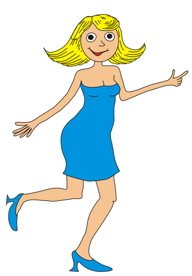
INTEGRACE KOMPLEXNÍ FUNKCE

Komplexní integrace je do určité míry vrchol klasické analýzy.

Jádrem komplexní integrace je Cauchyova věta, což je komplexní forma zákonu zachování, v podstatě jde o základní věty analýzy.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Na konci kapitoly o derivaci je uvedena souvislost existence derivace s potenciálním polem. Existuje další charakterizace potenciálného pole, která nebyla v kapitole o derivaci využita, a to je souvislost s křivkovým integrálem – jeho nezávislost na cestě.



Co dá převedení této charakterizace do komplexních funkcí komplexního oboru?

Na výše položenou otázku existuje krátká a správná odpověď: PRÁCI.

Pokud nebude uvedeno jinak, uzavřená křivka je orientována kladně.

Nejdříve je nutné vysvětlit, jak bude vypadat odpovídající křivkový integrál.

Nechť f je funkce na otevřené množině G. Pole jí odpovídající je komplexní pole $(f, \mathrm{i}f)$. Potřebuje se vyjádřit křivkový integrál 2.druhu tohoto pole po křivce C v G vyjádřené parametricky funkcí $\Phi = (\varphi, \psi) : [a, b] \to G$:

$$\begin{aligned}
\int_C (f \, \mathrm{d}x + \mathrm{i}f \, \mathrm{d}y) &= \int_C \big(f_1(x,y) + \mathrm{i}f_2(x,y)\big) \, \mathrm{d}x + \big(\mathrm{i}f_1(x,y) - f_2(x,y)\big) \, \mathrm{d}y \\
&= \int_C f_1(x,y) \, \mathrm{d}x - f_2(x,y) \, \mathrm{d}y + \mathrm{i} \int_C f_2(x,y) \, \mathrm{d}x + f_1(x,y) \, \mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \big(f_1(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) - f_2(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\big) \, \mathrm{d}t + \\
&+ \mathrm{i} \int_a^b \big(f_2(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_1(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\big) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \big(f_1(\varphi(t), \psi(t)) + \mathrm{i}f_2(\varphi(t), \psi(t))\big)\varphi'(t) \, \mathrm{d}t + \\
&+ \int_a^b \big(f_1(\varphi(t), \psi(t)) + \mathrm{i}f_2(\varphi(t), \psi(t))\big)\mathrm{i}\psi'(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f(\varphi(t) + \mathrm{i}\psi(t))(\varphi'(t) + \mathrm{i}\psi'(t)) \, \mathrm{d}t = \int_a^b f(\Phi(t))\Phi'(t) \, \mathrm{d}t \, .
\end{aligned}$$

DEFINICE. Integrály v předchozí rovnosti se značí

$$\int_C f(z) \, \mathrm{d}z$$

a nazývají se integrál funkce f po křivce C nebo, pokud křivka není podstatná, křivkový integrál funkce f.

Tedy

$$\int_C f(z) \, \mathrm{d}z = \int_a^b f(\Phi(t))\Phi'(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Připomeňte si, že křivkový integrál prvního druhu funkce f po téže křivce je roven

$$\int_C f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, \mathrm{d}t = \int_a^b f(\Phi(t))|\Phi'(t)| \, \mathrm{d}t \, .$$

Samotný výpočet křivkového integrálu je podle vzorečku typu kuchařka

$$\int_C f(z) \, \mathrm{d}z = \int_a^b f(\Phi(t))\Phi'(t) \, \mathrm{d}t$$

snadný.

Klasická záležitost bude nazávislost tohoto integrálu na zvolené parametrizaci dané křivky.

Po čase zjistíme, že často (pro uzavřené krivky na jednoduše souvislé oblasti, kde je f holomorfní) dostaneme výsledek 0.

Jinými slovy, našli jsme jiné jméno pro 0.

Ale to jméno je krásné.

Protože definice $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z$ je vlastně známý křivkový integrál 2.druhu, je snadné přepsat pro tento speciální případ jeho vlastnosti:

VĚTA. Nechť f, g jsou funkce definované na příslušných orientovaných křivkách C, C_1, C_2. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany. Čtvrtá vlastnost platí, jakmile má smysl levá strana.

1. $\int_C (\alpha\mathbf{f}(z) + \beta\mathbf{g}(z))\ \mathrm{d}z = \alpha\int_C \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z + \beta\int_C \mathbf{g}(z)\ \mathrm{d}z$;
2. $\int_{C_1+C_2} \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z = \int_{C_1} \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z + \int_{C_2} \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z$;
3. $\int_{-C} \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z = -\int_C \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z$;
4. $|\int_C f(z)\ \mathrm{d}z| \le \int_C |f(z)|\ \mathrm{d}s \le L(C)\max_{z\in C}|f(z)|$, kde $L(C)$ je délka křivky C.

Důkaz. Poslední vlastnost lze ukázat následovně. Nechť $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = re^{\mathrm{i}\alpha}$. Potom $r = |\int_C f(z)\ \mathrm{d}z|$ a současně $r = \int_C e^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)\ \mathrm{d}z$. Poslední výraz je tedy nezáporné reálné číslo, takže integrál z imaginární složky funkce $e^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)$ je roven 0. Proto je $r = \int_C \Re(e^{-\mathrm{i}\alpha} f(z))\ \mathrm{d}z$ a pro reálné funkce lze uplatnit odhad

$$r \le \int_c |\Re(e^{-\mathrm{i}\alpha} f(z))|\ \mathrm{d}z \le \int_c |e^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)|\ \mathrm{d}z = \int_C |f(z)|\ \mathrm{d}z \le L(C)\max_{z\in C}|f(z)|\,.$$

$\diamond$

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

PRIMITIVNÍ FUNKCE

Bude potřeba z teorie pole převést ještě jeden pojem, a to pojem potenciální funkce.

Dostane se pojem primitivní funkce, který je sice dostatečně jasný, ale je lépe ho definovat i pro komplexní obor.

DEFINICE. Funkce F se nazývá primitivní k funkci f na otevřené množině G, jestliže pro každé $z \in G$ platí $F'(z) = f(z)$.

VĚTA. Nechť na oblasti U má funkce f derivaci f'. Pak platí

$$\int_\varphi f'(z)\ \mathrm{d}z = f(\beta) - f(\alpha)$$

pro libovolnou křivku φ jdoucí z bodu α do bodu β.

Důkaz.

$$\int_\varphi f'(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b f'(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\varphi(t)))\ \mathrm{d}t = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))\,.$$

◇

To je komplexní verze základní věty analýzy.

Nyní je již možné uvést druhou část charakterizace vektorového pole. Protože vnitřky uzavřených křivek ležících v G musí také patřit do G, je nutné předpokládat, že G je jednoduše souvislá.

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro funkci f mající spojité parciální derivace 1.řádu svých složek na jednoduše souvislé oblasti G:

1. f je holomorfní na G;
2. integrály z f po křivkách ležících v G nezávisí na cestě (tj. závisí jen na počátečním a koncovém bodě křivky);
3. každý integrál z f po jednoduché uzavřené křivce v G je nulový;
4. f má na G primitivní funkci F.

Důkaz. Ekvivalence prvních tří podmínek plyne z charakterizace holomorfních funkcí pomocí potenciálního vektorového pole $(f, \mathrm{i}f)$ a z charakterizace potenciálního vektorového pole pomocí křivkového integrálu (vzhledem k předchozí definici integrálu funkce).

