INTEGRACE KOMPLEXNÍ FUNKCE

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Na konci kapitoly o derivaci je uvedena souvislost existence derivace s potenciálním polem. Existuje další charakterizace potenciálného pole, která nebyla v kapitole o derivaci využita, a to je souvislost s křivkovým integrálem – jeho nezávislost na cestě.

Pokud nebude uvedeno jinak, uzavřená křivka je orientována kladně.

Nejdříve je nutné vysvětlit, jak bude vypadat odpovídající křivkový integrál.

Nechť f je funkce na otevřené množině G. Pole jí odpovídající je komplexní pole $(f, \mathrm{i}f)$. Potřebuje se vyjádřit křivkový integrál 2.druhu tohoto pole po křivce C v G vyjádřené parametricky funkcí $\Phi = (\varphi, \psi) : [a, b] \to G$:

$$
\begin{aligned}
\int_C (f\ \mathrm{d}x + \mathbf{i} f\ \mathrm{d}y) &= \int_C \big(f_1(x,y) + \mathbf{i} f_2(x,y)\big)\ \mathrm{d}x + \big(\mathbf{i} f_1(x,y) - f_2(x,y)\big)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_C f_1(x,y)\ \mathrm{d}x - f_2(x,y)\ \mathrm{d}y + \mathbf{i} \int_C f_2(x,y)\ \mathrm{d}x + f_1(x,y)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \big(f_1(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) - f_2(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big)\ \mathrm{d}t + \\
&+\ \mathbf{i} \int_a^b \big(f_2(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_1(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \big(f_1(\varphi(t),\psi(t)) + \mathbf{i} f_2(\varphi(t),\psi(t))\big)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t + \\
&+ \int_a^b \big(f_1(\varphi(t),\psi(t)) + \mathbf{i} f_2(\varphi(t),\psi(t))\big)\mathbf{i}\psi'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f(\varphi(t) + \mathbf{i}\psi(t))(\varphi'(t) + \mathbf{i}\psi'(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(\Phi(t))\Phi'(t)\ \mathrm{d}t\,.
\end{aligned}
$$

DEFINICE. Integrály v předchozí rovnosti se značí

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z$$

a nazývají se integrál funkce f po křivce C nebo, pokud křivka není podstatná, křivkový integrál funkce f.

Tedy
$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b f(\Phi(t))\Phi'(t)\ \mathrm{d}t\,.$$
Připomeňte si, že křivkový integrál prvního druhu funkce f po téže křivce je roven
$$\int_C f\ \mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(\Phi(t))|\Phi'(t)|\ \mathrm{d}t\,.$$
Samotný výpočet křivkového integrálu je podle vzorečku typu kuchařka
$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b f(\Phi(t))\Phi'(t)\ \mathrm{d}t$$
snadný.

Klasická záležitost bude nazávislost tohoto integrálu na zvolené parametrizaci dané křivky.

Protože definice $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z$ je vlastně známý křivkový integrál 2.druhu, je snadné přepsat pro tento speciální případ jeho vlastnosti:

VĚTA. Nechť f, g jsou funkce definované na příslušných orientovaných křivkách C, C_1, C_2. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany. Čtvrtá vlastnost platí, jakmile má smysl levá strana.

1. $\int_C(\alpha\mathbf{f}(z)+\beta\mathbf{g}(z))\ \mathrm{d}z = \alpha\int_C \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z + \beta\int_C \mathbf{g}(z)\ \mathrm{d}z$;
2. $\int_{C_1+C_2}\mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z = \int_{C_1}\mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z + \int_{C_2}\mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z$;
3. $\int_{-C}\mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z = -\int_C \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z$;

4. $\left|\int_C f(z)\ \mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)|\ \mathrm{d}s \leq L(C) \max_{z\in C} |f(z)|$, kde $L(C)$ je délka křivky C.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

PRIMITIVNÍ FUNKCE

Bude potřeba z teorie pole převést ještě jeden pojem, a to pojem potenciální funkce.

Dostane se pojem primitivní funkce, který je sice dostatečně jasný, ale je lépe ho definovat i pro komplexní obor.

