# ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

Všechny základní reálné funkce reálné proměnné, s kterými jste se seznámili na začátku tohoto kurzu, lze rozšířit i na komplexní funkce komplexní proměnné.

U některých je rozšíření jednoduché, u některých je složitější, např. u obecné mocniny nebo u logaritmu.

Slovo „rozšíření" znamená, že taková funkce $f(z)$ musí být pro komplexní $z$ definována tak, aby pro reálná čísla $z$ souhlasila s příslušnou funkcí reálné proměnné.

## SPECIÁLNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

V předchozích dvou kapitolách byly zavedeny některé speciální funkce:

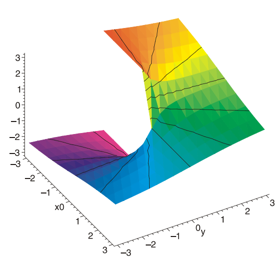
- $\Re(z)$ a $\Im(z)$ přiřazuje číslu $z$ jeho reálnou, resp. imaginární, složku. Tyto spojité reálné funkce jsou definovány na $\mathbb{C}$ a nejsou holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je $\mathbb{R}$.
- $\overline{z}$ přiřazuje číslu $z$ jeho komplexně sdružené číslo. Tato funkce je spojitá, prostá, definovaná na $\mathbb{C}$ a není holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je $\mathbb{C}$, je sama k sobě inverzní.
- Absolutní hodnota $|z|$ je reálná funkce na $\mathbb{C}$, která není holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je interval $[0, \infty)$.
- Argument $\arg z$ čísla $z$ je reálná mnohoznačná funkce s definičním oborem $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a s oborem hodnot $\mathbb{R}$.

  Funkce argument lze znázornit jako nekonečné schodiště.

  Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky $2\pi$ (přesněji interval typu $(a, a + 2\pi]$ nebo $[a, a + 2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

  Jestliže se za obor hodnot zvolí interval $(-\pi, \pi]$, značí se tato funkce $\operatorname{Arg} z$ a nazývá se hlavní větev argumentu. Funkce $\operatorname{Arg} z$ je spojitá všude kromě záporné osy $x$ a není holomorfní v žádném bodě.

- Polynom je funkce tvaru $c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, kde $c_i \in \mathbb{C}$; racionální funkce je podíl dvou polynomů. Každý polynom je celistvá funkce. Racionální funkce je holomorfní funkce na celém svém definičním oboru, tj. všude na $\mathbb{C}$ kromě konečně mnoha bodů (kořenů jmenovatele funkce).

# EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Exponenciální funkce $\mathrm{e}^z$ se definuje rovností $e^z = e^{\Re(z)}(\cos \Im(z) + \mathrm{i}\sin \Im(z))$.

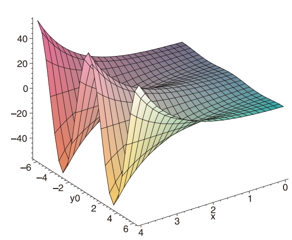
Pro reálné číslo $z$ je definice v souladu s reálnou funkcí $\mathrm{e}^z$.

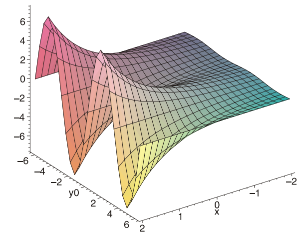
Vlastnosti exponenciální funkce:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. Funkce je celistvá, $(e^z)' = e^z$.
3. Funkce je periodická s periodou $2\pi\mathrm{i}$.
4. Platí vztahy
$$\Re(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)}\cos(\Im(z)),\ \Im(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)}\sin(\Im(z)),$$
$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re(z)},\ \arg(\mathrm{e}^z) = \Im(z) + 2k\pi,\ \mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}.$$
5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w,\ \mathrm{e}^{z-w} = \frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^w}.$$
6. Funkce $\mathrm{e}^z$ je prostá na každém pásu šířky $2\pi$ rovnoběžném s osou $x$: buď $\Im(z) \in (a, a+2\pi]$ nebo $\Im(z) \in [a, a+2\pi)$.

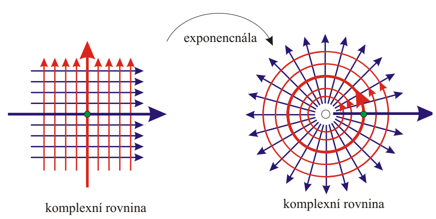
Důkazy předchozích vlastností jsou jednoduché a jsou přenechány čtenářům v *Otázkách*.

Grafy reálné a imaginární části exponenciály jsou si navzájem podobné jako vejce vejci. Následují oba dva. Poznáte, který je který?





Přímky rovnoběžné s reálnou osou exponenciála zobrazí jako polopřímky vycházející z počátku. Přímky rovnoběžné s imaginární osou exponenciála zobrazí jako kružnice se středem v počátku.




Poznámky 1    Příklady 1    Otázky 1    1

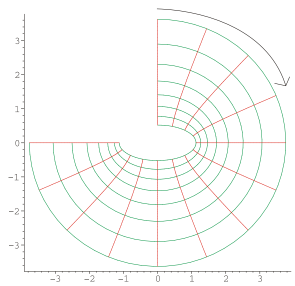
# TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

Když vypočtete ze vzorců definujících $e^z$ a $e^{-z}$ funkce $\sin y, \cos y$ (pro $x = 0$), dostanete rovnosti $\sin y = (e^{iy} - e^{-iy})/(2i), \cos y = (e^{iy} + e^{-iy})/2.$

Následující definice je tedy rozšířením těchto vztahů na komplexní čísla:

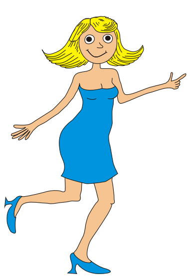
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Zobrazíme pomocí funkce sinus obdélník $[0, 3\pi/2] \times [1/10, 1]$ v rovině a dostaneme.



Vidíme, že výsledný obrazec sleduje chování reálné funkce sinus od 0 do $3\pi/2$. To znamená napřed jde od 0 k 1 a pak k -1. Obrazec obtáčí reálný interval $[-1, 1]$ "zprava", a nedotočí celou otáčku, proč?

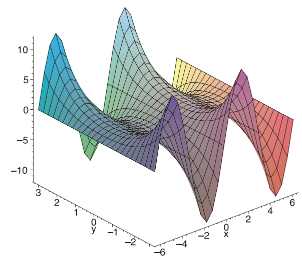
Protože jsme mu to nedovolili.



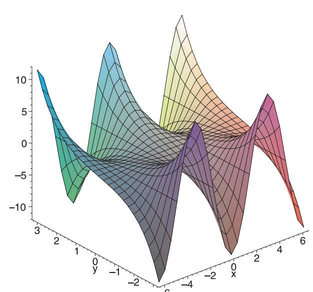
A co náš milý sinus ještě umí?