Nechť nyní má f na G primitivní funkci F. Z rovností

$$f_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} \qquad f_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{\partial F_1}{\partial y}$$

se derivováním snadno zjistí, že f splňuje Cauchyovy–Riemannovy podmínky; protože má spojité parciální derivace, je holomorfní.

Tím je dokázána implikace $4 \to 1$ a zbývá dokázat opačnou implikaci.

Nechť tedy jsou splněny první tři podmínky. Podle charakterizace potenciálního pole má $(f, \mathrm{i}f)$ gradient F, tj. F má spojité parciální derivace a platí $\frac{\partial F}{\partial x} = f$, $\frac{\partial F}{\partial y} = f\mathrm{i}$. Když se rozepíší tyto rovnosti po složkách, dostane se

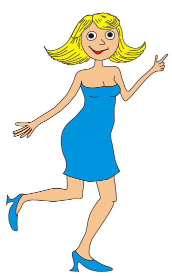
$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial F_2}{\partial x} = f_1 + \mathrm{i}f_2, \frac{\partial F_1}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial F_2}{\partial y} = -f_2 + \mathrm{i}f_1\,.$$

porovnáním složek se zjistí, že pro F jsou splněny Cauchyovy–Riemannovy podmínky a že $F'(z) = f$. ◇

Předchozí tvrzení obsahuje neskutečné mnoho užitečných informací. Například holomorfní funkce dostala primitivní funkci a počítání křivkového integrálu pomocí primitivní funkce to celé korunovalo. O.K.?

Je to tak. Což nejsnáze zjistíme tak, jak jsme to právě zjistili.

Ani sám nevím, kde leží jádro pudla, a ani co jádro pudla znamená.



Teď tomu ještě dáme nějaké přiléhavé jméno a bude to. Navrhuji nazývat to Cauchyova věta.

Poznámky 2 Otázky 2 2

CAUCHYOVA VĚTA

Předchozí větu přeformulujeme. Je to velmi důležité tvrzení a proto bude zformulováno znovu za obecných předpokladů:

VĚTA. (Cauchy) Nechť f je holomorfní na jednoduché uzavřené křivce C a na jejím vnitřku. Potom je $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = 0$.

Když jsem ještě neměl kouzelnickou hůlku, používal jsem místo ní úspěšné tuto Cauchyovu větu.

Poznamenejme (jak již bylo zmíněno v *Poznámkách 2*), je možné dokázat Greenovu větu bez předpokladu spojitosti použitých parciálních derivací, nebo je možné dokázat přímo, že v implikaci $(1) \to (3)$ není tato spojitost potřeba.

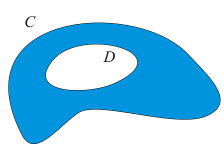
Použije-li se obecná Greenova věta i pro vícenásobně souvislé oblasti, dostane se následující tvrzení:

VĚTA. (Cauchy) Nechť C a $C_1, ..., C_n$ jsou jednoduché uzavřené kladně orientované křivky, přičemž $C_1, ..., C_n$ leží uvnitř C a vnitřky křivek $C_1, ..., C_n$ jsou navzájem disjunktní. Nechť f je holomorfní na jednoduché uzavřené křivce C a na jejím vnitřku kromě vnitřků křivek $C_1, ..., C_n$. Potom je

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Cauchyova věta se dostane pro $n = 0$. Tvrzení pro $n = 1$ je velmi důležité, a je vhodné ho zformulovat jako důsledek.

DŮSLEDEK. Jestliže jednoduchá uzavřená křivka C obsahuje ve svém vnitřku jednoduchou uzavřenou křivku D a obě jsou kladně orientované, pak $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = \int_D f(z)\ \mathrm{d}z$ pro každou funkci f holomorfní na obou křivkách a mezi nimi.



Tohoto důsledku se používá pro nahrazení komplikované křivky C jednodušší křivkou D, např. kružnicí.

Následující důležité tvrzení takovéto náhrady v důkazu využívá.

Je to tzv. Cauchyův vzorec, z kterého vyplývá, že hodnoty holomorfní funkce uvnitř křivky jsou určeny hodnotami na křivce.

VĚTA. (Cauchyův vzorec) Nechť C je jednoduchá uzavřená křivka a f je holomorfní uvnitř a na C. Potom pro každý bod w ležící ve vnitřku C platí

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z-w}\ \mathrm{d}z = f(w)\,.$$

Důkaz. Nechť w je bod z vnitřku C. Podle předchozí věty lze $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z$ nahradit integrálem $\int_{C_r} f(z)\ \mathrm{d}z$, kde C_r je kružnice o středu w a poloměru r, ležící ve vnitřku křivky C.

Integrál se rozepíše jako součet

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-w}\ \mathrm{d}z = f(w) \int_{C_r} \frac{1}{z-w}\ \mathrm{d}z + \int_{C_r} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\ \mathrm{d}z\,.$$

První integrál na pravé straně se rovná $2\pi\mathrm{i}$ (viz *Otázky*).

Druhý integrál je roven 0. Opravdu, pro libovolné $\varepsilon > 0$ se najde tak malé r, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ pro každé $z \in \mathbb{C}_r$; potom

$$\Big|\int_{C_r} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}\,\mathrm{d}z\Big| \le \varepsilon \int_{C_r} \frac{\mathrm{d}z}{r} = 2\pi\varepsilon\,.$$

$\diamond$

Vzoreček

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z - w}\,\mathrm{d}z = f(w)$$

počítá hodnotu funkce ve vnitřním bodě integrací přes obvod množiny.

Z pohledu diferenciálních rovnic (zde Cauchyovy–Riemannovy podmínky) je to v pořádku. Řešení existuje a je jednoznačné.

Pokud bude funkce na hranici nulová, tak je nulová všude. Jsem rozený detektiv.

Poznámky 3   Příklady 3   Otázky 3   3

DŮSLEDKY CAUCHYOVA VZORCE

Cauchyův vzorec má mnoho důsledků. Nejdříve je vhodné si uvědomit, že lze používat větu z kapitoly o integrálech s parametrem, která uvádí podmínky pro záměnu derivace a integrálu:

LEMMA. Nechť $f(w, z)$ je komplexní funkce dvou komplexních proměnných, která je je spojitá ve druhé proměnné na jednoduché uzavřené křivce C, holomorfní v první proměnné v oblasti G a má v G spojité parciální derivace podle složek první proměnné. Potom funkce $F(w) = \int_C f(w, z)\,\mathrm{d}z$ je holomorfní v G a platí $F'(w) = \int_C \frac{\partial f}{\partial w}(w, z)\,\mathrm{d}z$.

Já jsem tam ten parametr viděl!

To se musí oslavit.

Důkaz. Důkaz vyplyne z příslušné věty o derivování integrálu reálné funkce podle parametru.

Stačí rozepsat $\int_C f(w,z)\ \mathrm{d}z$ podle složek funkce f a podle parametrického zadání křivky C na reálnou složku a imaginární složku.

Poté se použije právě citované tvrzení pro parciální derivace funkce F podle složek w a ověří se platnost Cauchyových-Riemannových podmínek pro tyto derivace (tyto podmínky platí pro f proměnné w).

Protože všechny použité funkce za integrálem jsou spojité na kompaktní množině, jsou omezené a tím jsou dány potřebné integrovatelné majoranty. ◇

Nyní slíbené důsledky Cauchyova vzorce.

DŮSLEDEK.

