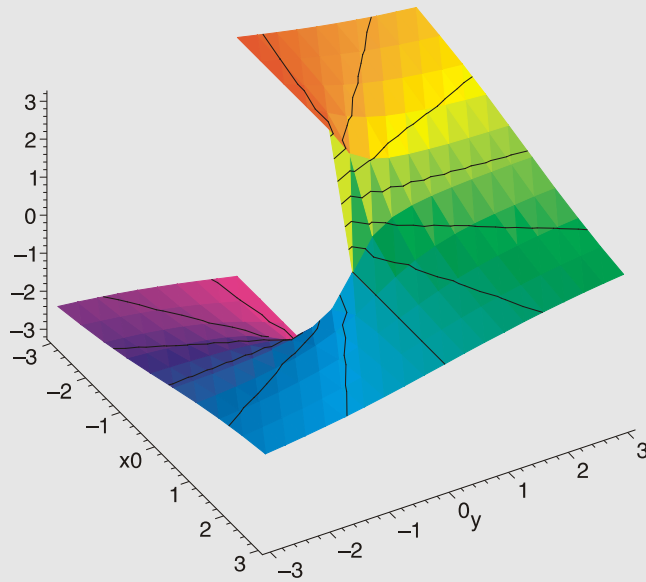
Funkce argument lze znázornit jako nekonečné schodiště.



Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky 2π (přesněji interval typu $(a, a + 2\pi]$ nebo $[a, a + 2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se za obor hodnot zvolí interval $(-\pi, \pi]$, značí se tato funkce $\text{Arg } z$ a nazývá se **hlavní větev argumentu**. Funkce $\text{Arg } z$ je spojitá všude kromě záporné osy x a není holomorfní v žádném bodě.



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Exponenciální funkce e^z se definuje rovností $e^z = e^{\Re(z)}(\cos \Im(z) + i \sin \Im(z))$.

Vlastnosti exponenciální funkce:

1. Definiční obor je \mathbb{C} a obor hodnot je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. Funkce je celistvá, $(e^z)' = e^z$.

3. Funkce je periodická s periodou $2\pi i$.

4. Platí vztahy

$$\Re(e^z) = e^{\Re(z)} \cos(\Im(z)), \Im(e^z) = e^{\Re(z)} \sin(\Im(z)),$$

$$|e^z| = e^{\Re(z)}, \arg(e^z) = \Im(z) + 2k\pi, e^{\bar{z}} = \overline{e^z}.$$

5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$e^{z+w} = e^z e^w, e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}.$$

6. Funkce e^z je prostá na každém pásu šířky 2π rovnoběžném s osou x : buď $\Im(z) \in (a, a + 2\pi]$ nebo $\Im(z) \in [a, a + 2\pi)$.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmicke funkce
obecná mocnina
STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

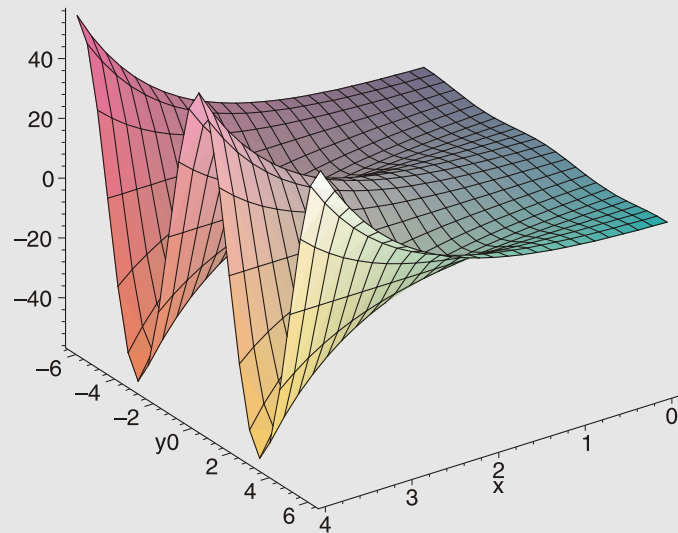
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