SK8.

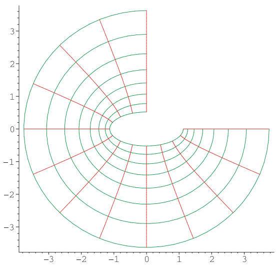
Podíváme se na jeho reálné vylomeniny.




Podíváme se na jeho imaginární vylomeniny. To když simuloval.



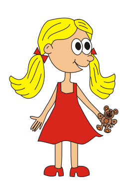

Zobrazíme pomocí funkce kosinus obdélník $[0, 3\pi/2] \times [1/10, 1]$ v rovině a dostaneme.



Vidíme, že výsledný obrazec sleduje chování reálné funkce kosinus od 0 do $3\pi/2$. To znamená napřed jde od 1 k -1 a pak k 0. Obrazec obtáčí reálný interval $[-1, 1]$ "zprava", a nedotočí celou otáčku, proč?

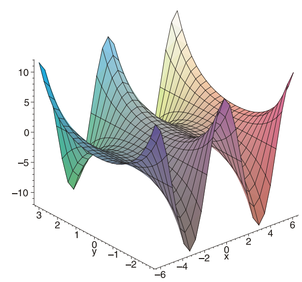
Protože jsme mu to zase nedovolili.

A co naše milá funkce kosinus ještě umí?

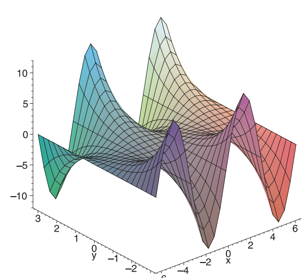


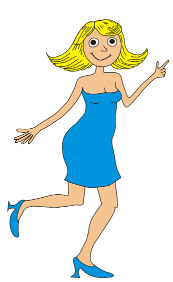
Všecko už umí.

Podíváme se na její reálné vylomeniny.




Podíváme se na její imaginární vylomeniny.



Vidíte u sinu i kosinu tu reálnou osu. To je paráda, co?

BTW, poznáte na první pohled reálnou část od imaginární?

Pokud budeme rozepisovat do složek, dostaneme při troše snahy toto:

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$$

a

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $y = y_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s reálnou osou.

$$\sin(x+iy_0) = \sin x \cosh y_0 + \cos x \sinh y_0$$

Čili je vidět, že reálná složka $\xi$ a imaginární složka $\eta$ vyhovuje rovnici elipsy

$$\left(\frac{\xi}{\cosh y_0}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sinh y_0}\right)^2 = 1$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0+iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Čili je vidět, že reálná složka $\xi$ a imaginární složka $\eta$ vyhovuje rovnici hyperboly

$$\left(\frac{\xi}{\sin x_0}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\cos x_0}\right)^2 = 1$$

To jsem nečekal, ale jsem tomu opravdu rád.

Dále lze definovat (všude, kde to má smysl):

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}\,.$$

V následujících vlastnostech jsou pro jednodušší vyjádření použity reálné hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

Vlastnosti:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C}$.
2. Funkce $\sin, \cos$ jsou celistvé, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
3. Funkce $\sin, \cos$ jsou periodické s periodou $2\pi$, $\sin$ je funkce lichá, $\cos$ je funkce sudá.
4. Platí vztahy

$$\Re(\sin z) = \sin(\Re(z))\cosh(\Im(z))\,, \Re(\cos z) = \cos(\Re(z))\cosh(\Im(z))\,,$$
$$\Im(\sin z) = \cos(\Re(z))\sinh(\Im(z))\,, \Im(\cos z) = \sin(\Re(z))\sinh(\Im(z))\,,$$
$$\sin \overline{z} = \overline{\sin z}\,, \cos \overline{z} = \overline{\cos z}\,,$$
$$|\sin z|^2 = \sin^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z))\,, |\cos z|^2 = \cos^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z))\,.$$

5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w\,, \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w\,, \sin^2 z + \cos^2 z = 1\,.$$

6. Funkce $\sin z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2]$ nebo $\Re(z) \in [(2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$.
7. Funkce $\cos z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in (k\pi, (k+1)\pi]$ nebo $\Re(z) \in [k\pi, (k+1)\pi)$.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 2

## LOGARITMICKÁ FUNKCE

Logaritmus v reálném oboru se definuje jako inverzní funkce exponenciální funkce.
Ta je prostá, což však neplatí v komplexním oboru.
Když se zúží definiční obor funkce $e^z$ na pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$, bude funkce prostá a má tam inverzní funkci:
Funkce Log je inverzní funkcí k $e^z$ pro $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

Ano. Jinak to nemám ráda.

BTW, jde to i jinak.

To znamená, že je-li $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$ a $\mathrm{Log}(w) = z$, pak platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(w)} = w\,, \quad \mathrm{Log}(\mathrm{e}^z) = z\,.$$

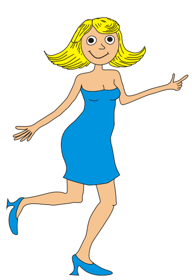
Jestliže $\mathrm{Log}(w) = x + \mathrm{i}y, w = u + \mathrm{i}v$, plynou z první rovnosti vztahy $u = \mathrm{e}^x \cos y, v = \mathrm{e}^x \sin y$ a tedy $x = \log|w|, y = \mathrm{Arg}\, w$. Tím se dostává popis hodnot funkce Log, který se dá také vzít za definici Log

$$\mathrm{Log}(w) = \log|w| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(w)\,.$$

Je to důležitější než váš PIN. Pamatujte si to.

Vlastnosti logaritmu:

1. Definiční obor je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a obor hodnot je pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.
2. Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\mathrm{Log}'(z) = 1/z$.
3. Platí vztahy
$$\Re(\mathrm{Log}(z)) = \log|z|\,, \Im(\mathrm{Log}(z)) = \mathrm{Arg}(z)\,, \mathrm{Log}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{Log}(z)}\,.$$
4. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)\,, \mathrm{Log}(z/w) = \mathrm{Log}(z) - \mathrm{Log}(w)\,.$$
5. Funkce $\mathrm{Log}$ je prostá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.



Já jsem v podstatě také prostá.

Pokud se nezúží definiční obor, funkce $\mathrm{e}^z$ není prostá a řešení rovnice $\mathrm{e}^z = w$, pro dané $w$, je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi\mathrm{i}$).

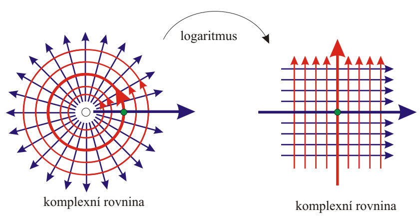
Množina všech těchto řešení se může označit jako $\log w$ a dostane se mnohoznačná funkce. Funkce $\mathrm{Log}$ se pak nazývá hlavní větev logaritmu.