1. Holomorfní funkce v oblasti G má v G derivace všech řádů, pro které platí vzorec
$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\ \mathrm{d}z\,,$$
kde C je libovolná jednoduchá uzavřená křivka ležící i s vnitřkem v G a bod w leží ve vnitřku C.
2. Je-li f holomorfní v kruhu $|z-w| \le r$, pak
$$|f^{(n)}(w)| \le \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z); |z-w| = r\}\,.$$
3. (Liouville) Každá omezená celistvá funkce je konstantní.
4. Je-li nekonstantní funkce f holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C, pak pro každý bod w z vnitřku C je $|f(w)| < \max\{|f(z)|; z \in C\}$.

Důkaz. První tvrzení plyne indukcí z předchozího tvrzení o derivaci za integrálem.

Druhé tvrzení je důsledkem prvního a odhadu absolutní hodnoty integrálu.

Třetí tvrzení plyne z druhého pro volbu $n = 1$ a r jsoucí k ∞; vyjde $f' = 0$.

Poslední tvrzení se dokáže následujícím způsobem. Funkce $|f|$ dosahuje svého maxima m na křivce C nebo v jejím vnitřku.

Nechť nastane druhý případ, takže množina $A = \{z; z \in \iota C, |f(z)| = m\}$ je neprázdná.

Protože f je nekonstantní, existuje w z vnitřku C ležící na hranici A.

Vezme se kružnice K o poloměru r okolo w ležící uvnitř C a na ní bod $q \notin A$. Pak $|f(q)| < |f(w)| = m$ a $|f(z)| < m - \varepsilon$ pro nějaké kladné ε a z náležící nějakému oblouku $O \subset K$ délky d.

Podle Cauchyova vzorce platí
$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_K \frac{f(z)}{z-w}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\Big(\int_O \frac{f(z)}{z-w}\ \mathrm{d}z + \int_{K\setminus O} \frac{f(z)}{z-w}\ \mathrm{d}z\Big)\,.$$

Pro absolutní hodnoty nyní platí
$$m \le \frac{1}{2\pi r}((m-\varepsilon)d + m(2\pi r - d)) = m - \frac{\varepsilon d}{2\pi r} < m\,,$$

což je spor. $\diamond$

Důsledkem předchozího prvního tvrzení je jednak fakt, že holomorfní funkce má spojité parciální derivace svých složek (všech řádů), že harmonické funkce mají derivace všech řádů, a že funkce mající primitivní funkci je holomorfní.

Tato poslední vlastnost dává již dříve slibovanou Morerovu větu (bez předpokladu spojitosti parciálních derivací):

VĚTA. (Morera) Nechť $\int_c f(z)\, \mathrm{d}z = 0$ pro každou jednoduchou uzavřenou křivku ležící i s vnitřkem v otevřené množině G. Pak je f holomorfní.

Liouvillova věta má jako jednoduchý důsledek základní větu algebry:

VĚTA. Každý polynom P stupně aspoň 1 má nulový bod, tj. existuje z tak, že $P(z) = 0$.

Důkaz. Nechť $P(z) \neq 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. pak $1/P(z)$ je celistvá funkce. Podobně jako v reálném oboru se ukáže, že $|P(z)|$ má v ∞ limitu ∞, takže $1/P(z)$ je omezená funkce. Podle Liouvillovy věty je tato funkce konstantní a tedy P má stupeň 0. $\diamond$

Na začátku byla jedna nula, a na konci je základní věta algebry. Neuvěřitelně krásné.

Všimli jste si, jak na jaře pěkně svítí sluníčko? Možná že i to je důsledek Cauchyova vzorce.

V každém případě se polynomem zdeformovaná komplexní rovina nevyhne nule díky základní větě algebry, a ta platí díky Cauchyovu vzorci, který platí díky zákonu zachování, kterýžto je důsledkem základní věty analýzy.

Dlouho, předlouho jsem se pokoušel té nule vyhnout, ale nakonec jsem to (prozatím) vzdal.

Já jsem se Nule nikdy nevyhýbal, vždyť je tak důležitá ...

Sumasumárum, když si uděláte židličku ve tvaru $|P(z)|$, kde P je komplexní polynom, tak jeho nožičky budou stát všechny na zemi a nebude se vám židlička viklat ...

... pokud si neuděláte židličku od polynomu, který má méně než tři různé kořeny. To jsem vyzkoušel.

Poznámky 4   Příklady 4   Otázky 4   4 5 6

POZNÁMKY

Poznámky 1:

V uvedeném popisu se jednalo o hladkou křivku (tj, obě funkce φ, ψ mají spojitou derivaci na $[a, b]$).

Je zřejmé, že pokud je křivka po částech hladká, dostane se integrál přes křivku jako součet integrálů přes jednotlivé hladké části. Jiné křivky nebudou používány.

Není těžké ukázat (pomocí stejnoměrné spojitosti), že integrál spojité funkce na křivce C lze libovolně přesně aproximovat integrálem stejné funkce po lomené čáře začínající a končící ve stejných bodech jako C. Lze navíc požadovat, aby body, ve kterých se lomená čára lomí, ležely na C.

Uvědomte si rozdíl v popisu integrálů 1. a 2.druhu pomocí parametru Φ.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

Uvědomte si, že obě podmínky v charakterizaci holomorfní funkce pomocí integrálu jsou potřeba.

I kdyby se předpokládalo, že je známo, že holomorfní funkce má spojité parciální derivace svých složek, podmínky (2)–(3) neimplikují existenci těchto derivací. Podmínka (4) ji implikuje, ale až na základě Cauchyovy věty dokazované později.

Uvedená věta se dá rozdělit na několik částí. Podmínky (2) a (3) jsou ekvivalentní pro spojité funkce f.

Podmínku (3) lze napsat obecněji za slabšího předpokladu jen otevřenosti G: *každý integrál z* f *po jednoduché uzavřené křivce ležící i s vnitřkem v* G *je nulový.*

Podmínka (3) vyplývá z (1) pomocí Greenovy věty, kde ovšem byl předpoklad spojitosti parciálních derivací 1.řádu (je ovšem možné dokázat Greenovu větu bez tohoto předpokladu, jen s existencí parciálních derivací 1.řádu, dokonce ještě trochu méně).

Potom (1) implikuje (3) bez jakéhokoli dalšího předpokladu na f, což je tzv. Cauchyova věta.

Podobné je to s opačnou implikací $(3) \to (1)$. Takže není nutné předpokládat spojitost parciálních derivací. Tato implikace se pak nazývá Morerova věta.

Co se týká poslední podminky, existence primitivní funkce, implikace $(4) \to (1)$ plyne bez předpoklady existence parciálních derivací, pokud je již známo, že holomorfní funkce má derivace všech řádů.

Stačí předpokládat, že G je otevřená. Pro opačnou implikaci je však nutné předpokládat, že G je jednoduše souvislá (obecněji: komponenty G jsou jednoduše souvislé) – viz *Otázky*.

Uvědomte si, že primitivní funkce je holomorfní. Protože se později ukáže, že holomorfní funkce má derivace všech řádů, funkce mající primitivní funkci musí být holomorfní.

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

Důkaz Cauchyovy věty bez použití spojitosti parciálních derivací sestrojil Goursat v 2.polovině 19.století (proto se Cauchyova věta někdy nazývá Cauchyova-Goursatova věta).

Uvědomil si, že vnitřek křivky C lze pokrýt konečně mnoha nepřekrývajícími se kompaktními hezkými oblastmi s hranicemi C_i (např. čtverci a „křivými" čtverci), na kterých je $|(f(z) - f(w_i))/(z - w_i) - f'(w_i)| < \varepsilon$ pro dané kladné ε a jisté w_i z těchto malých oblastí.