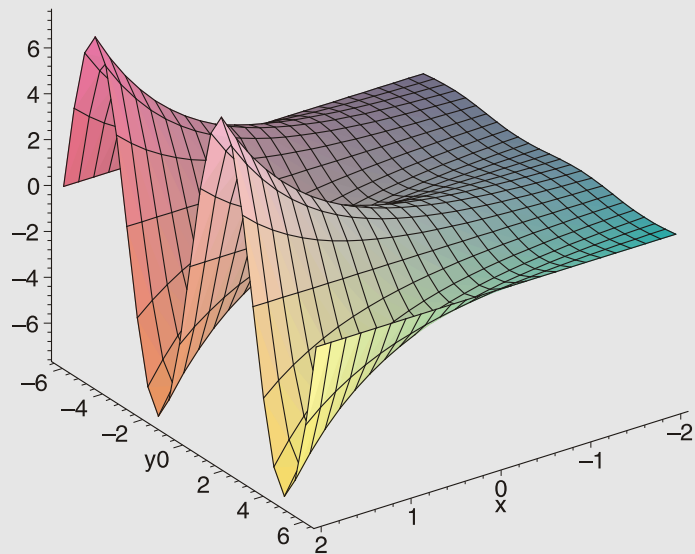
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

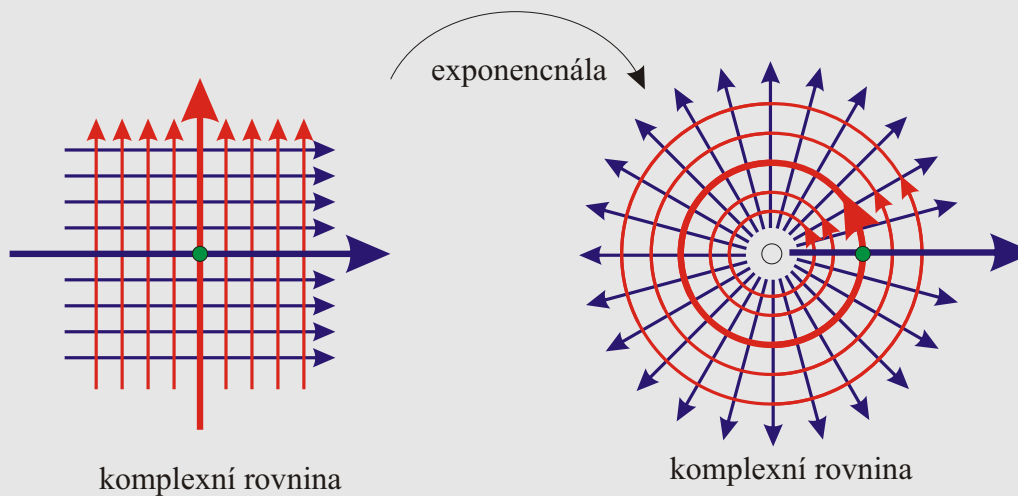
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



komplexní rovnina

komplexní rovnina

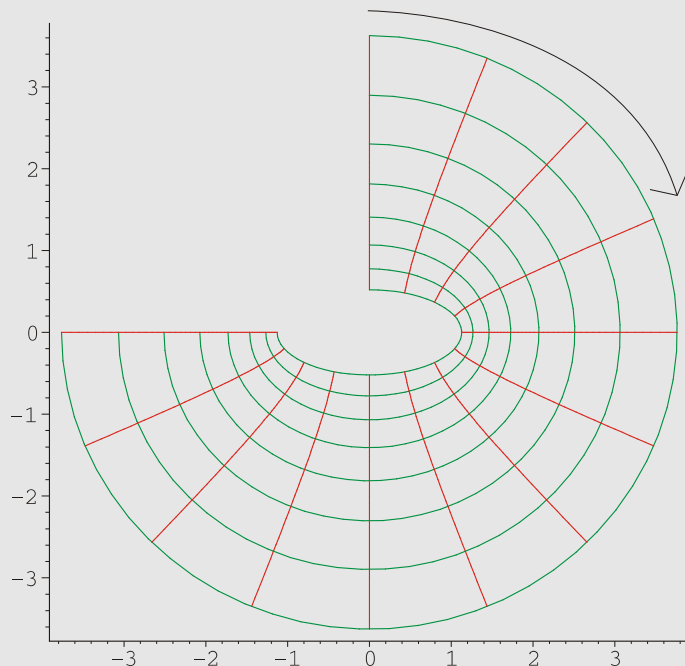
LEKCE33-KEL
 exponenciální funkce
 trigonometrické funkce
 logaritmická funkce
 obecná mocnina
STANDARDY
 Poznámky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Příklady
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Otázky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Cvičení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Učení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