Z této definice $\log$ vyplývá i její popis

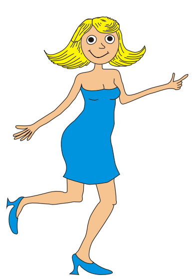
$$\log(w) = \log|w| + \mathrm{i}\arg(w)\,,$$

z kterého se snadno odvodí další vlastnosti (viz *Otázky*).

Logaritmus převádí polopřímky vycházející z počátku ...

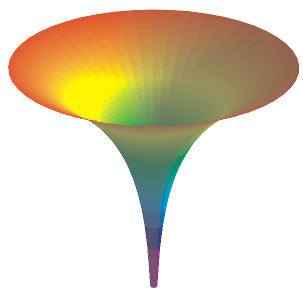



Už tomu asi rozumí, tak ji to nebaví. Naštěstí ještě něčemu nerozumí.



Imaginární část logaritmu je spirálovité schodiště, protože exponenciála je $2\pi\mathrm{i}$ periodická.

Reálná část je trychtýř.



Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

# OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z}\,.$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

Pokud je potřeba mít jen jednu hodnotu, je třeba se omezit na nějakou jednoznačnou větev logaritmu, např. na Log. Nicméně, bývá výhodné pracovat se všemi hodnotami mocniny, např. při řešení rovnic (jinak se může nějaké řešení „ztratit").

Jednotlivé hodnoty $\log z$ se liší o $2k\pi\mathrm{i}$, což je perioda exponenciální funkce. Pokud je tedy číslo $w = n$ celé reálné, má $z^n$ jedinou hodnotu, která odpovídá součinu $n$ čísel $z$ nebo $1/z$, nebo se rovná 1 pro $n = 0$.

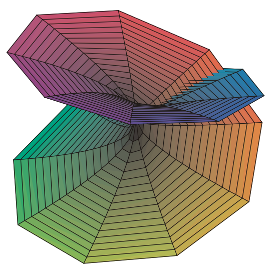
Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Potom se exponent v definici $z^w$ rovná $(\log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\mathrm{i})/n$ a existuje právě $n$ hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

To znamená, že v tomto případě má mocnina $z^{1/n}$ přesně $n$ hodnot.

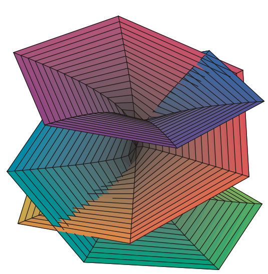
Tato $n$-značná funkce se nazývá $n$-tá odmocnina a značí se jako obvykle $\sqrt[n]{z}$. Hlavní větev odmocniny se získá volbou $k = 0$.

Předchozí úvahy lze přenést na případ, kdy $w$ je racionální číslo a mocnina $z^w$ má pak konečně mnoho hodnot. Jakmile je $w$ iracionální, má již mocnina $z^w$ spočetně mnoho hodnot. Pro $w$ imaginární je počet hodnot vždy nekonečný.

Nejjednodušší je druhá odmocnina.



Komplikovanější je třetí odmocnina.



Reálné i imaginární složky odmocnin vypadají podobně. Jsou to takové propletené listy.

Já tomu říkám dvojplošník či trojplošník.

Z vlastností exponenciální funkce a logaritmu lze snadno odvodit následující vztahy mocniny s algebraickými operacemi (rovnost tu znamená rovnost mezi množinami hodnot):

$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}, \quad (z^w)^c = z^{wc}, \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w .$$

Následující vlastnosti platí pro jednoznačné větve mocniny, např. pro hlavní větev mocniny (v definici mocniny se vezme Log). Nejdříve vlastnosti funkce $z^w$ proměnné $z$ s daným exponentem $w$:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ten lze pro některá $w$ rozšířit i na 0). Pro $w \neq 0$ je obor hodnot funkce celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(z^w)' = wz^{w-1}$.

Nyní vlastnosti funkce $w^z$ s proměnnou $z$ a daným číslem $w \neq 0$, opět např. pro hlavní větev mocniny:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C}$ a její obor hodnot je celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(w^z)' = w^z \operatorname{Log} w$.

Když dělám mocninnou pizzu, udělám kruhové těsto, proříznu podél jednoho poloměru a roztahuju to tak, až mám nad sebou několik vrstev těsta.

BTW, nerada dělá iracionální mocniny, je na to už moc pohodlná.

Příklady 4 Otázky 4 4 5 6

# POZNÁMKY

Poznámky 1:

Rovnosti ukazující vlastnosti funkcí vzhledem k algebraickým operacím lze většinou dokázat snadno z definic funkcí.

Nicméně, později bude ukázáno, že pro všechny funkce definované v této kapitole vyplývají uvedené rovnosti z rovností v reálném případě, aniž by se musely znovu dokazovat – viz kapitola o řadách.

**Lineárně lomená funkce.** Mezi významné funkce patří tzv. lineárně lomená funkce, což je racionální funkce tvaru $(az+b)/(cz+d)$, koeficienty $a, b, c, d$ jsou komplexní čísla. Pokud je $c \neq 0$, je definována všude až na jeden bod, který se zobrazuje do $\infty$, je holomorfní, a prostá nebo konstantní.

Speciálním případem je lineární funkce $az + b$, která zachovává přímky, kružnice a další základní geometrické objekty (lineární funkce se dá napsat jako složení podobnosti, otočení a posunutí).

Obecná lineárně lomená funkce převádí přímky na přímky nebo kružnice a kružnice na kružnice nebo přímky. Každé takovéto zobrazení lze rozložit jako složení posunutí, inverzi $(1/z)$ a lineární zobrazení.

**Exponenciální funkce.** Tato funkce zobrazuje přímky rovnoběžné s osou $x$ na polopřímky vycházející z počátku, přímky rovnoběžné s osou $y$ na kružnice se středem v počátku.

Je dobré si pamatovat, že pro reálná $z$ je $|e^{\mathrm{i}z}| = 1$ a tato čísla vyplní jednotkovou kružnici, takže každé komplexní číslo $z$ lze psát ve tvaru $re^{\mathrm{i}w}$, kde $w$ je argument čísla $z$ a $r = |z|$.

Pro dané $r \in (0, +\infty)$ a reálnou proměnnou $t$ je vztah $z = z_0 + re^{\mathrm{i}t}$ rovnicí kružnice se středem $z_0$ a poloměrem $r$.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

Uvědomte si velký rozdíl oproti reálnému oboru, kde $\sin$ a $\cos$ jsou omezené funkce. V komplexním oboru nabývají všech hodnot.

Funkce $\sin$ zobrazuje imaginární osu na sebe. V pásu šířky $\pi$ rovnoběžném s osou $y$ se úsečky rovnoběžné s osou $x$ zobrazují na poloviny elips, přímky rovnoběžné s osou $y$ se zobrazují na větve hyperbol.