Pak integrál f přes C je roven součtu integrálů přes C_i a tam je roven integrálu z $(z - w_i)g_i$, kde g_i je předchozí výraz v absolutní hodnotě.

Tyto poslední integrály nejsou v absolutní hodnotě větší než $\varepsilon K A_i$, kde K je konstanta nezávislá na i a A_i je plocha malé oblasti. Odtud již vyplyne dokazovaný výsledek.

Důkaz obecné Cauchyovy věty je stejný jako u důkazu obecné Greenovy věty; v důkazu se nepoužívá spojitosti parciálních derivací.

Morerova věta se dokáže až pomocí důsledku Cauchyovy věty (dokázané bez těchto spojitostí) o existenci všech derivací holomorfní funkce (odkud vyplývá, že holomorfní funkce má spojité parciální derivace svých složek).

Pokud jsou integrály f přes uzavřené křivky v okolí bodu z nulové, má v tomto okolí f primitivní funkci, ta je holomorfní a má proto i další derivace, a tedy je i f holomorfní.

K tradičnímu výkladu Cauchyovy věty patří důkaz Cauchyovy věty pro trojúhelník:

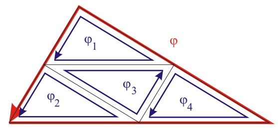
VĚTA. Nechť je funkce f holomorfní na otevřené množině U a křivka φ popisuje obvod trojúhelníka $T \subset U$. Pak

$$\int_{\varphi} f(z)\ \mathrm{d}z = 0\,.$$

Důkaz. Nechť

$$\left|\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z\right| = K > 0\ .$$

Odvodíme spor. Označme L obvod trojúhelníku T. Rozdělíme trojúhelník T středními příčkami na čtyři trojúhelníky. Alespoň přes obvod jednoho je analogický integrál roven alespoň $K/4$.



Integraci přes obvod trojúhelníku nahradíme integrací přes obvody menších trojúhelníků. Úseky, které jdeme sem i tam se ruší.

Tak postupujeme indukcí a sestavíme zmenšující se posloupnost trojúhelníků. Její průnik je jeden bod, označíme jej z_0.

V bodě z_0 použijeme existenci derivace a vyjádříme funkci f ve tvaru

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z)\ .$$

První dva sčítanci na pravé straně jsou funkce mající primitivní funkci, tedy se integrace z funkce $f(z)$ přes uzavřenou křivku redukuje na integraci funkce $(z - z_0)\varepsilon(z)$.

V n-tém kroku při integraci přes obvod φ_n trojúhelníku T_n vybraného v n-tém kroku odhadujeme

$$\frac{K}{4^n} \le \left|\int_{\varphi_n} f(z)\, dz\right| \le \left|\int_{\varphi_n} (z - z_0)\varepsilon(z)\, dz\right| \le \frac{L^2}{4^n} \sup_{z\in T_n} |\varepsilon(z)|\ .$$

Po násobení 4^n plyne díky derivaci v bodě z_0 z

$$K \le L^2 \sup_{z\in T_n} |\varepsilon(z)|\ \to\ 0\ ,\ n \to \infty$$

spor. ◇

Pokud oslabíme předpoklady tak, že je funkce f spojitá v U a holomorfní v $U \setminus \{w_0\}$, platí tvrzení věty stejně.

Okolo bodu w_0 uděláme malinký trojúhelníček T_w s nepatrným integrálem a zbytek rozdělíme opět na trojúhelníky s nulovým integrálem ....

Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

Uvedené lemma o derivaci integrálu podle parametru musí mít v předpokladech podmínku o spojitých parciálních derivacích, protože tato spojitost vyplyne až z aplikace tohoto lemmatu.

Použije se na parciální derivace zlomku $f(z)/(z - w)$ podle složek bodů w, které opravdu spojité jsou (o f stačí předpokládat spojitost).

Použití lemmatu na integrál $g(w) = \int_c f(z)/(z - w)\ \mathrm{d}z$ dává obecnější výsledek, než je uveden: *Je-li f spojitá na jednoduché uzavřené křivce C, je g holomorfní uvnitř C.*

Čtvrtá vlastnost holomorfních funkcí o nabývání maxima absolutní hodnoty holomorfní funkce se nazývá *princip maxima modulu*; slovo „modul" se často používá pro absolutní hodnotu.

Jak je ukázáno v *Otázce 4*, platí tento princip i pro reálné harmonické funkce. Dá se ukázat, že platí i pto tzv. subharmonické funkce (Laplaceův operátor na těchto funkcích má nezápornou hodnotu). Absolutní hodnota holomorfní funkce je subharmonická funkce.

Existuje jeden pěkný trikový důkaz principu maxima modulu:

Důkaz. Použijeme integrální vyjádření holomorfní funkce f^n (zde se jedná o n-tou mocninu funkce f) a odhadneme

$$|f^n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f^n(w)}{w-z}\, dw \right| \;\leq\; M^n \frac{R}{R-z}\,,$$

tedy

$$|f(z)| \;\leq\; M \sqrt[n]{\frac{R}{R-z}} \;\to M\,,\; n \to \infty\,,$$

kde M je odhad $|f|$ na jednotkové kružnici. ◇

Při výpočtu integrálu

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\, dz$$

pro křivku φ neprocházející počátkem můžeme křivku φ lokálně nahrazovat částmi jednotkové kružnice díky předchozí větě.

Celkem můžeme přetvořit křivku φ na cestu procházející pouze jednotkovou kružnicí. Takto integraci převedeme na známý integrál přes jednotkovou kružnici, který je roven $2\pi i$.

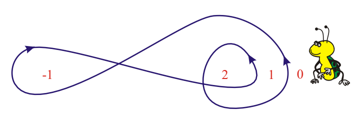
Tedy vidíme, že výsledek bude roven n-krát $2\pi i$, kde n udává počet „oběhů“ křivky φ okolo počátku (proti směru hodinových ručiček).

Obecně počítáme tento počet oběhů křivky (cesty, cyklu) φ okolo daného bodu z_0 jako integrál

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z-z_0}\, dz$$

a tomuto číslu říkáme index bodu z_0 ke křivce φ, značíme $\operatorname{ind}(z_0, \varphi)$.

Index je spojitá, celočíselná a užitečná funkce. Index vzroste o jedničku, pokud přeskočíme přes křivku „zprava doleva“.



Konec poznámek 4.

PŘÍKLADY

Příklady 1:

1. Spočtěte $\int_C \overline{z}\ \mathrm{d}z$, kde C je buď úsečka z počátku do bodu $(1,1)$ nebo oblouk kružnice se středem $(0,1)$ spojující počátek s bodem $(1,1)$ v 1.kvadrantu. [$1, 1 + \mathrm{i}/2(\pi - 2)$]

2. Bez jeho spočítání odhadněte integrál $\int_C z^{-4}\ \mathrm{d}z$, kde C je úsečka spojující i s bodem 1. [$4\sqrt{2}$]

3. Spočtěte $\int_C \pi \mathrm{e}^{\pi \overline{z}}\ \mathrm{d}z$, kde C je hranice čtverce (kladně orientovaná) s vrcholy $0, 1, 1+\mathrm{i}, \mathrm{i}$. [$4(\mathrm{e}^\pi - 1)$]

4. Odhadněte integrál $\int_C (\mathrm{e}^z - \overline{z})\ \mathrm{d}z$, kde C je obvod trojúhelníka s vrcholy $0, -4, 3\mathrm{i}$ [60]

5. Spočtěte $\int_C (z-w)^n\ \mathrm{d}z$ pro $n \in \mathbb{Z}$, kde C je kružnice se středem v bodě w. [Popis kružnice je $w + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi]$, výsledek je 0 pro $n \neq -1$, $2\pi\mathrm{i}$ pro $n = -1$.]