DEFINICE. Funkce F se nazývá primitivní k funkci f na otevřené množině G, jestliže pro každé $z \in G$ platí $F'(z) = f(z)$.

VĚTA. Nechť na oblasti U má funkce f derivaci f'. Pak platí

$$\int_\varphi f'(z)\ \mathrm{d}z = f(\beta) - f(\alpha)$$

pro libovolnou křivku φ jdoucí z bodu α do bodu β.

Nyní je již možné uvést druhou část charakterizace vektorového pole. Protože vnitřky uzavřených křivek ležících v G musí také patřit do G, je nutné předpokládat, že G je jednoduše souvislá.

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro funkci f mající spojité parciální derivace 1.řádu svých složek na jednoduše souvislé oblasti G:

1. f je holomorfní na G;
2. integrály z f po křivkách ležících v G nezávisí na cestě (tj. závisí jen na počátečním a koncovém bodě křivky);
3. každý integrál z f po jednoduché uzavřené křivce v G je nulový;

4. f má na G primitivní funkci F.

Poznámky 2 Otázky 2 2

CAUCHYOVA VĚTA

Předchozí větu přeformulujeme. Je to velmi důležité tvrzení a proto bude zformulováno znovu za obecných předpokladů:

VĚTA. (Cauchy) Nechť f je holomorfní na jednoduché uzavřené křivce C a na jejím vnitřku. Potom je $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Poznamenejme (jak již bylo zmíněno v *Poznámkách 2*), je možné dokázat Greenovu větu bez předpokladu spojitosti použitých parciálních derivací, nebo je možné dokázat přímo, že v implikaci $(1) \to (3)$ není tato spojitost potřeba.

Použije-li se obecná Greenova věta i pro vícenásobně souvislé oblasti, dostane se následující tvrzení:

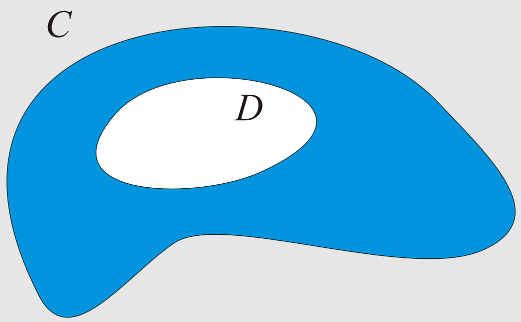
VĚTA. (Cauchy) Nechť C a $C_1, ..., C_n$ jsou jednoduché uzavřené kladně orientované křivky, přičemž $C_1, ..., C_n$ leží uvnitř C a vnitřky křivek $C_1, ..., C_n$ jsou navzájem disjunktní. Nechť f je holomorfní na jednoduché uzavřené křivce C a na jejím vnitřku kromě vnitřků křivek $C_1, ..., C_n$. Potom je

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Cauchyova věta se dostane pro $n = 0$. Tvrzení pro $n = 1$ je velmi důležité, a je vhodné ho zformulovat jako důsledek.

DŮSLEDEK. Jestliže jednoduchá uzavřená křivka C obsahuje ve svém vnitřku jednoduchou uzavřenou křivku D a obě jsou kladně orientované, pak $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_D f(z)\,\mathrm{d}z$ pro každou funkci f holomorfní na obou křivkách a mezi nimi.

LEKCE34-KIN
integrál po křivce
vlastnosti integrálu
primitivní funkce
Cauchyova věta
obecná Cauchyova věta
Cauchyův vzorec
Liouvillova věta
základní věta algebry
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tohoto důsledku se používá pro nahrazení komplikované křivky C jednodušší křivkou D, např. kružnicí.

Následující důležité tvrzení takovéto náhrady v důkazu využívá.

Je to tzv. Cauchyův vzorec, z kterého vyplývá, že hodnoty holomorfní funkce uvnitř křivky jsou určeny hodnotami na křivce.

VĚTA. (Cauchyův vzorec) Nechť C je jednoduchá uzavřená křivka a f je holomorfní uvnitř a na C. Potom pro každý bod w ležící ve vnitřku C platí

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = f(w)\,.$$

Vzoreček

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = f(w)$$

počítá hodnotu funkce ve vnitřním bodě integrací přes obvod množiny.