Uvedené definice hyperbolických funkcí lze automaticky přenést do komplexního oboru.

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

Protože $\mathrm{Log}$ je inverzní k exponenciální funkci, zobrazuje polopřímky vycházející z počátku na přímky rovnoběžné s osou $x$ a kružnice se středem v počátku na úsečky rovnoběžné s osou $y$.

Uvědomte si, že nyní je definován i logaritmus záporných reálných čísel, je to však komplexní číslo (imaginární).

Navíc, hlavní větev logaritmu není v záporných číslech spojitá. Lze vzít jinou polopřímku vycházející z počátku a větev logaritmu, která bude spojitá všude kromě oné polopřímky.

Velká výhoda hlavní větve logaritmu je ta, že souhlasí s reálným přirozeným logaritmem kladných čísel. Vezme-li se spojitá větev argumentu neobsahující hodnotu 0, nemá příslušná větev logaritmu nikdy reálné hodnoty.

Konec poznámek 3.

# PŘÍKLADY

Příklady 1:

**1.** Najděte všechna řešení rovnic

$$\mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\,, \quad \mathrm{e}^z = \mathrm{i}\,, \quad \mathrm{e}^{2z-1} = -\mathrm{i}\,.$$

**2.** Je funkce $\mathrm{e}^{\overline{z}}$ holomorfní?

**3.** Najděte všechna $z$, pro která je $\mathrm{e}^z$ reálné, resp. ryze imaginární číslo.

**4.** Najděte všechna $z$, pro která je $|\mathrm{e}^{-2z}| < 1$.

Konec příkladů 1.

Příklady 2:

**1.** Najděte všechna řešení rovnice $\sin z = \mathrm{i}$.

**2.** Kde je holomorfní funkce $\cos \overline{z}$?

**3.** Najděte všechna řešení rovnice $\operatorname{tg} z = -\mathrm{i}$.

Konec příkladů 2.

Příklady 3:

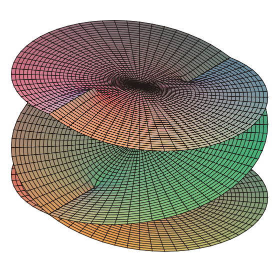
**1.** Najděte všechny hodnoty $\log \mathrm{i}$.

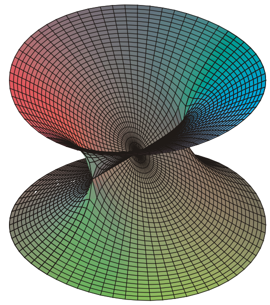
**2.** Najděte všechna řešení rovnice $\log z = -\mathrm{i}$.

**3.** Ukažte, že funkce $\operatorname{Log}(x^2 + y^2)$ je harmonická v každé oblasti neobsahující 0.

**4.** Vyřešte obecně rovnici $\sin w = z$. [Návod: místo sin napište příslušné vyjádření pomocí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ a položte $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = q$; řešení získané kvadratické rovnice nyní stačí zlogaritmovat. Ve výsledku $w = -\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2})$ se vyskytují dvě mnohoznačné funkce. Vezmete-li u obou z nich hlavní větve, získáte hlavní větev $\arcsin$ v komplexním oboru; jaký má definiční obor?

U následujících obrázků udržujte vizuální kontakt se zemí, aby se vám nezatočila hlava. Jde o arkus-sinus.



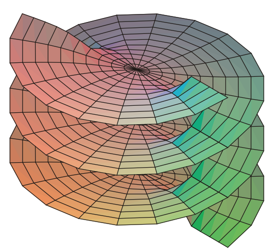


Nejprve byla reálná část a pak imaginární arkussinu. Pokud půjdete opačným směrem, bude to opačně.

**5.** Ukažte, že pro hlavní větev funkce $\arcsin$ platí $\arcsin' z = 1/\sqrt{1-z^2}$.

**6.** Stejným postupem jako v předchozím případě najděte vzorec pro $\arccos z$ ($\arccos z = -\mathrm{i} \log(\mathrm{i}z + \sqrt{z^2-1})$). Vypočtěte derivaci $\arccos$.

**7.** Obdobně najděte výraz pro $\operatorname{arctg} z$ ($\mathrm{i} \log \sqrt{(\mathrm{i}+z)/(\mathrm{i}-z)}$). Ukažte, že derivace je rovna $1/(z^2+1)$.



Konec příkladů 3.

Příklady 4:

**1.** Najděte všechny hodnoty mocnin

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}}\,, \quad ,(1-\mathrm{i})^{4\mathrm{i}}\,, \quad \mathrm{i}^{\sqrt{2}}\,, \quad 1^{-\mathrm{i}}\,, \quad (-1)^{1/\pi}\,.$$

**2.** Spočtěte limity pro $z = x + \mathrm{i}y$:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \mathrm{e}^x\,, \quad \lim_{n\to\infty} \arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = y\,.$$

Konec příkladů 4.

# OTÁZKY

Otázky 1:

**1.** Dokažte, že pro každé $w \neq 0$ existuje $z$ tak, že $\mathrm{e}^z = w$.

**2.** Spočítejte derivaci exponenciální funkce pomocí Cauchyových-Riemannových podmínek.

**3.** Dokažte, že $\mathrm{e}^{-z} = 1/\mathrm{e}^z$ pro každé $z$.

**4.** Pomocí součtových vzorců pro reálné funkce $\sin$ a $\cos$ dokažte, že $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w$.

**5.** Dokažte, že $\mathrm{e}^z = 1$ právě pro $z = 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$ a z tohoto řešení najděte příslušné pásy, kde je exponenciální funkce prostá.

Konec otázek 1.

Otázky 2:

**1.** Ukažte, že $\sin$ nabývá reálných hodnot jen na ose $x$ a na přímkách $\Re(z) = \pi/2 + k\pi$.

**2.** Ukažte, že obor hodnot funkcí $\sin$ a $\cos$ je celé $\mathbb{C}$.

**3.** Vypočtěte derivace funkcí $\sin$ a $\cos$.

**4.** Dokažte vlastnosti uvedené v bodě 4.

**5.** Dokažte součtové vzorce z bodu 5.

**6.** Ukažte, že $\sin$ je prostá na pásu $\Re(z) \in (-\pi/2, \pi/2]$ a $\cos$ na pásu $\Re(z) \in [0, \pi)$.

**7.** Dokažte, že $|\sin z| \geq |\sin(\Re(z))|$ a podobně pro $\cos$.

**8.** Uveďte základní vlastnosti funkcí $\mathrm{tg}, \mathrm{cotg}$.

Konec otázek 2.

Otázky 3:

**1.** Ukažte, že pro $z \neq 0$ platí $\mathrm{e}^{\log(z)} = z$. Platí vždy rovnost $\log(\mathrm{e}^z) = z$?

**2.** Spočtěte derivaci funkce $\mathrm{Log}$. [Návod: Lze použít Cauchyovy-Riemannovy podmínky, nebo vzorec pro derivaci inverzní funkce, nebo zderivovat rovnost $\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(z)} = z$, víte-li, že $\mathrm{Log}$ má derivaci.]