Konec příkladů 1.

Příklady 3:

1. Spočtěte pomocí obecné Cauchyovy věty integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+16)}\,,$$

kde C se skládá ze dvou kružnic: $|z| = 1$ orientované kladně a $|z| = 3$ orientované záporně. [0]

2. Pomocí *Otázky 1* se dají snadno spočítat některé integrály, např. $\int_C (z^2-1)^{-1}\,\mathrm{d}z$ přes kružnici C o středu 0 a poloměru 2.
Zlomek $(z^2-1)^{-1}$ se rozloží:
$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\Big)$$
a podle obecné Cauchyovy věty nyní stačí spočítat integrály zlomků $1/(z-1)$ a $1/(z+1)$ přes kružnice $|z-1|=1$ a
$$|z+1|=1$$
(vyjde 2πi) a odečíst je.

3. Spočtěte způsobem z předchozího příkladu
$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2z+2}\,.$$
[π]

4. Podobně spočítejte
$$\int_C \frac{dez}{z^2+1}\,,$$
kde C je kružnice $x^2+y^2+4y=0$.

Konec příkladů 3.

Příklady 4:

1. Pomocí derivace Cauchyova vzorce vypočtěte integrály (C jsou jednoduché uzavřené křivky obsahující 0 ve svém vnitřku):
$$\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\,\mathrm{d}z\,,\quad \int_C \frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}z\,,\quad \int_C \frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

2. Nechť C je jednoduchá uzavřená křivka. Ukažte, že
$$\int_C \frac{z^3+2z}{(z-w)^3}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 6\pi\mathrm{i}w, & \text{pro } w \text{ uvnitř } C;\\ 0, & \text{pro } w \text{ vně } C.\end{cases}$$

3. Najděte maxima a minima absolutní hodnoty funkce $(z+1)^2$ na trojúhelníku s vrcholy $0, 2, \mathrm{i}$.

Konec příkladů 4.

OTÁZKY

Otázky 1:

1. Dokažte uvedené první 3 vlastnosti křivkového integrálu.

2. Ukažte, že křivkový integrál 1.druhu funkce f přes křivku C lze psát jako $\int_C f(z)|\,\mathrm{d}z|$.

Konec otázek 1.

Otázky 2:

1. Funkce $1/z$ je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ukažte, že nemá na svém definičním oboru primitivní funkci. Proč?

2. Funkce $1/z^2$ je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ukažte, že má na svém definičním oboru primitivní funkci. Jaký je rozdíl oproti předchozímu případu?

3. Platí, že derivace funkce f v oblasti G je nulová právě když je f konstantní. Dokažte to jednak vyjádřením derivace pomocí parciálních derivací a jednak pomocí vztahu existence primitivní funkce a integrálu po uzavřené křivce.

4. Ukažte, že dvě primitivní funkce k f na oblasti G se liší o konstantu.

5. Dokažte, že f je polynom nejvýše n-tého řádu na oblasti G právě když $f^{(n)}=0$. Použijte indukci a Příklad 3.

Konec otázek 2.

Otázky 3:

1. Ukažte, že je-li C libovolná jednoduchá uzavřená křivka (kladně orientovaná) a w leží uvnitř C, pak

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-w} = 2\pi\mathrm{i}\,.$$

2. Ukažte, že neplatí obdoba Cauchyovy věty, kde se místo vnitřku křivky bere její vnějšek (tj. f holomorfní na C a na jejím vnějšku, pak $\int_C f = 0$).

3. Pomocí transformace $w = 1/z$ převeďte případ předchozí otázky na situaci v Cauchyově větě a najděte dodatečný předpoklad, aby obdoba Cauchyovy věty pro vnějšek platila.

4. Nechť w leží uvnitř 1. kvadrantu, křivka C spojuje w s bodem 1 a neprochází počátkem. Pak

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \operatorname{Log} z + 2k\pi\mathrm{i}\,,$$

kde číslo k uvádí počet obtočení C okolo počátku (počítáno kladně při obtočení proti směru hodinových ručiček a záporně při opačném obtočení). Přesný důkaz je obtížný, ale zkuste vzorec ukázat pro některé speciální případy.

Konec otázek 3.

Otázky 4:

1. Proveďte podrobnosti v naznačeném důkazu derivace integrálu podle parametru.

2. Vlastnost o nabývání maxima absolutní hodnoty holomorfní funkce f na hranici je možné použít i na nabývání minima – stačí vzít $1/f$.

Dokažte, že *je-li nekonstantní funkce f holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C a nenabývá tam nikde hodnoty 0, pak pro každý bod w z vnitřku C je $|f(w)| > \min\{|f(z)|; z \in C\}$.*

Najděte příklad, že tvrzení neplatí, pokud f nabývá hodnoty 0.

3. Ukažte, že důkaz uvedené čtvrté vlastnosti platí pro trochu obecnější situaci, a to pro funkci f holomorfní uvnitř křivky C a spojité na C.

4. Dokažte, že každá nekonstantní harmonická funkce na omezené oblasti G, která je spojitá na hranici G, nabývá maxima a minima pouze na hranici G. [Návod: harmonická funkce g je reálnou složkou holomorfní funkce f; funkce e^f je holomorfní a platí pro ni princip maxima modulu, ale $|\mathrm{e}^f| = \mathrm{e}^g$ a reálná exponenciální funkce je ryze monotónní.]

5. Nechť g, h jsou dvě harmonické funkce v oblasti G spojité a totožné na hranici G. Ukažte, že pak $g = h$ na G.

6. Je-li nekonstantní f holomorfní v bodě w, pak existuje q tak, že $|f(w)| < |f(q)|$. Pokud je $f(w) \neq 0$, existuje bod p tak, že $|f(w)| > |f(p)|$.

7. Je-li f celistvá funkce, pak $g(r) = \max\{|f(z)|; |z| = r\}$ je rostoucí funkce.

Konec otázek 4.

CVIČENÍ

Cvičení 1:

Příklad. Spočítejte křivkový integrál

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je kladně orientovaný obvod jednotkového kruhu

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Řešení. Budeme integrovat po křivce $\varphi(t) = e^{it}$ pro $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = 2\pi i\,.$$

Příklad. Spočítejte křivkový integrál

$$\int_\varphi |z|\bar{z}\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je záporně orientovaný obvod horního jednotkového polokruhu

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ Im\, z > 0\}.$$

Řešení. Pro jednodušší počítání budeme integrovat po křivce $\psi = -\varphi$, tedy změnili jsme orientaci křivky, což v závěru napravíme tím, že u výsledku otočíme znaménko.

Prostě půjdeme po křivce pozpátku, protože je to jednodušší.

Chodit pozpátku je jednodušší? To chci vidět.

Křivka ψ je složena ze dvou částí: úsečky $\psi_1(t) = t,\ |t| \le 1$ a z polokružnice $\psi_2(t) = e^{it},\ 0 \le t \le \pi$, orientovaných ve směru vzrůstu parametru t.

Integrál pak bude

$$\begin{aligned}\int_\psi |z|\bar{z}\,\mathrm{d}z &= \int_{\psi_1} |z|\bar{z}\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_2} |z|\bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} |t|\bar{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} |e|^{it} e^{-it} e^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} t^2 \operatorname{sign} t\,\mathrm{d}t + i\pi = 0 + i\pi.\end{aligned}$$

Integrál podél φ je

$$\int_\varphi |z|\bar{z}\,\mathrm{d}z = i\pi.$$

I pí. To je docela dobrá myšlenka.