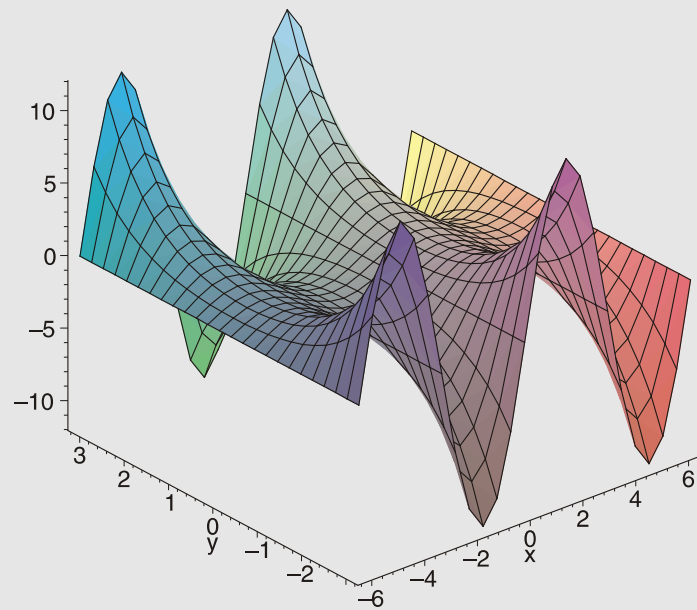
Když vypočtete ze vzorců definujících e^z a e^{-z} funkce $\sin y$, $\cos y$ (pro $x = 0$), dostanete rovnosti $\sin y = (e^{iy} - e^{-iy})/(2i)$, $\cos y = (e^{iy} + e^{-iy})/2$. ..

Následující definice je tedy rozšířením těchto vztahů na komplexní čísla:

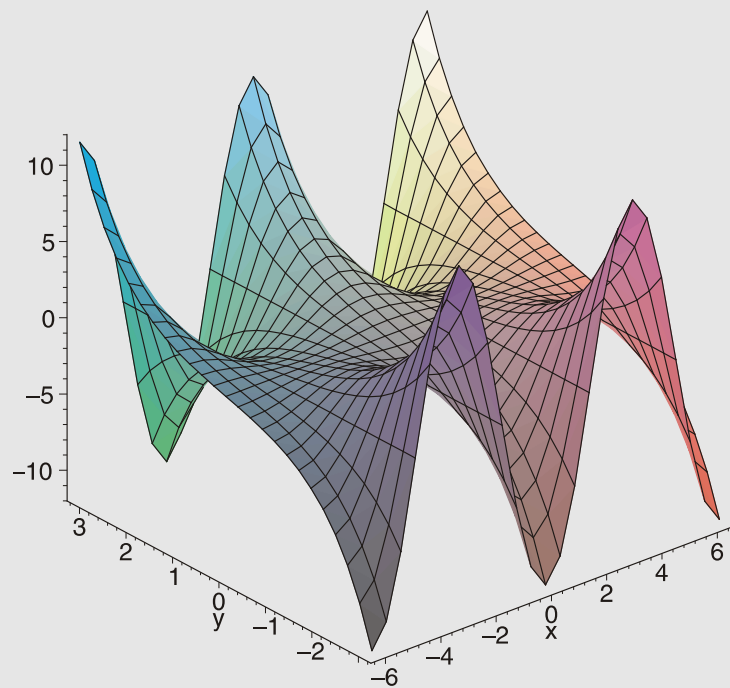
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$



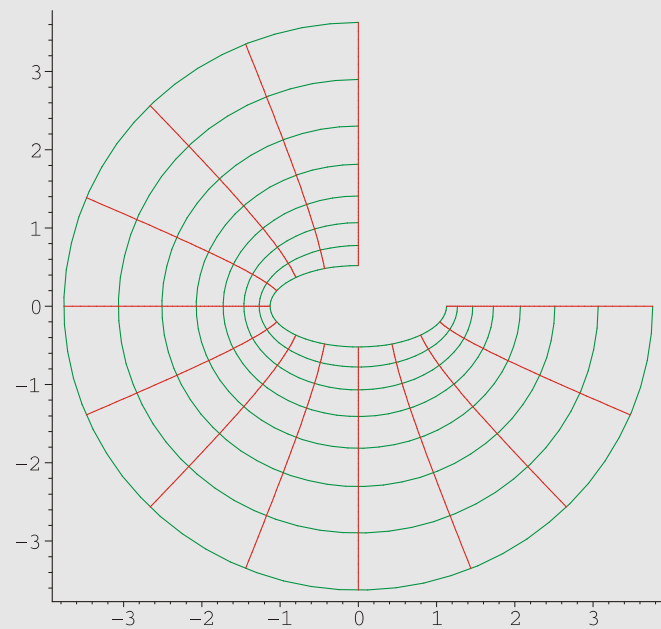
LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



