ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

Všechny základní reálné funkce reálné proměnné, s kterými jste se seznámili na začátku tohoto kurzu, lze rozšířit i na komplexní funkce komplexní proměnné.

U některých je rozšíření jednoduché, u některých je složitější, např. u obecné mocniny nebo u logaritmu.

Slovo „rozšíření" znamená, že taková funkce $f(z)$ musí být pro komplexní z definována tak, aby pro reálná čísla z souhlasila s příslušnou funkcí reálné proměnné.

SPECIÁLNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

V předchozích dvou kapitolách byly zavedeny některé speciální funkce:

- $\Re(z)$ a $\Im(z)$ přiřazuje číslu z jeho reálnou, resp. imaginární, složku. Tyto spojité reálné funkce jsou definovány na $\mathbb{C}$ a nejsou holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je $\mathbb{R}$.
- $\overline{z}$ přiřazuje číslu z jeho komplexně sdružené číslo. Tato funkce je spojitá, prostá, definovaná na $\mathbb{C}$ a není holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je $\mathbb{C}$, je sama k sobě inverzní.
- Absolutní hodnota $|z|$ je reálná funkce na $\mathbb{C}$, která není holomorfní v žádném bodě. Oborem hodnot je interval $[0, \infty)$.
- Argument $\arg z$ čísla z je reálná mnohoznačná funkce s definičním oborem $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a s oborem hodnot $\mathbb{R}$.

  Funkce argument lze znázornit jako nekonečné schodiště.

  Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky 2π (přesněji interval typu $(a, a + 2\pi]$ nebo $[a, a + 2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

  Jestliže se za obor hodnot zvolí interval $(-\pi, \pi]$, značí se tato funkce $\mathrm{Arg}\, z$ a nazývá se hlavní větev argumentu. Funkce $\mathrm{Arg}\, z$ je spojitá všude kromě záporné osy x a není holomorfní v žádném bodě.
- Polynom je funkce tvaru $c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, kde $c_i \in \mathbb{C}$; racionální funkce je podíl dvou polynomů. Každý polynom je celistvá funkce. Racionální funkce je holomorfní funkce na celém svém definičním oboru, tj. všude na $\mathbb{C}$ kromě konečně mnoha bodů (kořenů jmenovatele funkce).

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Exponenciální funkce e^z se definuje rovností $e^z = e^{\Re(z)}(\cos \Im(z) + \mathrm{i} \sin \Im(z))$.
Pro reálné číslo z je definice v souladu s reálnou funkcí e^z.

Vlastnosti exponenciální funkce:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. Funkce je celistvá, $(e^z)' = e^z$.
3. Funkce je periodická s periodou $2\pi\mathrm{i}$.
4. Platí vztahy
$$\Re(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)} \cos(\Im(z))\,, \Im(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)} \sin(\Im(z))\,,$$
$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re(z)}\,, \arg(\mathrm{e}^z) = \Im(z) + 2k\pi\,, \mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}\,.$$
5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w\,, \mathrm{e}^{z-w} = \frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^w}\,.$$

6. Funkce e^z je prostá na každém pásu šířky 2π rovnoběžném s osou x: buď $\Im(z) \in (a, a+2\pi]$ nebo $\Im(z) \in [a, a+2\pi)$.

Důkazy předchozích vlastností jsou jednoduché a jsou přenechány čtenářům v *Otázkách*.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

Když vypočtete ze vzorců definujících e^z a e^{-z} funkce $\sin y, \cos y$ (pro $x = 0$), dostanete rovnosti $\sin y = (e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y})/(2\mathrm{i}), \cos y = (e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y})/2$. ¨

Následující definice je tedy rozšířením těchto vztahů na komplexní čísla:

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\,, \quad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}\,.$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$$

a

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $y = y_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s reálnou osou.

$$\sin(x+iy_0) = \sin x \cosh y_0 + \cos x \sinh y_0$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici elipsy

$$\left(\frac{\xi}{\cosh y_0}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sinh y_0}\right)^2 = 1$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0+iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici hyperboly

$$\left(\frac{\xi}{\sin x_0}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\cos x_0}\right)^2 = 1$$

Dále lze definovat (všude, kde to má smysl):