**3.** Dokažte rovnost $\mathrm{Log}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{Log}(z)}$.

**4.** Pomocí příslušných rovností pro exponenciální funkci dokažte rovnosti $\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)\,, \quad \mathrm{Log}(1/z) = -\mathrm{Log}(z)$.

**5.** Dokažte, že $\mathrm{Log}$ je prostá funkce na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

**6.** Ukažte, že platí rovnost množin

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w)\,, \quad \log(1/z) = -\log(z)\,.$$

Konec otázek 3.

Otázky 4:

**1.** Ukažte, že pro reálné číslo $r$ je $|z^r| = |z|^r$.

**2.** Najděte všechny případy, kdy $z^w$ je reálné číslo.

**3.** Ukažte, že leží-li $z$ na jednotkové kružnici a $w$ je iracionální, tvoří hodnoty $z^w$ hustou množinu na jednotkové kružnici.

**4.** Jak rozloženou množinu na jednotkové kružnici tvoří hodnoty $\sqrt[n]{z}$ pro $|z| = 1$?

**5.** Napište Moivreův vzorec pro libovolné reálné číslo $r$ a $(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^r$.

**6.** Dokažte rovnosti

$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}\,, \quad \left(z^w\right)^c = z^{wc}\,, \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w\,.$$

**7.** Najděte obory hodnot funkcí $z^w$ a $w^z$ proměnné $z$.

**8.** Vypočtěte derivace funkcí $z^w$ a $w^z$ proměnné $z$.

Konec otázek 4.

# CVIČENÍ

Cvičení 1: Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

Označme ještě pro jednoduchost reálné a imaginární části čísel $z_1,\ z_2$ takto

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Potom podle definice

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)),$$

a

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2 + i(\sin y_1\cos y_2 + \cos y_1\sin y_2)\right] \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right] \end{aligned}$$

Taky se na to může jít od lesa. Exponenciála se napíše jako řada a na řadu přijde součin číselných (či mocninných) řad.

BTW, vyjde IMHO to samé.

Konec cvičení 1.

Cvičení 2: Příklad. Dokažte, že funkce $f$ proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.

Řešení. Označme nejdříve reálnou a imaginární část funkce $f$ po řadě

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

a

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

Obě tyto funkce mají spojité parciální derivace všech řádů podle proměnných $x, y$, a mají tedy totální diferenciál. Postačí tedy dokázat, že jsou splněny Cachy-Riemannovy podmínky.

To je ale snadné:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Podle známé věty dostáváme

$$f'(x + iy) = \frac{\partial f(x + iy)}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Jedna má známá . . .

Konec cvičení 2.

Cvičení 3: Příklad. Najděte funkci $f$ holomorfní v $\mathbb{C}$, jejíž reálná část je

$$x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y),$$

kde $z = x + iy$.

Řešení. Položíme $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y)$. Derivováním se snadno přesvědčíme, že $u$ je harmonická, a tedy naše úloha má smysl. Dále je $\mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, a tedy úloha má řešení.

Jak ale najít funkci $v$ sdruženou k $u$?

Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek najdeme soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic, které musí funkce $v$ splňovat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y).$$

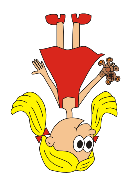
První rovnici integrujeme podle $y$, druhou podle $x$ (integrační konstanta může v obou případech záviset na zbývající proměnné!):

$$u = 2xy + e^x(x\sin y - y\cos y) + \varphi(x),$$

$$v = 2xy + e^x(x\sin y - y\cos y) + \psi(y),$$

takže $\varphi(x) = \psi(y) = k \in \mathbb{R}$.

Můj ty smutku. Nevím nevím, zda se úloha zjednodušila. Zvolil bych opačný postup.



Já jsem taky pro naopak.

Nakonec je tedy

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= x^2 + i2xy - y^2 + e^x[x(\cos y + i\sin y) + iy(\cos y + i\sin y)] + ik \\ &= (x+iy)^2 + (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) + ik = z^2 + ze^z + ik. \end{aligned}$$

Tak jsme se s tím nepěkně nadřeli.

BTW, tu konstantu jsem tam tušil.

Konec cvičení 3.

Cvičení 4: Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx.$$

Řešení. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\cos kx = \Re\, e^{ikx},$$

takže místo zadané řady můžeme vyšetřovat řadu

$$1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx},$$

což je geometrická řada, jejíž součet známe:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} &= \frac{(e^{i(n+1)x}-1)(e^{ix}-1)}{(e^{-ix}-1)(e^{-ix}-1)} \\ &= \frac{-e^{(n+1)x}+e^{inx}-e^{-ix}+1}{2(1-\cos x)} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right).\end{aligned}$$

A jaká je reálná část tohoto výrazu?

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

To, že se ty ošklivé siny a kosiny dají schovat do pěkné exponenciály, je super.

Konec cvičení 4.

Cvičení 5: Příklad. Najděte všechna komplexní čísla $z$, pro něž platí $\cos z = 2$.

To vypadá jako pěkná hloupost.

Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

Odtud dostaneme rovnici

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Označme $w = e^{iz}$, pak hledáme řešení kvadratické rovnice

$$w^2 - 4w + 1 = 0,$$

což jsou čísla

$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \qquad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Vrátíme-li se zpět k proměnné $z$ :

$$e^{iz_1} = 2 + \sqrt{3}, \qquad e^{iz_2} = 2 - \sqrt{3}.$$

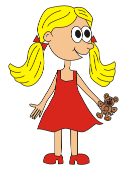
Logaritmováním

$$z_1 \in -i \operatorname{Log}(2 + \sqrt{3}), \qquad z_2 \in -i \operatorname{Log}(2 - \sqrt{3}).$$

Tyto výrazy ještě upravíme.

Proč?

Aby se všechny líbily.

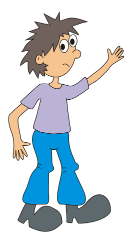


My se líbíme vždycky.

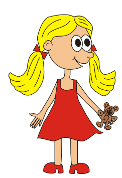
$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(2+\sqrt{3}) &= \log(2+\sqrt{3}) + i\operatorname{Arg}(2+\sqrt{3}) = \log(2+\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\operatorname{Log}(2-\sqrt{3}) &= \log(2-\sqrt{3}) + i\operatorname{Arg}(2-\sqrt{3}) = \log(2-\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

A výsledek je

$$z = -i\log(2\pm\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Já jsem vsadil na to, že to řešení neexistuje.



A příště si asi vsadí zase.

Konec cvičení 5.