Z pohledu diferenciálních rovnic (zde Cauchyovy–Riemannovy podmínky) je to v pořádku. Řešení existuje a je jednoznačné.

DŮSLEDKY CAUCHYOVA VZORCE

Cauchyův vzorec má mnoho důsledků. Nejdříve je vhodné si uvědomit, že lze používat větu z kapitoly o integrálech s parametrem, která uvádí podmínky pro záměnu derivace a integrálu:

LEMMA. Nechť $f(w, z)$ je komplexní funkce dvou komplexních proměnných, která je je spojitá ve druhé proměnné na jednoduché uzavřené křivce C, holomorfní v první proměnné v oblasti G a má v G spojité parciální derivace podle složek první proměnné. Potom funkce $F(w) = \int_C f(w, z)\, \mathrm{d}z$ je holomorfní v G a platí $F'(w) = \int_C \frac{\partial f}{\partial w}(w, z)\, \mathrm{d}z$.

Nyní slíbené důsledky Cauchyova vzorce.

DŮSLEDEK.

1. Holomorfní funkce v oblasti G má v G derivace všech řádů, pro které platí vzorec

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, \mathrm{d}z\,,$$

   kde C je libovolná jednoduchá uzavřená křivka ležící i s vnitřkem v G a bod w leží ve vnitřku C.

2. Je-li f holomorfní v kruhu $|z - w| \le r$, pak

$$|f^{(n)}(w)| \le \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z); |z - w| = r\}\,.$$

3. (Liouville) Každá omezená celistvá funkce je konstantní.

4. Je-li nekonstantní funkce f holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C, pak pro každý bod w z vnitřku C je $|f(w)| < \max\{|f(z)|; z \in C\}$.

Důsledkem předchozího prvního tvrzení je jednak fakt, že holomorfní funkce má spojité parciální derivace svých složek (všech řádů), že harmonické funkce mají derivace všech řádů, a že funkce mající primitivní funkci je holomorfní.

Tato poslední vlastnost dává již dříve slibovanou Morerovu větu (bez předpokladu spojitosti parciálních derivací):

VĚTA. (Morera) Nechť $\int_c f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pro každou jednoduchou uzavřenou křivku ležící i s vnitřkem v otevřené množině G. Pak je f holomorfní.

Liouvillova věta má jako jednoduchý důsledek základní větu algebry:

VĚTA. Každý polynom P stupně aspoň 1 má nulový bod, tj. existuje z tak, že $P(z) = 0$.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4 4 5 6

STANDARDY z kapitoly

INTEGRACE KOMPLEXNÍ FUNKCE

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

DEFINICE. Zápisem

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b f(\Phi(t))\Phi'(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

definujeme integrál funkce f po křivce C parametrizované Φ nebo, pokud křivka není podstatná, nazýváme jej křivkový integrál funkce f.

VĚTA. Nechť f, g jsou funkce definované na příslušných orientovaných křivkách C, C_1, C_2. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany. Čtvrtá vlastnost platí, jakmile má smysl levá strana.

1. $\int_C(\alpha \mathbf{f}(z)+\beta\mathbf{g}(z))\ \mathrm{d}z = \alpha\int_C \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z + \beta\int_C \mathbf{g}(z)\ \mathrm{d}z$;
2. $\int_{C_1+C_2}\mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z = \int_{C_1}\mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z + \int_{C_2}\mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z$;
3. $\int_{-C}\mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z = -\int_C \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z$;
4. $|\int_C f(z)\ \mathrm{d}z| \le \int_C |f(z)|\ \mathrm{d}s \le L(C)\max_{z\in C}|f(z)|$, kde $L(C)$ je délka křivky C.

PRIMITIVNÍ FUNKCE

DEFINICE. Funkce F se nazývá primitivní k funkci f na otevřené množině G, jestliže pro každé $z \in G$ platí $F'(z) = f(z)$.