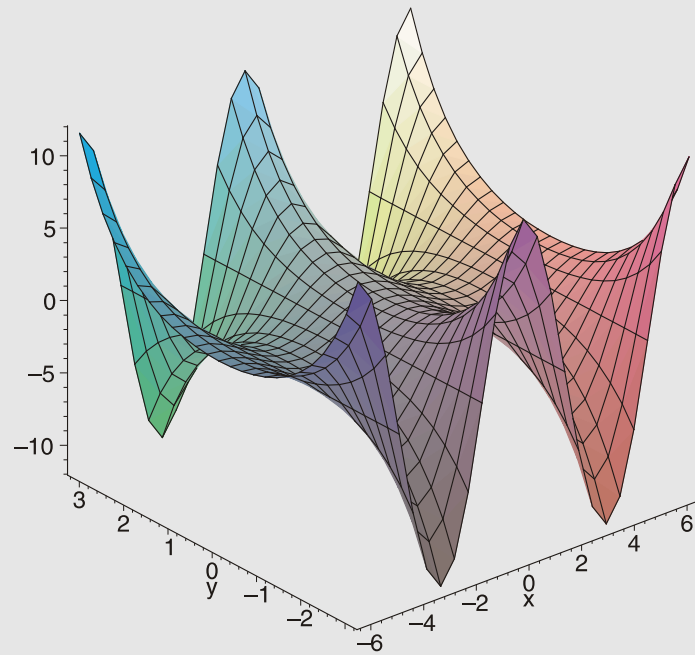
LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



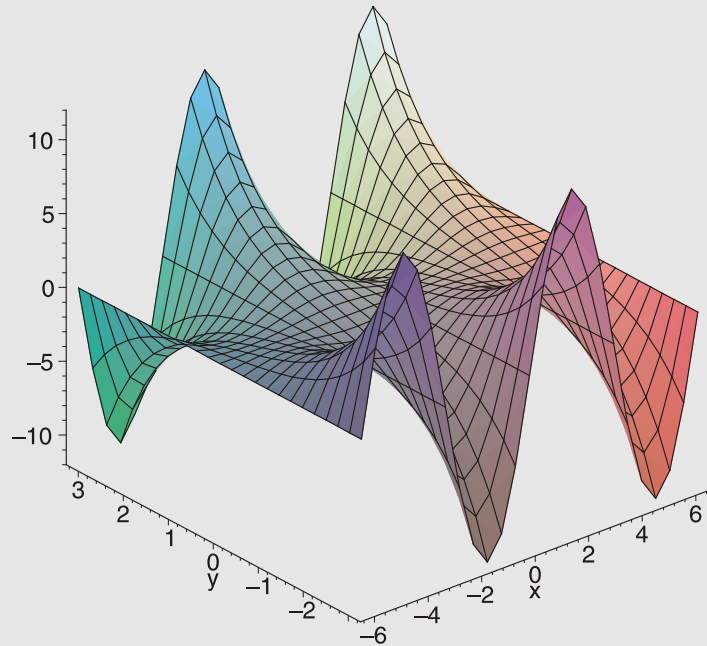
LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
Příklady
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
Otázky
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
Cvičení
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
Učení
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$$

a

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $y = y_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s reálnou osou.

$$\sin(x + iy_0) = \sin x \cosh y_0 + \cos x \sinh y_0$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici elipsy

$$\left(\frac{\xi}{\cosh y_0}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sinh y_0}\right)^2 = 1$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0 + iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici hyperboly

$$\left(\frac{\xi}{\sin x_0}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\cos x_0}\right)^2 = 1$$

Dále lze definovat (všude, kde to má smysl):

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

V následujících vlastnostech jsou pro jednodušší vyjádření použity reálné hyperbolicke funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Vlastnosti:

1. Definiční obor je \mathbb{C} a obor hodnot je \mathbb{C} .
2. Funkce \sin, \cos jsou celistvé, $\sin' = \cos, \cos' = -\sin$.
3. Funkce \sin, \cos jsou periodické s periodou 2π , \sin je funkce lichá, \cos je funkce sudá.

4. Platí vztahy

$$\Re(\sin z) = \sin(\Re(z)) \cosh(\Im(z)), \Re(\cos z) = \cos(\Re(z)) \cosh(\Im(z)),$$

$$\Im(\sin z) = \cos(\Re(z)) \sinh(\Im(z)), \Im(\cos z) = -\sin(\Re(z)) \sinh(\Im(z)),$$

$$\sin \bar{z} = \overline{\sin z}, \cos \bar{z} = \overline{\cos z},$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z)), |\cos z|^2 = \cos^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z)).$$

5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

6. Funkce $\sin z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2]$ nebo $\Re(z) \in [(2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$.