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}} \qquad \mathrm{cotg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}\,.$$

V následujících vlastnostech jsou pro jednodušší vyjádření použity reálné hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,.$$

Vlastnosti:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C}$.
2. Funkce $\sin, \cos$ jsou celistvé, $\sin' = \cos, \cos' = -\sin$.
3. Funkce $\sin, \cos$ jsou periodické s periodou 2π, $\sin$ je funkce lichá, $\cos$ je funkce sudá.
4. Platí vztahy

$$\Re(\sin z) = \sin(\Re(z))\cosh(\Im(z))\,, \Re(\cos z) = \cos(\Re(z))\cosh(\Im(z))\,,$$
$$\Im(\sin z) = \cos(\Re(z))\sinh(\Im(z))\,, \Im(\cos z) = \sin(\Re(z))\sinh(\Im(z))\,,$$
$$\sin\overline{z} = \overline{\sin z}\,, \cos\overline{z} = \overline{\cos z}\,,$$
$$|\sin z|^2 = \sin^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z))\,, |\cos z|^2 = \cos^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z))\,.$$

5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w\,, \cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w\,, \sin^2 z + \cos^2 z = 1\,.$$

6. Funkce $\sin z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2]$ nebo $\Re(z) \in [(2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$.
7. Funkce $\cos z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in (k\pi, (k+1)\pi]$ nebo $\Re(z) \in [k\pi, (k+1)\pi)$.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 2

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Logaritmus v reálném oboru se definuje jako inverzní funkce exponenciální funkce.
Ta je prostá, což však neplatí v komplexním oboru.
Když se zúží definiční obor funkce e^z na pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$, bude funkce prostá a má tam inverzní funkci:
Funkce Log je inverzní funkcí k e^z pro $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

To znamená, že je-li $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$ a $\mathrm{Log}(w) = z$, pak platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(w)} = w\,, \quad \mathrm{Log}(\mathrm{e}^z) = z\,.$$

Jestliže $\mathrm{Log}(w) = x + \mathrm{i}y, w = u + \mathrm{i}v$, plynou z první rovnosti vztahy $u = \mathrm{e}^x\cos y, v = \mathrm{e}^x\sin y$ a tedy $x = \log|w|, y = \mathrm{Arg}\, w$. Tím se dostává popis hodnot funkce Log, který se dá také vzít za definici Log

$$\mathrm{Log}(w) = \log|w| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(w)\,.$$

Vlastnosti logaritmu:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ a obor hodnot je pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.
2. Funkce je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$, $\mathrm{Log}'(z) = 1/z$.
3. Platí vztahy

$$\Re(\mathrm{Log}(z)) = \log|z|\,, \Im(\mathrm{Log}(z)) = \mathrm{Arg}(z)\,, \mathrm{Log}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{Log}(z)}\,.$$

4. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:

$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)\,, \mathrm{Log}(z/w) = \mathrm{Log}(z) - \mathrm{Log}(w)\,.$$

5. Funkce Log je prostá na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Pokud se nezúží definiční obor, funkce e^z není prostá a řešení rovnice $\mathrm{e}^z = w$, pro dané w, je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi\mathrm{i}$).

Množina všech těchto řešení se může označit jako $\log w$ a dostane se mnohoznačná funkce. Funkce Log se pak nazývá hlavní větev logaritmu.

Z této definice $\log$ vyplývá i její popis

$$\log(w) = \log|w| + \mathrm{i}\arg(w)\,,$$

z kterého se snadno odvodí další vlastnosti (viz *Otázky*).

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w\log z}\,.$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

Pokud je potřeba mít jen jednu hodnotu, je třeba se omezit na nějakou jednoznačnou větev logaritmu, např. na Log. Nicméně, bývá výhodné pracovat se všemi hodnotami mocniny, např. při řešení rovnic (jinak se může nějaké řešení „ztratit").

Jednotlivé hodnoty $\log z$ se liší o $2k\pi\mathrm{i}$, což je perioda exponenciální funkce. Pokud je tedy číslo $w = n$ celé reálné, má z^n jedinou hodnotu, která odpovídá součinu n čísel z nebo $1/z$, nebo se rovná 1 pro $n = 0$.

Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Potom se exponent v definici z^w rovná $(\log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\mathrm{i})/n$ a existuje právě n hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

To znamená, že v tomto případě má mocnina $z^{1/n}$ přesně n hodnot.

Tato n-značná funkce se nazývá n-tá odmocnina a značí se jako obvykle $\sqrt[n]{z}$. Hlavní větev odmocniny se získá volbou $k = 0$.

Předchozí úvahy lze přenést na případ, kdy w je racionální číslo a mocnina z^w má pak konečně mnoho hodnot. Jakmile je w iracionální, má již mocnina z^w spočetně mnoho hodnot. Pro w imaginární je počet hodnot vždy nekonečný.

Z vlastností exponenciální funkce a logaritmu lze snadno odvodit následující vztahy mocniny s algebraickými operacemi (rovnost tu znamená rovnost mezi množinami hodnot):

$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}\,, \quad \left(z^w\right)^c = z^{wc}\,, \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w\,.$$

Následující vlastnosti platí pro jednoznačné větve mocniny, např. pro hlavní větev mocniny (v definici mocniny se vezme Log). Nejdříve vlastnosti funkce z^w proměnné z s daným exponentem w:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ten lze pro některá w rozšířit i na 0). Pro $w \neq 0$ je obor hodnot funkce celé $\mathbb{C}$.

2. Funkce je holomorfní, $(z^w)' = wz^{w-1}$.

Nyní vlastnosti funkce w^z s proměnnou z a daným číslem $w \neq 0$, opět např. pro hlavní větev mocniny:

2. Funkce je holomorfní, $(w^z)' = w^z \operatorname{Log} w$.

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C}$ a její obor hodnot je celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(w^z)' = w^z \operatorname{Log} w$.

Příklady 4 Otázky 4 4 5 6

STANDARDY z kapitoly

ELEMENTÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE

ARGUMENT

Argument $\arg z$ čísla z je reálná mnohoznačná funkce s definičním oborem $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a s oborem hodnot $\mathbb{R}$.

Funkce argument lze znázornit jako nekonečné schodiště.

Jestliže se obor hodnot u funkce argument omezí na interval délky 2π (přesněji interval typu $(a, a+2\pi]$ nebo $[a, a+2\pi)$), dostane se jednoznačná reálná funkce definovaná na všech komplexních číslech kromě 0; tato funkce není holomorfní v žádném bodě a je spojitá všude kromě polopřímky $\arg z = a$.

Jestliže se za obor hodnot zvolí interval $(-\pi, \pi]$, značí se tato funkce $\operatorname{Arg} z$ a nazývá se hlavní větev argumentu. Funkce $\operatorname{Arg} z$ je spojitá všude kromě záporné osy x a není holomorfní v žádném bodě.

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Exponenciální funkce e^z se definuje rovností $e^z = e^{\Re(z)}(\cos \Im(z) + \mathrm{i} \sin \Im(z))$.

Vlastnosti exponenciální funkce:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. Funkce je celistvá, $(e^z)' = e^z$.
3. Funkce je periodická s periodou $2\pi\mathrm{i}$.
4. Platí vztahy
$$\Re(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)} \cos(\Im(z)) \,, \Im(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\Re(z)} \sin(\Im(z)) \,,$$
$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re(z)} \,, \arg(\mathrm{e}^z) = \Im(z) + 2k\pi \,, \mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z} \,.$$
5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w \,, \mathrm{e}^{z-w} = \frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^w} \,.$$
6. Funkce e^z je prostá na každém pásu šířky 2π rovnoběžném s osou x: buď $\Im(z) \in (a, a+2\pi]$ nebo $\Im(z) \in [a, a+2\pi)$.

TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE

Když vypočtete ze vzorců definujících e^z a e^{-z} funkce $\sin y, \cos y$ (pro $x = 0$), dostanete rovnosti $\sin y = (e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y})/(2\mathrm{i}), \cos y = (e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y})/2.$ ¨

Následující definice je tedy rozšířením těchto vztahů na komplexní čísla:

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \,, \quad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \,.$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$$

a

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $y = y_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s reálnou osou.

$$\sin(x+iy_0) = \sin x \cosh y_0 + \cos x \sinh y_0$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici elipsy

$$\left(\frac{\xi}{\cosh y_0}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sinh y_0}\right)^2 = 1$$

Pokud ve vzorečku pro sinus zafixujeme $x = x_0$ pevně, zkoumáme chování na přímce rovnoběžné s imaginární osou.

$$\sin(x_0+iy) = \sin x_0 \cosh y + \cos x_0 \sinh y$$

Čili je vidět, že reálná složka ξ a imaginární složka η vyhovuje rovnici hyperboly

$$\left(\frac{\xi}{\sin x_0}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\cos x_0}\right)^2 = 1$$

Dále lze definovat (všude, kde to má smysl):

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}\,.$$

V následujících vlastnostech jsou pro jednodušší vyjádření použity reálné hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,.$$

Vlastnosti:

1. Definiční obor je $\mathbb{C}$ a obor hodnot je $\mathbb{C}$.
2. Funkce $\sin$, $\cos$ jsou celistvé, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
3. Funkce $\sin$, $\cos$ jsou periodické s periodou 2π, $\sin$ je funkce lichá, $\cos$ je funkce sudá.
4. Platí vztahy
$$\Re(\sin z) = \sin(\Re(z))\cosh(\Im(z))\,, \Re(\cos z) = \cos(\Re(z))\cosh(\Im(z))\,,$$
$$\Im(\sin z) = \cos(\Re(z))\sinh(\Im(z))\,, \Im(\cos z) = \sin(\Re(z))\sinh(\Im(z))\,,$$
$$\sin\overline{z} = \overline{\sin z}\,, \cos\overline{z} = \overline{\cos z}\,,$$
$$|\sin z|^2 = \sin^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z))\,, |\cos z|^2 = \cos^2(\Re(z)) + \sinh^2(\Im(z))\,.$$
5. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z \sin w\,, \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w\,, \sin^2 z + \cos^2 z = 1\,.$$
6. Funkce $\sin z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2]$ nebo $\Re(z) \in [(2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$.
7. Funkce $\cos z$ je prostá na pásech $\Re(z) \in (k\pi, (k+1)\pi]$ nebo $\Re(z) \in [k\pi, (k+1)\pi)$.

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Funkce Log je inverzní funkcí k e^z pro $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.

To znamená, že je-li $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$ a $\mathrm{Log}(w) = z$, pak platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(w)} = w\,, \quad \mathrm{Log}(\mathrm{e}^z) = z\,.$$

Jestliže $\mathrm{Log}(w) = x + \mathrm{i}y, w = u + \mathrm{i}v$, plynou z první rovnosti vztahy $u = \mathrm{e}^x \cos y, v = \mathrm{e}^x \sin y$ a tedy $x = \log|w|, y = \mathrm{Arg}\, w$. Tím se dostává popis hodnot funkce Log, který se dá také vzít za definici Log

$$\mathrm{Log}(w) = \log|w| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(w)\,.$$

Vlastnosti logaritmu:

1. Definiční obor je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a obor hodnot je pás $\Im(z) \in (-\pi, \pi]$.
2. Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\mathrm{Log}'(z) = 1/z$.
3. Platí vztahy
$$\Re(\mathrm{Log}(z)) = \log|z|\,, \Im(\mathrm{Log}(z)) = \mathrm{Arg}(z)\,, \mathrm{Log}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{Log}(z)}\,.$$
4. Vlastnosti funkce vzhledem k algebraickým operacím jsou stejné jako v reálném případě:
$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)\,, \mathrm{Log}(z/w) = \mathrm{Log}(z) - \mathrm{Log}(w)\,.$$
5. Funkce Log je prostá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Pokud se nezúží definiční obor, funkce e^z není prostá a řešení rovnice $\mathrm{e}^z = w$, pro dané w, je nekonečně mnoho (jedno řešení posouvané o $2k\pi\mathrm{i}$).

Množina všech těchto řešení se může označit jako $\log w$ a dostane se mnohoznačná funkce. Funkce Log se pak nazývá hlavní větev logaritmu.