VĚTA. Nechť na oblasti U má funkce f derivaci f'. Pak platí

$$\int_\varphi f'(z)\ \mathrm{d}z = f(\beta) - f(\alpha)$$

pro libovolnou křivku φ jdoucí z bodu α do bodu β.

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro funkci f mající spojité parciální derivace 1.řádu svých složek na jednoduše souvislé oblasti G:

1. f je holomorfní na G;
2. integrály z f po křivkách ležících v G nezávisí na cestě (tj. závisí jen na počátečním a koncovém bodě křivky);
3. každý integrál z f po jednoduché uzavřené křivce v G je nulový;
4. f má na G primitivní funkci F.

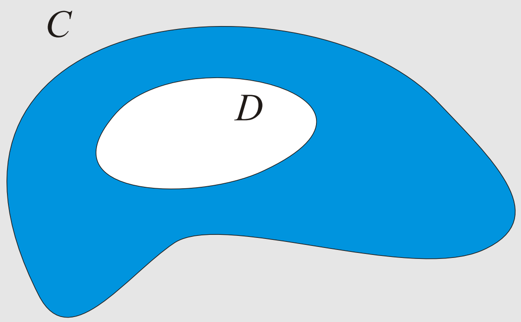
CAUCHYOVA VĚTA

VĚTA. (Cauchy) Nechť f je holomorfní na jednoduché uzavřené křivce C a na jejím vnitřku. Potom je $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

VĚTA. (Cauchy) Nechť C a $C_1, ..., C_n$ jsou jednoduché uzavřené kladně orientované křivky, přičemž $C_1, ..., C_n$ leží uvnitř C a vnitřky křivek $C_1, ..., C_n$ jsou navzájem disjunktní. Nechť f je holomorfní na jednoduché uzavřené křivce C a na jejím vnitřku kromě vnitřků křivek $C_1, ..., C_n$. Potom je

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

DŮSLEDEK. Jestliže jednoduchá uzavřená křivka C obsahuje ve svém vnitřku jednoduchou uzavřenou křivku D a obě jsou kladně orientované, pak $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_D f(z)\,\mathrm{d}z$ pro každou funkci f holomorfní na obou křivkách a mezi nimi.



Tohoto důsledku se používá pro nahrazení komplikované křivky C jednodušší křivkou D, např. kružnicí.

VĚTA. (Cauchyův vzorec) Nechť C je jednoduchá uzavřená křivka a f je holomorfní uvnitř a na C. Potom pro každý bod w ležící ve vnitřku C platí

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z-w}\, \mathrm{d}z = f(w)\,.$$

Vzoreček

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z-w}\, \mathrm{d}z = f(w)$$

počítá hodnotu funkce ve vnitřním bodě integrací přes obvod množiny.

DŮSLEDKY CAUCHYOVA VZORCE

LEMMA. Nechť $f(w,z)$ je komplexní funkce dvou komplexních proměnných, která je je spojitá ve druhé proměnné na jednoduché uzavřené křivce C, holomorfní v první proměnné v oblasti G a má v G spojité parciální derivace podle složek první proměnné. Potom funkce $F(w) = \int_C f(w,z)\,\mathrm{d}z$ je holomorfní v G a platí $F'(w) = \int_C \frac{\partial f}{\partial w}(w,z)\,\mathrm{d}z$.

Důsledky Cauchyova vzorce:

DŮSLEDEK.

1. Holomorfní funkce v oblasti G má v G derivace všech řádů, pro které platí vzorec

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,,$$

   kde C je libovolná jednoduchá uzavřená křivka ležící i s vnitřkem v G a bod w leží ve vnitřku C.

2. Je-li f holomorfní v kruhu $|z-w| \le r$, pak

$$|f^{(n)}(w)| \le \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z); |z-w| = r\}\,.$$

3. (Liouville) Každá omezená celistvá funkce je konstantní.
4. Je-li nekonstantní funkce f holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C, pak pro každý bod w z vnitřku C je $|f(w)| < \max\{|f(z)|; z \in C\}$.