7. Funkce $\cos z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in (k\pi, (k+1)\pi]$ nebo $\Re(z) \in [k\pi, (k+1)\pi)$.

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Funkce Log je inverzní funkcí k e^z pro $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

To znamená, že je-li $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$ a $\text{Log}(w) = z$, pak platí

$$e^{\text{Log}(w)} = w, \quad \text{Log}(e^z) = z.$$

Jestliže $\text{Log}(w) = x + iy$, $w = u + iv$, plynou z první rovnosti vztahy $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ a tedy $x = \log |w|$, $y = \text{Arg } w$. Tím se dostává popis hodnot funkce Log , který se dá také vzít za definici Log

$$\text{Log}(w) = \log |w| + i \text{Arg}(w).$$

Vlastnosti logaritmu:

1. Definiční obor je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a obor hodnot je pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

2. Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\text{Log}'(z) = 1/z$.

3. Platí vztahy

$$\Re(\text{Log}(z)) = \log |z|, \quad \Im(\text{Log}(z)) = \text{Arg}(z), \quad \text{Log}(\bar{z}) = \overline{\text{Log}(z)}.$$

4. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$\text{Log}(zw) = \text{Log}(z) + \text{Log}(w), \quad \text{Log}(z/w) = \text{Log}(z) - \text{Log}(w).$$

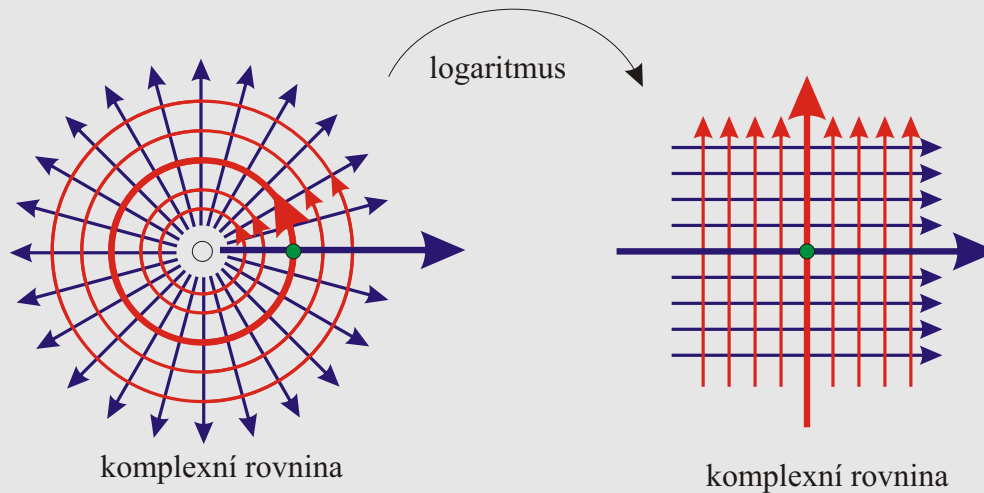
5. Funkce Log je prostá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Pokud se nezúží definiční obor, funkce e^z není prostá a řešení rovnice $e^z = w$, pro dané w , je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi i$).

Množina všech těchto řešení se může označit jako $\log w$ a dostane se mnohoznačná funkce. Funkce Log se pak nazývá **hlavní větev logaritmu**.

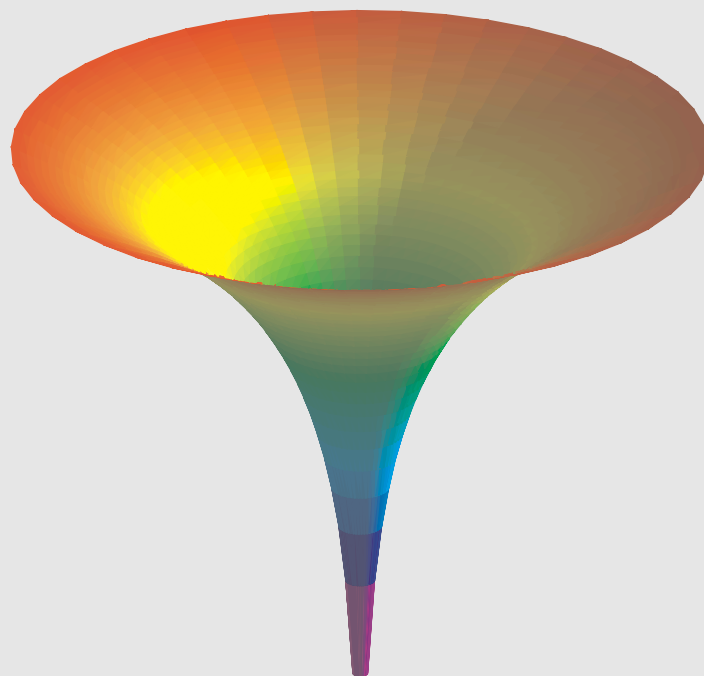
Z této definice \log vyplývá i její popis