Nebo tam je ještě to mínus???

Konec cvičení 1.

Cvičení 2: Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_\psi z e^z \, \mathrm{d}z,$$

podél křivky $\psi(t) = t + it^3$, $0 \le t \le 1$, orientované ve směru vzrůstu parametru t.

Řešení. Můžeme sice postupovat jako dříve, tj. dosazením parametrizace do integrandu, ale jednodušší bude použít větu o integraci primitivní funkce.

Funkce ze^z je holomorfní na $\mathbb{C}$, takže k ní existuje primitivní funkce F. Tu navíc snadno spočítáme per-partes.

Tedy

$$F(z) = (z-1)e^z,$$

a hledaný integrál je roven

$$\begin{aligned} \int_\psi z e^z \, \mathrm{d}z &= F(\psi(1)) - F(\psi(0)) = F(1+i) - F(0) \\ &= -1 + ie^{i+1} = -e\sin 1 - 1 + ie\cos 1. \end{aligned}$$

Je to prostě tak.

To si prostě promyslete ještě jednou.

Konec cvičení 2.

Cvičení 3: Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_{\psi} \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}\,\mathrm{d}z,$$

kde ψ je kladně orientovaná kružnice

$$\psi = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 2\}.$$

Řešení. Označme integrand f. Máme tedy integrovat funkci f po uzavřené jednoduché křivce. Ale f není holomorfní v bodech 1 a i, což jsou body vnitřku ψ.

Budeme se snažit nahradit integrál podél ψ integrálem po jiné křivce, jak nám to umožňuje důsledek Cauchyovy věty.

Který důsledek? Cauchyova věta jich má spousty! A Cauchyových vět je spousta. To tedy máme …

Označme ψ_1 kružnici se středem i a poloměrem 1/10 a ψ_2 kružnici se středem 1 a poloměrem 1/10. Uvažujme oblast

$$G = \operatorname{int} \psi \setminus (\operatorname{int} \psi_1 \cup \operatorname{int} \psi_2).$$

Funkce f je holomorfní na G, a proto

$$\int_{\psi} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f.$$

Tedy

$$\int_{\psi} \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}\,\mathrm{d}z = \int_{\psi} \left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\psi_1} \left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z + \int_{\psi_2} \left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\psi_1} \frac{\mathrm{d}z}{z-i} + \int_{\psi_2} \frac{\mathrm{d}z}{z-1} = 4\pi i.$$

Narovinu, myslíte si, že to vyšlo hodně nebo málo?

Konec cvičení 3.

Cvičení 4: Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}z,$$

kde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$.

Řešení. Označme $f(z) = e^{2z}$, pak podle Cauchyova integrálního vzorce máme

$$f^n(-1) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Pro $n = 3$ je

$$f'''(z) = 8e^{2z}, \qquad f'''(-1) = 8e^{-2}$$

a podle uvedeného vzorce dostaneme vztah

$$8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i}\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}z.$$

Odtud již snadno zjistíme, že zadaný integrál má hodnotu

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}z = i\frac{8}{3}\pi e^{-2}.$$

Střízlivý k tomu nemohu mít žádný smysluplný komentář.

Konec cvičení 4.

Cvičení 5: Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z,$$

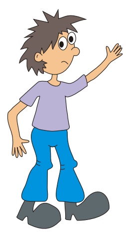
kde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$.

Řešení. Budeme postupovat podobně jako minule. Označme $f(z) = \sin \pi z^2 + \cos \pi z^2$.

Rozkladem na parciální zlomky převedeme integrál na součet dvou integrálů, a ty spočítáme pomocí Cauchyova integrálního vzorce.

V češtině platí komutativní zákon, podle vzoru "také černá kráva bílé mlého dává". Zkuste si komutativitu u výše uvedeného textu.

BTW, všimli jste si, že jste ztratili smysl pro realitu?



Ano i ne. To i byla komplexní jednotka.

$$\int_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2}\,\mathrm{d}z - \int_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1}\,\mathrm{d}z.$$

Vzorec

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^1}\,\mathrm{d}z.$$

použijeme pro $a = 1$ a pro $a = 2$, čímž dostaneme

$$\int_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\sin \pi 2^2 + \cos \pi 2^2\right) = 2\pi i,$$

a

$$\int_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\sin \pi 1^2 + \cos \pi 1^2\right) = -2\pi i,$$

A tedy

$$\int_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i.$$

Konec cvičení 5.

Cvičení 6: Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \left(2xy - x^2\right) \,\mathrm{d}x + \left(x + y^2\right) \,\mathrm{d}y,$$

kde C je uzavřená pozitivně orientovaná křivka ohraničující oblast vymezenou funkcemi

$$y = x^2, \qquad x = y^2.$$

Řešení. Zabývejme se nejdříve prvním případem, tj. $y = x^2$. Integrál parametrizujeme:

$$\int_0^1 \left((2x)(x^2) - x^2\right) \,\mathrm{d}x + \left(x + (x^2)^2\right) \,\mathrm{d}(x^2) = \int_0^1 \left(2x^3 + x^2 + 2x^5\right) \,\mathrm{d}x = \frac{7}{6}.$$

Podobně tomu bude pro $x = y^2$:

$$\int_1^0 \left(2(y^2)(y) - (y^2)^2\right) \,\mathrm{d}(y^2) + \left(y^2 + y^2\right) \,\mathrm{d}y = \int_1^0 \left(4y^4 - 2y^5 + 2y^2\right) \,\mathrm{d}y = -\frac{17}{15}.$$

Celkový výsledek tedy bude

$$\int_C \left(2xy - x^2\right) \,\mathrm{d}x + \left(x + y^2\right) \,\mathrm{d}y = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}.$$

Taky jste čekali, že vyjde nula?

Ona skoro vyšla. U mně v pořádku.

Konec cvičení 6.

STANDARDY z kapitoly

INTEGRACE KOMPLEXNÍ FUNKCE

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

DEFINICE. Zápisem

$$\int_C f(z) \,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\Phi(t))\Phi'(t) \,\mathrm{d}t\,.$$

definujeme integrál funkce f po křivce C parametrizované Φ nebo, pokud křivka není podstatná, nazýváme jej křivkový integrál funkce f.

VĚTA. Nechť f, g jsou funkce definované na příslušných orientovaných křivkách C, C_1, C_2. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany. Čtvrtá vlastnost platí, jakmile má smysl levá strana.

1. $\int_C (\alpha \mathbf{f}(z) + \beta \mathbf{g}(z))\ \mathrm{d}z = \alpha \int_C \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z + \beta \int_C \mathbf{g}(z)\ \mathrm{d}z$;
2. $\int_{C_1+C_2} \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z = \int_{C_1} \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z + \int_{C_2} \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z$;
3. $\int_{-C} \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z = -\int_C \mathbf{f}(z)\ \mathrm{d}z$;
4. $|\int_C f(z)\ \mathrm{d}z| \le \int_C |f(z)|\ \mathrm{d}s \le L(C) \max_{z\in C} |f(z)|$, kde $L(C)$ je délka křivky C.