Cvičení 6: Příklad. Určete hodnotu $\log_6(\sqrt{3}+i)$, kde

$$\log_{\theta} w = \{z \in \operatorname{Log} w : \ \theta - \pi < Im\, z \le \pi + \theta\}.$$

Řešení. Podle definice je

$$\log_6(\sqrt{3}+i) = \log|\sqrt{3}+i| + i\arg_6(\sqrt{3}+i),$$

kde $\arg_6(\sqrt{3}+i)$ je takový argument, že

$$6 - \pi < \arg_6(\sqrt{3}+i) \le 6 + \pi.$$

Je tedy $\arg_6(\sqrt{3}+i) = \frac{13}{6}\pi$ a celkový výsledek

$$\log_6(\sqrt{3}+i) = \log 2 + i\frac{13}{6}\pi.$$

Konec cvičení 6.

STANDARDY z kapitoly

ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

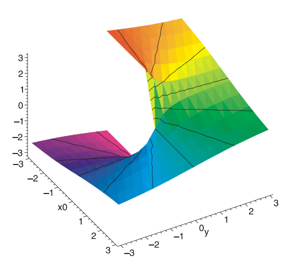
## ARGUMENT

Argument $\arg z$ čísla $z$ je reálná mnohoznačná funkce s definičním oborem $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a s oborem hodnot $\mathbb{R}$.

Funkce argument lze znázornit jako nekonečné schodiště.

Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky $2\pi$ (přesněji interval typu $(a, a+2\pi]$ nebo $[a, a+2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

Jestliže se za obor hodnot zvolí interval $(-\pi, \pi]$, značí se tato funkce $\operatorname{Arg} z$ a nazývá se hlavní větev argumentu. Funkce $\operatorname{Arg} z$ je spojitá všude kromě záporné osy $x$ a není holomorfní v žádném bodě.



## EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

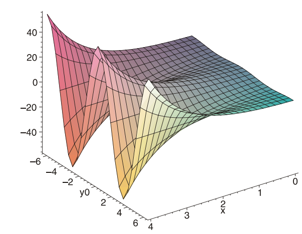
Exponenciální funkce $\mathrm{e}^z$ se definuje rovností $e^z = e^{\Re(z)}(\cos\Im(z) + \mathrm{i}\sin\Im(z))$ .

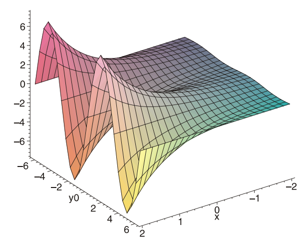
Vlastnosti exponenciální funkce:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. Funkce je celistvá, $(e^z)' = e^z$.
3. Funkce je periodická s periodou $2\pi\mathrm{i}$.

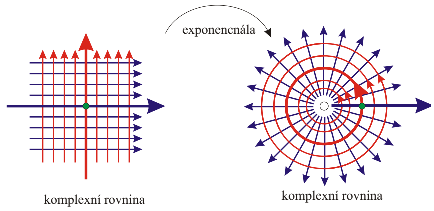
4. Platí vztahy
$$\Re(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)} \cos(\Im(z))\,,\, \Im(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)} \sin(\Im(z))\,,$$
$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re(z)}\,,\, \arg(\mathrm{e}^z) = \Im(z) + 2k\pi\,,\, \mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}\,.$$
5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w\,,\, \mathrm{e}^{z-w} = \frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^w}\,.$$
6. Funkce $\mathrm{e}^z$ je prostá na každém pásu šířky $2\pi$ rovnoběžném s osou $x$: buď $\Im(z) \in (a, a+2\pi]$ nebo $\Im(z) \in [a, a+2\pi)$.

Grafy reálné a imaginární části exponenciály jsou si navzájem podobné jako vejce vejci. Následují oba dva. Poznáte, který je který?




Přímky rovnoběžné s reálnou osou exponenciála zobrazí jako polopřímky vycházející z počátku. Přímky rovnoběžné s imaginární osou exponenciála zobrazí jako kružnice se středem v počátku.



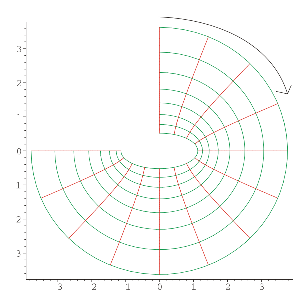

# TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

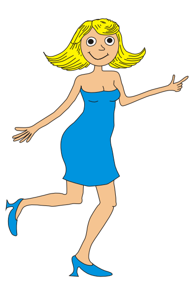
Když vypočtete ze vzorců definujících $e^z$ a $e^{-z}$ funkce $\sin y, \cos y$ (pro $x = 0$), dostanete rovnosti $\sin y = (e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y})/(2\mathrm{i}), \cos y = (e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y})/2.$ ¨

Následující definice je tedy rozšířením těchto vztahů na komplexní čísla:

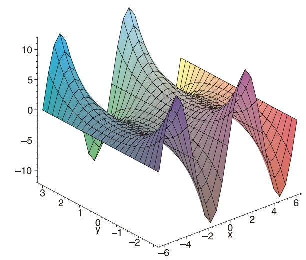
$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

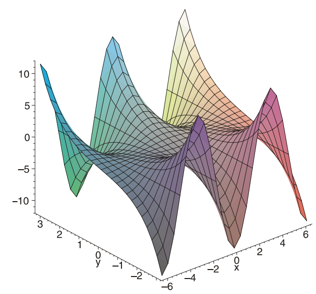
Zobrazíme pomocí funkce sinus obdélník $[0, 3\pi/2] \times [1/10, 1]$ v rovině a dostaneme.



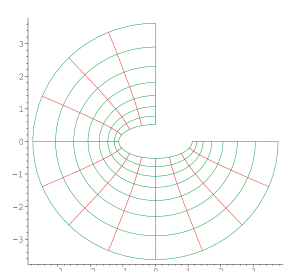


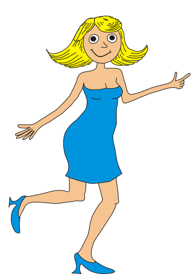
Vidíme, že výsledný obrazec sleduje chování reálné funkce sinus od 0 do $3\pi/2$. To znamená napřed jde od 0 k 1 a pak k -1. Obrazec obtáčí reálný interval $[-1, 1]$ "zprava", a nedotočí celou otáčku, proč?



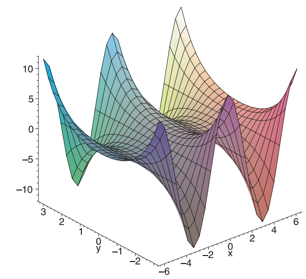


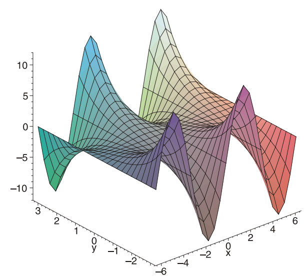
Zobrazíme pomocí funkce kosinus obdélník $[0, 3\pi/2] \times [1/10, 1]$ v rovině a dostaneme.