$$\log(w) = \log |w| + i \arg(w) .$$





LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBEČNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = e^{w \log z}.$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

Pokud je potřeba mít jen jednu hodnotu, je třeba se omezit na nějakou jednoznačnou větev logaritmu, např. na Log . Nicméně, bývá výhodné pracovat se všemi hodnotami mocniny, např. při řešení rovnic (jinak se může nějaké řešení „ztratit“).

Jednotlivé hodnoty $\log z$ se liší o $2k\pi i$, což je perioda exponenciální funkce. Pokud je tedy číslo $w = n$ celé reálné, má z^n jedinou hodnotu, která odpovídá součinu n čísel z nebo $1/z$, nebo se rovná 1 pro $n = 0$.

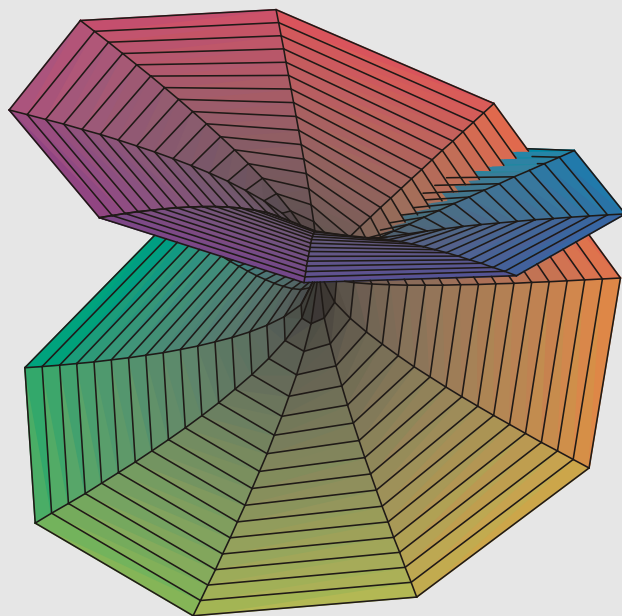
Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Potom se exponent v definici z^w rovná $(\log |z| + i \text{Arg}(z) + 2k\pi i)/n$ a existuje právě n hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

To znamená, že v tomto případě má mocnina $z^{1/n}$ přesně n hodnot.

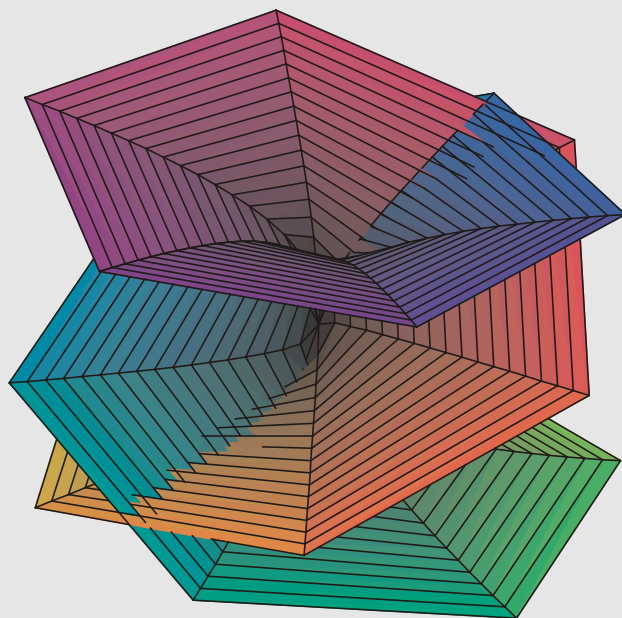
Tato n -značná funkce se nazývá **n -tá odmocnina** a značí se jako obvykle $\sqrt[n]{z}$. Hlavní větev odmocniny se získá volbou $k = 0$.

Předchozí úvahy lze přenést na případ, kdy w je racionální číslo a mocnina z^w má pak konečně mnoho hodnot. Jakmile je w iracionální, má již mocnina z^w spočetně mnoho hodnot. Pro w imaginární je počet hodnot vždy nekonečný.

LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE33-KEL
exponenciální funkce
trigonometrické funkce
logaritmická funkce
obecná mocnina
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Z vlastností exponenciální funkce a logaritmu lze snadno odvodit následující vztahy mocniny s algebraickými operacemi (rovnost tu znamená rovnost mezi množinami hodnot):

$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}, \quad (z^w)^c = z^{wc}, \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w.$$

Následující vlastnosti platí pro jednoznačné větve mocniny, např. pro hlavní větev mocniny (v definici mocniny se vezme Log). Nejdříve vlastnosti funkce z^w proměnné z s daným exponentem w :

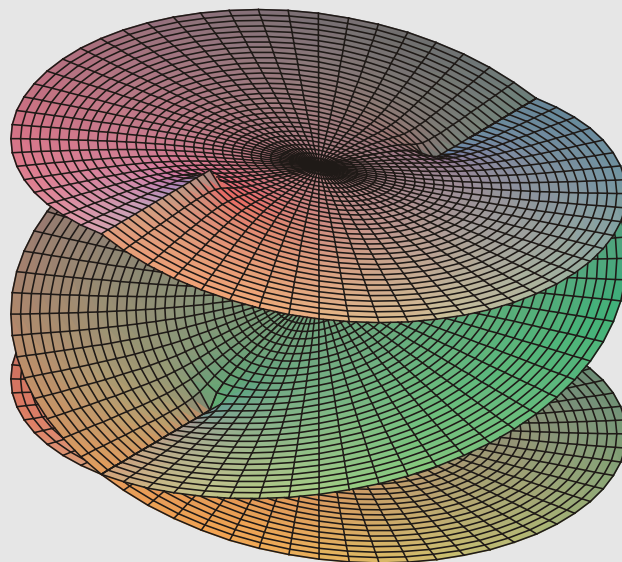
1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ten lze pro některá w rozšířit i na 0). Pro $w \neq 0$ je obor hodnot funkce celé \mathbb{C} .
2. Funkce je holomorfní, $(z^w)' = w z^{w-1}$.

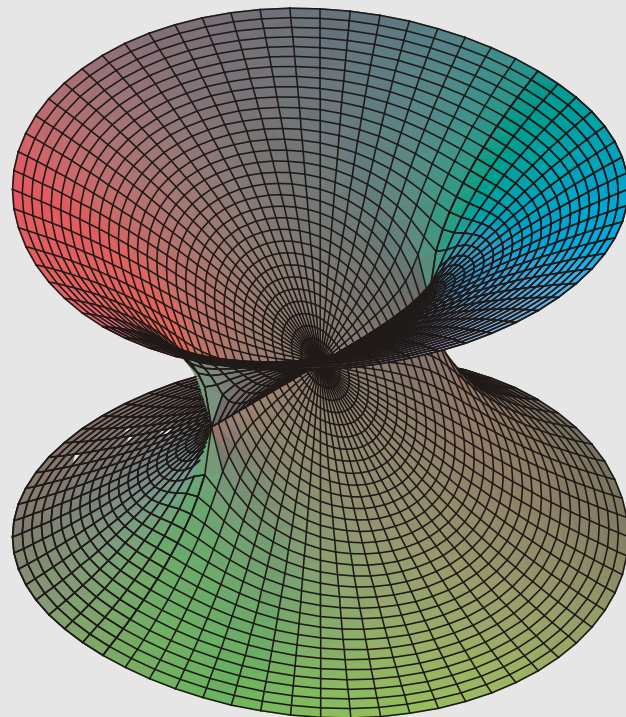
Nyní vlastnosti funkce w^z s proměnnou z a daným číslem $w \neq 0$, opět např. pro hlavní větve mocniny:

1. Definiční obor funkce je \mathbb{C} a její obor hodnot je celé \mathbb{C} .
2. Funkce je holomorfní, $(w^z)' = w^z \operatorname{Log} w$.

Příklad. Najděte všechna řešení rovnice $\sin z = i$.

Řešení. Vyřešte obecně rovnici $\sin w = z$. [Návod: místo \sin napište příslušné vyjádření pomocí e^{iz} a položte $e^{iz} = q$; řešení získané kvadratické rovnice nyní stačí zlogaritmovat. Ve výsledku $w = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2})$ se vyskytnou dvě mnohoznačné funkce. Vezmete-li u obou z nich hlavní větve, získáte hlavní větve arcsinu v komplexním oboru; jaký má definiční obor?]