Důkaz. Poslední vlastnost lze ukázat následovně. Nechť $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = re^{\mathrm{i}\alpha}$. Potom $r = |\int_C f(z)\ \mathrm{d}z|$ a současně $r = \int_C e^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)\ \mathrm{d}z$. Poslední výraz je tedy nezáporné reálné číslo, takže integrál z imaginární složky funkce $e^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)$ je roven 0. Proto je $r = \int_C \Re(e^{-\mathrm{i}\alpha} f(z))\ \mathrm{d}z$ a pro reálné funkce lze uplatnit odhad

$$r \le \int_c |\Re(e^{-\mathrm{i}\alpha} f(z))|\ \mathrm{d}z \le \int_c |e^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)|\ \mathrm{d}z = \int_C |f(z)|\ \mathrm{d}z \le L(C) \max_{z\in C} |f(z)|\,.$$

$\diamond$

PRIMITIVNÍ FUNKCE

DEFINICE. Funkce F se nazývá primitivní k funkci f na otevřené množině G, jestliže pro každé $z \in G$ platí $F'(z) = f(z)$.

VĚTA. Nechť na oblasti U má funkce f derivaci f'. Pak platí

$$\int_\varphi f'(z)\ \mathrm{d}z = f(\beta) - f(\alpha)$$

pro libovolnou křivku φ jdoucí z bodu α do bodu β.

Důkaz.

$$\int_\varphi f'(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b f'(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(\varphi(t))\right)\ \mathrm{d}t = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))\,.$$

$\diamond$

To je komplexní verze základní věty analýzy.

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro funkci f mající spojité parciální derivace 1.řádu svých složek na jednoduše souvislé oblasti G:

1. f je holomorfní na G;

2. integrály z f po křivkách ležících v G nezávisí na cestě (tj. závisí jen na počátečním a koncovém bodě křivky);
3. každý integrál z f po jednoduché uzavřené křivce v G je nulový;
4. f má na G primitivní funkci F.

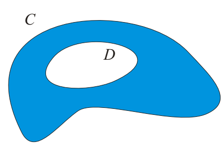
CAUCHYOVA VĚTA

VĚTA. (Cauchy) Nechť f je holomorfní na jednoduché uzavřené křivce C a na jejím vnitřku. Potom je $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

VĚTA. (Cauchy) Nechť C a $C_1, ..., C_n$ jsou jednoduché uzavřené kladně orientované křivky, přičemž $C_1, ..., C_n$ leží uvnitř C a vnitřky křivek $C_1, ..., C_n$ jsou navzájem disjunktní. Nechť f je holomorfní na jednoduché uzavřené křivce C a na jejím vnitřku kromě vnitřků křivek $C_1, ..., C_n$. Potom je

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

DŮSLEDEK. Jestliže jednoduchá uzavřená křivka C obsahuje ve svém vnitřku jednoduchou uzavřenou křivku D a obě jsou kladně orientované, pak $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_D f(z)\,\mathrm{d}z$ pro každou funkci f holomorfní na obou křivkách a mezi nimi.



Tohoto důsledku se používá pro nahrazení komplikované křivky C jednodušší křivkou D, např. kružnicí.

VĚTA. (Cauchyův vzorec) Nechť C je jednoduchá uzavřená křivka a f je holomorfní uvnitř a na C. Potom pro každý bod w ležící ve vnitřku C platí

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = f(w)\,.$$

Důkaz. Nechť w je bod z vnitřku C. Podle předchozí věty lze $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ nahradit integrálem $\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z$, kde C_r je kružnice o středu w a poloměru r, ležící ve vnitřku křivky C.
Integrál se rozepíše jako součet

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = f(w)\int_{C_r} \frac{1}{z-w}\,\mathrm{d}z + \int_{C_r} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z\,.$$

První integrál na pravé straně se rovná $2\pi\mathrm{i}$.
Druhý integrál je roven 0. Opravdu, pro libovolné $\varepsilon > 0$ se najde tak malé r, že $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ pro každé $z \in \mathbb{C}_r$; potom

$$\Big|\int_{C_r} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z\Big| \le \varepsilon \int_{C_r} \frac{\mathrm{d}z}{r} = 2\pi\varepsilon\,.$$

$\diamond$

Vzoreček

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z-w} \, \mathrm{d}z = f(w)$$

počítá hodnotu funkce ve vnitřním bodě integrací přes obvod množiny.

Pokud bude funkce na hranici nulová, tak je nulová všude.

DŮSLEDKY CAUCHYOVA VZORCE

LEMMA. Nechť $f(w,z)$ je komplexní funkce dvou komplexních proměnných, která je je spojitá ve druhé proměnné na jednoduché uzavřené křivce C, holomorfní v první proměnné v oblasti G a má v G spojité parciální derivace podle složek první proměnné. Potom funkce $F(w) = \int_C f(w,z) \, \mathrm{d}z$ je holomorfní v G a platí $F'(w) = \int_C \frac{\partial f}{\partial w}(w,z) \, \mathrm{d}z$.

Důsledky Cauchyova vzorce:

DŮSLEDEK.

1. Holomorfní funkce v oblasti G má v G derivace všech řádů, pro které platí vzorec

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \,,$$

   kde C je libovolná jednoduchá uzavřená křivka ležící i s vnitřkem v G a bod w leží ve vnitřku C.

2. Je-li f holomorfní v kruhu $|z-w| \le r$, pak

$$|f^{(n)}(w)| \le \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z); |z-w| = r\} \,.$$

3. (Liouville) Každá omezená celistvá funkce je konstantní.

4. Je-li nekonstantní funkce f holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C, pak pro každý bod w z vnitřku C je $|f(w)| < \max\{|f(z)|; z \in C\}$.

Důkaz. První tvrzení plyne indukcí z předchozího tvrzení o derivaci za integrálem.

Druhé tvrzení je důsledkem prvního a odhadu absolutní hodnoty integrálu.

Třetí tvrzení plyne z druhého pro volbu $n = 1$ a r jsoucí k ∞; vyjde $f' = 0$.

Poslední tvrzení se dokáže následujícím způsobem. Funkce $|f|$ dosahuje svého maxima m na křivce C nebo v jejím vnitřku.

Nechť nastane druhý případ, takže množina $A = \{z; z \in \iota C, |f(z)| = m\}$ je neprázdná.

Protože f je nekonstantní, existuje w z vnitřku C ležící na hranici A.

Vezme se kružnice K o poloměru r okolo w ležící uvnitř C a na ní bod $q \notin A$. Pak $|f(q)| < |f(w)| = m$ a $|f(z)| < m - \varepsilon$ pro nějaké kladné ε a z náležící nějakému oblouku $O \subset K$ délky d.

Podle Cauchyova vzorce platí

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_K \frac{f(z)}{z-w}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \Big(\int_O \frac{f(z)}{z-w}\ \mathrm{d}z + \int_{K \setminus O} \frac{f(z)}{z-w}\ \mathrm{d}z \Big) .$$

Pro absolutní hodnoty nyní platí

$$m \le \frac{1}{2\pi r}((m-\varepsilon)d + m(2\pi r - d)) = m - \frac{\varepsilon d}{2\pi r} < m ,$$

což je spor. $\diamond$

Důsledkem předchozího prvního tvrzení je jednak fakt, že holomorfní funkce má spojité parciální derivace svých složek (všech řádů), že harmonické funkce mají derivace všech řádů, a že funkce mající primitivní funkci je holomorfní.

Tato poslední vlastnost dává již dříve slibovanou Morerovu větu (bez předpokladu spojitosti parciálních derivací):

VĚTA. (Morera) Nechť $\int_c f(z)\ \mathrm{d}z = 0$ pro každou jednoduchou uzavřenou křivku ležící i s vnitřkem v otevřené množině G. Pak je f holomorfní.

Liouvillova věta má jako jednoduchý důsledek základní větu algebry:

VĚTA. Každý polynom P stupně aspoň 1 má nulový bod, tj. existuje z tak, že $P(z) = 0$.