Vidíme, že výsledný obrazec sleduje chování reálné funkce kosinus od 0 do $3\pi/2$. To znamená napřed jde od 1 k -1 a pak k 0. Obrazec obtáčí reálný interval $[-1, 1]$ "zprava", a nedotočí celou otáčku, proč?




Pokud budeme rozepisovat do složek, dostaneme při troše snahy toto:

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$$

a

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $y = y_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s reálnou osou.

$$\sin(x + iy_0) = \sin x \cosh y_0 + \cos x \sinh y_0$$

Čili je vidět, že reálná složka $\xi$ a imaginární složka $\eta$ vyhovuje rovnici elipsy

$$\left(\frac{\xi}{\cosh y_0}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sinh y_0}\right)^2 = 1$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0 + iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Čili je vidět, že reálná složka $\xi$ a imaginární složka $\eta$ vyhovuje rovnici hyperboly

$$\left(\frac{\xi}{\sin x_0}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\cos x_0}\right)^2 = 1$$

Dále lze definovat (všude, kde to má smysl):

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} .$$

V následujících vlastnostech jsou pro jednodušší vyjádření použity reálné hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} .$$

Vlastnosti:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C}$.
2. Funkce $\sin$, $\cos$ jsou celistvé, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
3. Funkce $\sin$, $\cos$ jsou periodické s periodou $2\pi$, $\sin$ je funkce lichá, $\cos$ je funkce sudá.
4. Platí vztahy

$$\Re(\sin z) = \sin(\Re(z)) \cosh(\Im(z)) , \Re(\cos z) = \cos(\Re(z)) \cosh(\Im(z)) ,$$
$$\Im(\sin z) = \cos(\Re(z)) \sinh(\Im(z)) , \Im(\cos z) = \sin(\Re(z)) \sinh(\Im(z)) ,$$
$$\sin \overline{z} = \overline{\sin z} , \cos \overline{z} = \overline{\cos z} ,$$
$$|\sin z|^2 = \sin^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z)) , |\cos z|^2 = \cos^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z)) .$$

5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w , \cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w , \sin^2 z + \cos^2 z = 1 .$$

6. Funkce $\sin z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2]$ nebo $\Re(z) \in [(2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$.
7. Funkce $\cos z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in (k\pi, (k+1)\pi]$ nebo $\Re(z) \in [k\pi, (k+1)\pi)$.

# LOGARITMICKÁ FUNKCE

Funkce Log je inverzní funkcí k $e^z$ pro $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.
To znamená, že je-li $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$ a $\operatorname{Log}(w) = z$, pak platí

$$e^{\operatorname{Log}(w)} = w , \quad \operatorname{Log}(e^z) = z .$$

Jestliže $\operatorname{Log}(w) = x + iy, w = u + iv$, plynou z první rovnosti vztahy $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ a tedy $x = \log |w|, y = \operatorname{Arg} w$. Tím se dostává popis hodnot funkce Log, který se dá také vzít za definici Log

$$\operatorname{Log}(w) = \log |w| + i \operatorname{Arg}(w) .$$

Vlastnosti logaritmu:

1. Definiční obor je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a obor hodnot je pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.
2. Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\operatorname{Log}'(z) = 1/z$.
3. Platí vztahy

$$\Re(\operatorname{Log}(z)) = \log |z| , \Im(\operatorname{Log}(z)) = \operatorname{Arg}(z) , \operatorname{Log}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{Log}(z)} .$$

4. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w) , \operatorname{Log}(z/w) = \operatorname{Log}(z) - \operatorname{Log}(w) .$$

5. Funkce Log je prostá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

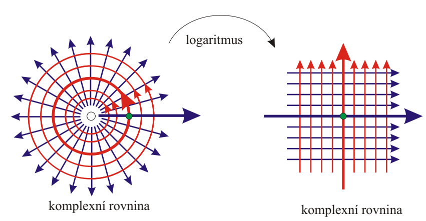
Pokud se nezúží definiční obor, funkce $\mathrm{e}^z$ není prostá a řešení rovnice $\mathrm{e}^z = w$, pro dané $w$, je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi\mathrm{i}$).

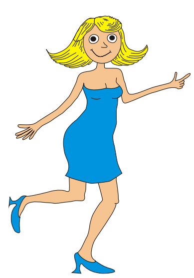
Množina všech těchto řešení se může označit jako $\log w$ a dostane se mnohoznačná funkce. Funkce $\mathrm{Log}$ se pak nazývá hlavní větev logaritmu.

Z této definice $\log$ vyplývá i její popis

$$\log(w) = \log|w| + \mathrm{i}\arg(w)\,.$$

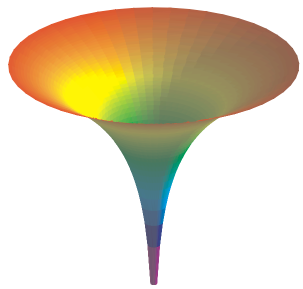
Logaritmus převádí polopřímky vycházející z počátku ...



Imaginární část logaritmu je spirálovité schodiště, protože exponenciála je $2\pi\mathrm{i}$ periodická.

Reálná část je trychtýř.



## OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z} .$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

Pokud je potřeba mít jen jednu hodnotu, je třeba se omezit na nějakou jednoznačnou větev logaritmu, např. na $\mathrm{Log}$. Nicméně, bývá výhodné pracovat se všemi hodnotami mocniny, např. při řešení rovnic (jinak se může nějaké řešení „ztratit").

Jednotlivé hodnoty $\log z$ se liší o $2k\pi\mathrm{i}$, což je perioda exponenciální funkce. Pokud je tedy číslo $w = n$ celé reálné, má $z^n$ jedinou hodnotu, která odpovídá součinu $n$ čísel $z$ nebo $1/z$, nebo se rovná 1 pro $n = 0$.

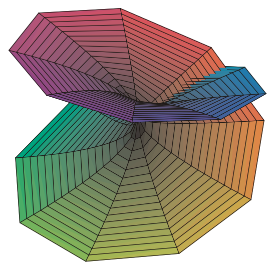
Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Potom se exponent v definici $z^w$ rovná $(\log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\mathrm{i})/n$ a existuje právě $n$ hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

To znamená, že v tomto případě má mocnina $z^{1/n}$ přesně $n$ hodnot.

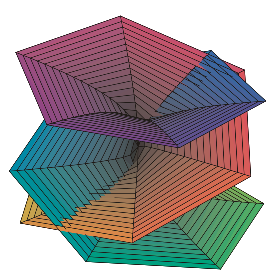
Tato $n$-značná funkce se nazývá $n$-tá odmocnina a značí se jako obvykle $\sqrt[n]{z}$. Hlavní větev odmocniny se získá volbou $k = 0$.