LEKCE34-KIN
integrál po křivce
vlastnosti integrálu
primitivní funkce
Cauchyova věta
obecná Cauchyova věta
Cauchyův vzorec
Liouvillova věta
základní věta algebry
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důsledkem předchozího prvního tvrzení je jednak fakt, že holomorfní funkce má spojité parciální derivace svých složek (všech řádů), že harmonické funkce mají derivace všech řádů, a že funkce mající primitivní funkci je holomorfní.

Tato poslední vlastnost dává již dříve slibovanou Morerovu větu (bez předpokladu spojitosti parciálních derivací):

VĚTA. (Morera) Nechť $\int_c f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pro každou jednoduchou uzavřenou křivku ležící i s vnitřkem v otevřené množině G. Pak je f holomorfní.

Liouvillova věta má jako jednoduchý důsledek základní větu algebry:

VĚTA. Každý polynom P stupně aspoň 1 má nulový bod, tj. existuje z tak, že $P(z) = 0$.

K tradičnímu výkladu Cauchyovy věty patří důkaz Cauchyovy věty pro trojúhelník:

VĚTA. Nechť je funkce f holomorfní na otevřené množině U a křivka φ popisuje obvod trojúhelníka $T \subset U$. Pak

$$\int_\varphi f(z)\ \mathbf{d}z = 0\,.$$

Existuje jeden pěkný trikový důkaz principu maxima modulu:

Při výpočtu integrálu

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,dz$$

pro křivku φ neprocházející počátkem můžeme křivku φ lokálně nahrazovat částmi jednotkové kružnice díky předchozí větě.

Celkem můžeme přetvořit křivku φ na cestu procházející pouze jednotkovou kružnicí. Takto integraci převedeme na známý integrál přes jednotkovou kružnici, který je roven $2\pi i$.

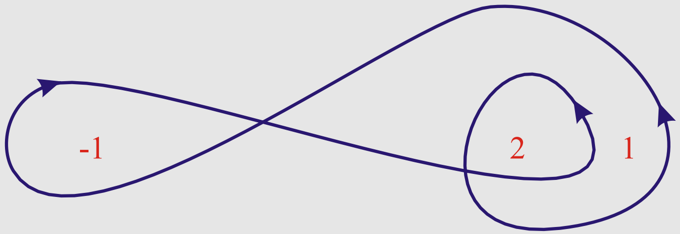
Tedy vidíme, že výsledek bude roven n-krát $2\pi i$, kde n udává počet „oběhů“ křivky φ okolo počátku (proti směru hodinových ručiček).

Obecně počítáme tento počet oběhů křivky (cesty, cyklu) φ okolo daného bodu z_0 jako integrál

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi}\frac{1}{z-z_0}\,dz$$

a tomuto číslu říkáme index bodu z_0 ke křivce φ, značíme $\operatorname{ind}(z_0,\varphi)$.

Index je spojitá, celočíselná a užitečná funkce. Index vzroste o jedničku, pokud přeskočíme přes křivku „zprava doleva“.



Vlastnost o nabývání maxima absolutní hodnoty holomorfní funkce f na hranici je možné použít i na nabývání minima – stačí vzít $1/f$.

Je-li nekonstantní funkce f holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C a nenabývá tam nikde hodnoty 0, pak pro každý bod w z vnitřku C je $|f(w)| > \min\{|f(z)|; z \in C\}$.

LEKCE34-KIN
integrál po křivce
vlastnosti integrálu
primitivní funkce
Cauchyova věta
obecná Cauchyova věta
Cauchyův vzorec
Liouvillova věta
základní věta algebry
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte $\int_C (z-w)^n \, \mathrm{d}z$ pro $n \in \mathbb{Z}$, kde C je kružnice se středem v bodě w.

Řešení. Popis kružnice je $w + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi]$, výsledek je 0 pro $n \neq -1, 2\pi\mathrm{i}$ pro $n = -1$.

Příklad. Spočtěte pomocí obecné Cauchyovy věty integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+16)} \,,$$

kde C se skládá ze dvou kružnic: $|z| = 1$ orientované kladně a $|z| = 3$ orientované záporně.

Příklad. Pomocí Cauchyovy věty spočtěte $\int_C (z^2-1)^{-1} \, \mathrm{d}z$ přes kružnici C o středu 0 a poloměru 2.