Příklad. Najděte všechny hodnoty $\log i$.

Příklad. Najděte všechny hodnoty mocnin

$$i^i, \quad , (1 - i)^{4i}, \quad i^{\sqrt{2}}, \quad 1^{-i}, \quad (-1)^{1/\pi}.$$

Příklad. Ukažte, že \sin nabývá reálných hodnot jen na ose x a na přímkách $\Re(z) = \pi/2 + k\pi$.

Příklad. Ukažte, že obor hodnot funkcí \sin a \cos je celé \mathbb{C} .

Příklad. Ukažte, že pro $z \neq 0$ platí $e^{\log(z)} = z$. Platí vždy rovnost $\log(e^z) = z$?

Příklad. Spočtěte derivaci funkce Log . [Návod: Lze použít Cauchyovy-Riemannovy podmínky, nebo vzorec pro derivaci inverzní funkce, nebo zderivovat rovnost $e^{\text{Log}(z)} = z$, víte-li, že Log má derivaci.]

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla z_1, z_2 platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

Označme ještě pro jednoduchost reálné a imaginární části čísel z_1, z_2 takto

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Potom podle definice

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)),$$

a

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] \end{aligned}$$

Příklad. Dokažte, že funkce f proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

je holomorfní v \mathbb{C} a spočítejte její derivaci.

Řešení. Označme nejdříve reálnou a imaginární část funkce f po řadě

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

a

$$v(x, y) = e^x \sin y.$$

Obě tyto funkce mají spojité parciální derivace všech řádů podle proměnných x, y , a mají tedy totální diferenciál. Postačí tedy dokázat, že jsou splněny Cauchy-Riemannovy podmínky.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Podle známé věty dostáváme

$$f'(x + iy) = \frac{\partial f(x + iy)}{\partial x} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Příklad. Najděte funkci f holomorfní v \mathbb{C} , jejíž reálná část je

$$x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y),$$

kde $z = x + iy$.

Řešení. Položíme $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y)$. Derivováním se snadno přesvědčíme, že u je harmonická, a tedy naše úloha má smysl. Dále je \mathbb{C} jednoduše souvislá oblast, a tedy úloha má řešení.

Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek najdeme soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic, které musí funkce v splňovat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + e^x(x \sin y - \sin y + y \cos y).$$

První rovnici integrujeme podle y , druhou podle x (integrační konstanta může v obou případech záviset na zbývajícím proměnné!):

$$u = 2xy + e^x(x \sin y - y \cos y) + \varphi(x),$$

$$v = 2xy + e^x(x \sin y - y \cos y) + \psi(y),$$

takže $\varphi(x) = \psi(y) = k \in \mathbb{R}$.

Nakonec je tedy

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ &= x^2 + i2xy - y^2 + e^x[x(\cos y + i \sin y) + iy(\cos y + i \sin y)] + ik \\ &= (x + iy)^2 + (x + iy)e^x(\cos y + i \sin y) + ik = z^2 + ze^z + ik. \end{aligned}$$

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte

$$1 + \cos x + \dots + \cos nx.$$

Řešení. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\cos kx = \Re e^{ikx},$$

takže místo zadané řady můžeme vyšetřovat řadu

$$1 + e^{ix} + \dots + e^{inx},$$

což je geometrická řada, jejíž součet známe:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n &= \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{ix} - 1)}{(e^{-ix} - 1)(e^{-ix} - 1)} \\ &= \frac{-e^{(n+1)x} + e^{inx} - e^{-ix} + 1}{2(1 - \cos x)} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z , pro něž platí $\cos z = 2$.

Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

Odtud dostaneme rovnici

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Označme $w = e^{iz}$, pak hledáme řešení kvadratické rovnice

$$w^2 - 4w + 1 = 0,$$

což jsou čísla

$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \quad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Vrátíme-li se zpět k proměnné z :

$$e^{iz_1} = 2 + \sqrt{3}, \quad e^{iz_2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Logaritmováním

$$z_1 \in -i \operatorname{Log}(2 + \sqrt{3}), \quad z_2 \in -i \operatorname{Log}(2 - \sqrt{3}).$$

$$\operatorname{Log}(2 + \sqrt{3}) = \log(2 + \sqrt{3}) + i \operatorname{Arg}(2 + \sqrt{3}) = \log(2 + \sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Log}(2 - \sqrt{3}) = \log(2 - \sqrt{3}) + i \operatorname{Arg}(2 - \sqrt{3}) = \log(2 - \sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A výsledek je

$$z = -i \log(2 \pm \sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$