Z této definice $\log$ vyplývá i její popis

$$\log(w) = \log|w| + \mathrm{i}\arg(w)\,.$$

OBECNÁ MOCNINA

Podobně jako v reálných číslech se nyní může definovat umocnění komplexního čísla na komplexní číslo:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z}\,.$$

Tento výraz je definován, jakmile $z \neq 0$, což se bude nadále předpokládat.

Protože logaritmus komplexního čísla je mnohoznačná funkce, může i tato mocnina mít více než jednu hodnotu.

Pokud je potřeba mít jen jednu hodnotu, je třeba se omezit na nějakou jednoznačnou větev logaritmu, např. na Log. Nicméně, bývá výhodné pracovat se všemi hodnotami mocniny, např. při řešení rovnic (jinak se může nějaké řešení „ztratit").

Jednotlivé hodnoty $\log z$ se liší o $2k\pi\mathrm{i}$, což je perioda exponenciální funkce. Pokud je tedy číslo $w = n$ celé reálné, má z^n jedinou hodnotu, která odpovídá součinu n čísel z nebo $1/z$, nebo se rovná 1 pro $n = 0$.

Nechť je nyní $w = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Potom se exponent v definici z^w rovná $(\log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\mathrm{i})/n$ a existuje právě n hodnot čísel $k \in \mathbb{Z}_n$.

To znamená, že v tomto případě má mocnina $z^{1/n}$ přesně n hodnot.

Tato n-značná funkce se nazývá n-tá odmocnina a značí se jako obvykle $\sqrt[n]{z}$. Hlavní větev odmocniny se získá volbou $k = 0$.

Předchozí úvahy lze přenést na případ, kdy w je racionální číslo a mocnina z^w má pak konečně mnoho hodnot. Jakmile je w iracionální, má již mocnina z^w spočetně mnoho hodnot. Pro w imaginární je počet hodnot vždy nekonečný.

Z vlastností exponenciální funkce a logaritmu lze snadno odvodit následující vztahy mocniny s algebraickými operacemi (rovnost tu znamená rovnost mezi množinami hodnot):

$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}\,, \quad \left(z^w\right)^c = z^{wc}\,, \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w\,.$$

Následující vlastnosti platí pro jednoznačné větve mocniny, např. pro hlavní větev mocniny (v definici mocniny se vezme Log). Nejdříve vlastnosti funkce z^w proměnné z s daným exponentem w:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ten lze pro některá w rozšířit i na 0). Pro $w \neq 0$ je obor hodnot funkce celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(z^w)' = wz^{w-1}$.

Nyní vlastnosti funkce w^z s proměnnou z a daným číslem $w \neq 0$, opět např. pro hlavní větev mocniny:

1. Definiční obor funkce je $\mathbb{C}$ a její obor hodnot je celé $\mathbb{C}$.
2. Funkce je holomorfní, $(w^z)' = w^z \operatorname{Log} w$.

Příklad. Najděte všechna řešení rovnice $\sin z = \mathrm{i}$.

Řešení. Vyřešte obecně rovnici $\sin w = z$. [Návod: místo sin napište příslušné vyjádření pomocí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ a položte $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = q$; řešení získané kvadratické rovnice nyní stačí zlogaritmovat. Ve výsledku $w = -\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2})$ se vyskytují dvě mnohoznačné funkce. Vezmete-li u obou z nich hlavní větve, získáte hlavní větev $\arcsin$ v komplexním oboru; jaký má definiční obor?

Příklad. Najděte všechny hodnoty $\log \mathrm{i}$.

Příklad. Najděte všechny hodnoty mocnin

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}}\,, \quad ,(1-\mathrm{i})^{4\mathrm{i}}\,, \quad \mathrm{i}^{\sqrt{2}}\,, \quad 1^{-\mathrm{i}}\,, \quad (-1)^{1/\pi}\,.$$

Příklad. Ukažte, že sin nabývá reálných hodnot jen na ose x a na přímkách $\Re(z) = \pi/2 + k\pi$.

Příklad. Ukažte, že obor hodnot funkcí sin a cos je celé $\mathbb{C}$.

Příklad. Ukažte, že pro $z \neq 0$ platí $\mathrm{e}^{\log(z)} = z$. Platí vždy rovnost $\log(\mathrm{e}^z) = z$?