Předchozí úvahy lze přenést na případ, kdy $w$ je racionální číslo a mocnina $z^w$ má pak konečně mnoho hodnot. Jakmile je $w$ iracionální, má již mocnina $z^w$ spočetně mnoho hodnot. Pro $w$ imaginární je počet hodnot vždy nekonečný.

Nejjednodušší je druhá odmocnina.



Komplikovanější je třetí odmocnina.



Z vlastností exponenciální funkce a logaritmu lze snadno odvodit následující vztahy mocniny s algebraickými operacemi (rovnost tu znamená rovnost mezi množinami hodnot):

$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}\,, \quad \left(z^w\right)^c = z^{wc}\,, \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w\,.$$

Následující vlastnosti platí pro jednoznačné větve mocniny, např. pro hlavní větev mocniny (v definici mocniny se vezme $\mathrm{Log}$). Nejdříve vlastnosti funkce $z^w$ proměnné $z$ s daným exponentem $w$:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ten lze pro některá $w$ rozšířit i na 0). Pro $w \neq 0$ je obor hodnot funkce celé $\mathbb{C}$.

2. Funkce je holomorfní, $(z^w)' = wz^{w-1}$.

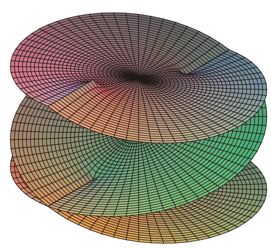
Nyní vlastnosti funkce $w^z$ s proměnnou $z$ a daným číslem $w \neq 0$, opět např. pro hlavní větev mocniny:

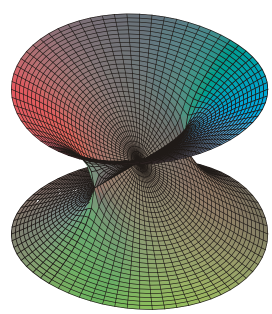
1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C}$ a její obor hodnot je celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(w^z)' = w^z \operatorname{Log} w$.

## PŘÍKLADY

Příklad. Najděte všechna řešení rovnice $\sin z = \mathrm{i}$.

Řešení. Vyřešte obecně rovnici $\sin w = z$. [Návod: místo sin napište příslušné vyjádření pomocí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ a položte $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = q$; řešení získané kvadratické rovnice nyní stačí zlogaritmovat. Ve výsledku $w = -\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2})$ se vyskytují dvě mnohoznačné funkce. Vezmete-li u obou z nich hlavní větve, získáte hlavní větev arcsin v komplexním oboru; jaký má definiční obor?





Příklad. Najděte všechny hodnoty $\log \mathrm{i}$.

Příklad. Najděte všechny hodnoty mocnin

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}}, \quad , (1-\mathrm{i})^{4\mathrm{i}}, \quad \mathrm{i}^{\sqrt{2}}, \quad 1^{-\mathrm{i}}, \quad (-1)^{1/\pi}.$$

Příklad. Ukažte, že sin nabývá reálných hodnot jen na ose $x$ a na přímkách $\Re(z) = \pi/2 + k\pi$.

Příklad. Ukažte, že obor hodnot funkcí sin a cos je celé $\mathbb{C}$.

Příklad. Ukažte, že pro $z \neq 0$ platí $\mathrm{e}^{\log(z)} = z$. Platí vždy rovnost $\log(\mathrm{e}^z) = z$?

Příklad. Spočtěte derivaci funkce Log. [Návod: Lze použít Cauchyovy-Riemannovy podmínky, nebo vzorec pro derivaci inverzní funkce, nebo zderivovat rovnost $\mathrm{e}^{\operatorname{Log}(z)} = z$, víte-li, že Log má derivaci.]

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

Označme ještě pro jednoduchost reálné a imaginární části čísel $z_1,\ z_2$ takto

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Potom podle definice

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)),$$

a

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)\right] \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right] \end{aligned}$$

Příklad. Dokažte, že funkce $f$ proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.
Řešení. Označme nejdříve reálnou a imaginární část funkce $f$ po řadě

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

a

$$u(x,y) = e^x \sin y.$$

Obě tyto funkce mají spojité parciální derivace všech řádů podle proměnných $x, y$, a mají tedy totální diferenciál. Postačí tedy dokázat, že jsou splněny Cachy-Riemannovy podmínky.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Podle známé věty dostáváme

$$f'(x+iy) = \frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Příklad. Najděte funkci $f$ holomorfní v $\mathbb{C}$, jejíž reálná část je

$$x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y),$$

kde $z = x + iy$.
Řešení. Položíme $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y)$. Derivováním se snadno přesvědčíme, že $u$ je harmonická, a tedy naše úloha má smysl. Dále je $\mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, a tedy úloha má řešení.

Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek najdeme soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic, které musí funkce $v$ splňovat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y).$$

První rovnici integrujeme podle $y$, druhou podle $x$ (integrační konstanta může v obou případech záviset na zbývající proměnné!):

$$u = 2xy + e^x(x\sin y - y\cos y) + \varphi(x),$$

$$v = 2xy + e^x(x\sin y - y\cos y) + \psi(y),$$

takže $\varphi(x) = \psi(y) = k \in \mathbb{R}$.
Nakonec je tedy

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= x^2 + i2xy - y^2 + e^x[x(\cos y + i\sin y) + iy(\cos y + i\sin y)] + ik \\ &= (x+iy)^2 + (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) + ik = z^2 + ze^z + ik. \end{aligned}$$

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx.$$

Řešení. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\cos kx = \Re\, e^{ikx},$$

takže místo zadané řady můžeme vyšetřovat řadu

$$1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx},$$

což je geometrická řada, jejíž součet známe:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} &= \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{ix} - 1)}{(e^{-ix} - 1)(e^{-ix} - 1)} \\ &= \frac{-e^{(n+1)x} + e^{inx} - e^{-ix} + 1}{2(1-\cos x)} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla $z$, pro něž platí $\cos z = 2$.
Řešení. Podle definice funkce kosinus máme

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

Odtud dostaneme rovnici

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Označme $w = e^{iz}$, pak hledáme řešení kvadratické rovnice

$$w^2 - 4w + 1 = 0,$$

což jsou čísla

$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \qquad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Vrátíme-li se zpět k proměnné $z$ :

$$e^{iz_1} = 2 + \sqrt{3}, \qquad e^{iz_2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Logaritmováním

$$z_1 \in -i\,\mathrm{Log}(2+\sqrt{3}), \qquad z_2 \in -i\,\mathrm{Log}(2-\sqrt{3}).$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(2+\sqrt{3}) &= \log(2+\sqrt{3}) + i\,\mathrm{Arg}(2+\sqrt{3}) = \log(2+\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{Log}(2-\sqrt{3}) &= \log(2-\sqrt{3}) + i\,\mathrm{Arg}(2-\sqrt{3}) = \log(2-\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A výsledek je

$$z = -i\log(2\pm\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$