Řešení. Zlomek $(z^2-1)^{-1}$ se rozloží:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\Big)$$

a podle obecné Cauchyovy věty nyní stačí spočítat integrály zlomků $1/(z-1)$ a $1/(z+1)$ přes kružnice $|z-1| = 1$ a

$$|z+1| = 1$$

(vyjde $2\pi\mathrm{i}$) a odečíst je.

Příklad. Pomocí derivace Cauchyova vzorce vypočtěte integrály (C jsou jednoduché uzavřené křivky obsahující 0 ve svém vnitřku):

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^4} \, \mathrm{d}z \,, \quad \int_C \frac{\cos z}{z^3} \, \mathrm{d}z \,, \quad \int_C \frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z^2} \, \mathrm{d}z \,.$$

Příklad. Funkce $1/z$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ukažte, že nemá na svém definičním oboru primitivní funkci.

Příklad. Ukažte, že dvě primitivní funkce k f na oblasti G se liší o konstantu.

Příklad. Spočítejte křivkový integrál

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je kladně orientovaný obvod jednotkového kruhu

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Řešení. Budeme integrovat po křivce $\varphi(t) = e^{it}$ pro $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = 2\pi i\ .$$

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_\psi z e^z\,\mathrm{d}z,$$

podél křivky $\psi(t) = t + it^3,\ 0 \le t \le 1$, orientované ve směru vzrůstu parametru t.

Řešení. Můžeme sice postupovat jako dříve, tj. dosazením parametrizace do integrandu, ale jednodušší bude použít větu o integraci primitivní funkce.

Funkce ze^z je holomorfní na $\mathbb{C}$, takže k ní existuje primitivní funkce F. Tu navíc snadno spočítáme per-partes.

Tedy

$$F(z) = (z-1)e^z,$$

a hledaný integrál je roven

$$\begin{aligned}\int_\psi ze^z \,\mathrm{d}z &= F(\psi(1)) - F(\psi(0)) = F(1+i) - F(0) \\ &= -1 + ie^{i+1} = -e\sin 1 - 1 + ie\cos 1.\end{aligned}$$

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} \,\mathrm{d}z,$$

kde $C = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 3\}$.

Řešení. Označme $f(z) = e^{2z}$, pak podle Cauchyova integrálního vzorce máme

$$f^n(-1) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z+1)^{n+1}} \,\mathrm{d}z.$$

Pro $n = 3$ je

$$f'''(z) = 8e^{2z}, \qquad f'''(-1) = 8e^{-2}$$

a podle uvedeného vzorce dostaneme vztah

$$8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} \,\mathrm{d}z.$$

Odtud již snadno zjistíme, že zadaný integrál má hodnotu

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} \,\mathrm{d}z = i\frac{8}{3}\pi e^{-2}.$$

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \left(2xy - x^2\right)\ \mathrm{d}x + \left(x + y^2\right)\ \mathrm{d}y,$$

kde C je uzavřená pozitivně orientovaná křivka ohraničující oblast vymezenou funkcemi

$$y = x^2, \qquad x = y^2.$$

Řešení. Zabývejme se nejdříve prvním případem, tj. $y = x^2$. Integrál parametrizujeme:

$$\int_0^1 \left((2x)(x^2) - x^2\right)\ \mathrm{d}x + \left(x + (x^2)^2\right)\ \mathrm{d}(x^2) = \int_0^1 \left(2x^3 + x^2 + 2x^5\right)\ \mathrm{d}x = \frac{7}{6}.$$

Podobně tomu bude pro $x = y^2$:

$$\int_1^0 \left(2(y^2)(y) - (y^2)^2\right)\ \mathrm{d}(y^2) + \left(y^2 + y^2\right)\ \mathrm{d}y = \int_1^0 \left(4y^4 - 2y^5 + 2y^2\right)\ \mathrm{d}y = -\frac{17}{15}.$$

Celkový výsledek tedy bude

$$\int_C \left(2xy - x^2\right)\ \mathrm{d}x + \left(x + y^2\right)\ \mathrm{d}y = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}.$$