Příklad. Spočtěte derivaci funkce Log. [Návod: Lze použít Cauchyovy-Riemannovy podmínky, nebo vzorec pro derivaci inverzní funkce, nebo zderivovat rovnost $\mathrm{e}^{\operatorname{Log}(z)} = z$, víte-li, že Log má derivaci.]

Příklad. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z_1,\ z_2$ platí vztah

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Řešení. Jelikož víme, že uvedená rovnost platí pro reálná čísla, budeme se snažit úlohu převést na tento případ.

Označme ještě pro jednoduchost reálné a imaginární části čísel $z_1,\ z_2$ takto

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Potom podle definice

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)),$$

a

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2 + i(\sin y_1\cos y_2 + \cos y_1\sin y_2)\right] \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right] \end{aligned}$$

Příklad. Dokažte, že funkce f proměnné $z = x + iy$ definovaná vztahem

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ a spočítejte její derivaci.

Řešení. Označme nejdříve reálnou a imaginární část funkce f po řadě

$$u(x,y) = e^x\cos y$$

a

$$u(x,y) = e^x\sin y.$$

Obě tyto funkce mají spojité parciální derivace všech řádů podle proměnných x, y, a mají tedy totální diferenciál. Postačí tedy dokázat, že jsou splněny Cachy-Riemannovy podmínky.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Podle známé věty dostáváme

$$f'(x+iy) = \frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Příklad. Najděte funkci f holomorfní v $\mathbb{C}$, jejíž reálná část je

$$x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y),$$

kde $z = x + iy$.

Řešení. Položíme $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y)$. Derivováním se snadno přesvědčíme, že u je harmonická, a tedy naše úloha má smysl. Dále je $\mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, a tedy úloha má řešení.

Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek najdeme soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic, které musí funkce v splňovat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x + e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y), \\ -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y + e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y). \end{aligned}$$

První rovnici integrujeme podle y, druhou podle x (integrační konstanta může v obou případech záviset na zbývající proměnné!):

$$\begin{aligned} u &= 2xy + e^x(x\sin y - y\cos y) + \varphi(x), \\ v &= 2xy + e^x(x\sin y - y\cos y) + \psi(y), \end{aligned}$$

takže $\varphi(x) = \psi(y) = k \in \mathbb{R}$.

Nakonec je tedy

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= x^2 + i2xy - y^2 + e^x[x(\cos y + i\sin y) + iy(\cos y + i\sin y)] + ik \\ &= (x+iy)^2 + (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) + ik = z^2 + ze^z + ik. \end{aligned}$$

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte
$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx.$$

Řešení. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí
$$\cos kx = \Re\, e^{ikx},$$

takže místo zadané řady můžeme vyšetřovat řadu
$$1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx},$$

což je geometrická řada, jejíž součet známe:
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} &= \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{ix} - 1)}{(e^{-ix} - 1)(e^{-ix} - 1)} \\ &= \frac{-e^{(n+1)x} + e^{inx} - e^{-ix} + 1}{2(1 - \cos x)} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Příklad. Najděte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $\cos z = 2$.
Řešení. Podle definice funkce kosinus máme
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

Odtud dostaneme rovnici
$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Označme $w = e^{iz}$, pak hledáme řešení kvadratické rovnice
$$w^2 - 4w + 1 = 0,$$

což jsou čísla
$$w_1 = 2 + \sqrt{3}, \qquad w_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Vrátíme-li se zpět k proměnné z :
$$e^{iz_1} = 2 + \sqrt{3}, \qquad e^{iz_2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Logaritmováním
$$z_1 \in -i\,\mathrm{Log}(2 + \sqrt{3}), \qquad z_2 \in -i\,\mathrm{Log}(2 - \sqrt{3}).$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(2+\sqrt{3}) &= \log(2+\sqrt{3}) + i\,\mathrm{Arg}(2+\sqrt{3}) = \log(2+\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{Log}(2-\sqrt{3}) &= \log(2-\sqrt{3}) + i\,\mathrm{Arg}(2-\sqrt{3}) = \log(2-\sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

A výsledek je
$$z = -i\log(2 \pm \sqrt{3}) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$