Důkaz. Nechť $P(z) \neq 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. pak $1/P(z)$ je celistvá funkce. Podobně jako v reálném oboru se ukáže, že $|P(z)|$ má v ∞ limitu ∞, takže $1/P(z)$ je omezená funkce. Podle Liouvillovy věty je tato funkce konstantní a tedy P má stupeň 0. $\diamond$

POZNÁMKY

K tradičnímu výkladu Cauchyovy věty patří důkaz Cauchyovy věty pro trojúhelník:

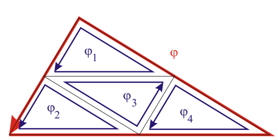
VĚTA. Nechť je funkce f holomorfní na otevřené množině U a křivka φ popisuje obvod trojúhelníka $T \subset U$. Pak

$$\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z = 0 .$$

Důkaz. Nechť

$$\left| \int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z \right| = K > 0 .$$

Odvodíme spor. Označme L obvod trojúhelníku T. Rozdělíme trojúhelník T středními příčkami na čtyři trojúhelníky. Alespoň přes obvod jednoho je analogický integrál roven alespoň $K/4$.



Integraci přes obvod trojúhelníku nahradíme integrací přes obvody menších trojúhelníků. Úseky, které jdeme sem i tam se ruší.

Tak postupujeme indukcí a sestavíme zmenšující se posloupnost trojúhelníků. Její průnik je jeden bod, označíme jej z_0.

V bodě z_0 použijeme existenci derivace a vyjádříme funkci f ve tvaru

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z) .$$

První dva sčítanci na pravé straně jsou funkce mající primitivní funkci, tedy se integrace z funkce $f(z)$ přes uzavřenou křivku redukuje na integraci funkce $(z - z_0)\varepsilon(z)$.

V n-tém kroku při integraci přes obvod φ_n trojúhelníku T_n vybraného v n-tém kroku odhadujeme

$$\frac{K}{4^n} \le \left| \int_{\varphi_n} f(z)\, dz \right| \le \left| \int_{\varphi_n} (z - z_0)\varepsilon(z)\, dz \right| \le \frac{L^2}{4^n} \sup_{z \in T_n} |\varepsilon(z)| \ .$$

Po násobení 4^n plyne díky derivaci v bodě z_0 z

$$K \le L^2 \sup_{z \in T_n} |\varepsilon(z)| \ \to \ 0 \ , \ n \to \infty$$

spor. $\diamond$

Existuje jeden pěkný trikový důkaz principu maxima modulu:

Důkaz. Použijeme integrální vyjádření holomorfní funkce f^n (zde se jedná o n-tou mocninu funkce f) a odhadneme

$$|f^n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f^n(w)}{w - z}\, dw \right| \ \le \ M^n \frac{R}{R - z} \ ,$$

tedy

$$|f(z)| \ \le \ M \sqrt[n]{\frac{R}{R - z}} \ \to M \ , \ n \to \infty \ ,$$

kde M je odhad $|f|$ na jednotkové kružnici. $\diamond$

Při výpočtu integrálu

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z}\, dz$$

pro křivku φ neprocházející počátkem můžeme křivku φ lokálně nahrazovat částmi jednotkové kružnice díky předchozí větě.

Celkem můžeme přetvořit křivku φ na cestu procházející pouze jednotkovou kružnicí. Takto integraci převedeme na známý integrál přes jednotkovou kružnici, který je roven $2\pi i$.

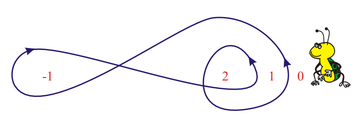
Tedy vidíme, že výsledek bude roven n-krát $2\pi i$, kde n udává počet „oběhů“ křivky φ okolo počátku (proti směru hodinových ručiček).

Obecně počítáme tento počet oběhů křivky (cesty, cyklu) φ okolo daného bodu z_0 jako integrál

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{z - z_0}\, dz$$

a tomuto číslu říkáme index bodu z_0 ke křivce φ, značíme $\operatorname{ind}(z_0, \varphi)$.

Index je spojitá, celočíselná a užitečná funkce. Index vzroste o jedničku, pokud přeskočíme přes křivku „zprava doleva“.



Vlastnost o nabývání maxima absolutní hodnoty holomorfní funkce f na hranici je možné použít i na nabývání minima – stačí vzít $1/f$.

Je-li nekonstantní funkce f holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C a nenabývá tam nikde hodnoty 0, pak pro každý bod w z vnitřku C je $|f(w)| > \min\{|f(z)|; z \in C\}$.

PŘÍKLADY

Příklad. Spočtěte $\int_C (z - w)^n \, \mathrm{d}z$ pro $n \in \mathbb{Z}$, kde C je kružnice se středem v bodě w.

Řešení. Popis kružnice je $w + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi]$, výsledek je 0 pro $n \neq -1, 2\pi\mathrm{i}$ pro $n = -1$.

Příklad. Spočtěte pomocí obecné Cauchyovy věty integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+16)}\,,$$

kde C se skládá ze dvou kružnic: $|z| = 1$ orientované kladně a $|z| = 3$ orientované záporně.

Příklad. Pomocí Cauchyovy věty spočtěte $\int_C (z^2-1)^{-1}\,\mathrm{d}z$ přes kružnici C o středu 0 a poloměru 2.

Řešení. Zlomek $(z^2-1)^{-1}$ se rozloží:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\Big)$$

a podle obecné Cauchyovy věty nyní stačí spočítat integrály zlomků $1/(z-1)$ a $1/(z+1)$ přes kružnice $|z-1| = 1$ a

$$|z+1| = 1$$

(vyjde $2\pi\mathrm{i}$) a odečíst je.

Příklad. Pomocí derivace Cauchyova vzorce vypočtěte integrály (C jsou jednoduché uzavřené křivky obsahující 0 ve svém vnitřku):

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\,\mathrm{d}z\,, \quad \int_C \frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}z\,, \quad \int_C \frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Příklad. Funkce $1/z$ je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ukažte, že nemá na svém definičním oboru primitivní funkci.

Příklad. Ukažte, že dvě primitivní funkce k f na oblasti G se liší o konstantu.

Příklad. Spočítejte křivkový integrál

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je kladně orientovaný obvod jednotkového kruhu

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Řešení. Budeme integrovat po křivce $\varphi(t) = e^{it}$ pro $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = 2\pi i\,.$$

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_\psi ze^z\,\mathrm{d}z,$$

podél křivky $\psi(t) = t + it^3,\ 0 \leq t \leq 1$, orientované ve směru vzrůstu parametru t.

Řešení. Můžeme sice postupovat jako dříve, tj. dosazením parametrizace do integrandu, ale jednodušší bude použít větu o integraci primitivní funkce.

Funkce ze^z je holomorfní na $\mathbb{C}$, takže k ní existuje primitivní funkce F. Tu navíc snadno spočítáme per-partes.

Tedy

$$F(z) = (z-1)e^z,$$

a hledaný integrál je roven

$$\begin{aligned}\int_\psi ze^z\,\mathrm{d}z &= F(\psi(1)) - F(\psi(0)) = F(1+i) - F(0)\\ &= -1 + ie^{i+1} = -e\sin 1 - 1 + ie\cos 1.\end{aligned}$$

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}z,$$

kde $C = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 3\}$.

Řešení. Označme $f(z) = e^{2z}$, pak podle Cauchyova integrálního vzorce máme

$$f^n(-1) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Pro $n = 3$ je

$$f'''(z) = 8e^{2z}, \qquad f'''(-1) = 8e^{-2}$$

a podle uvedeného vzorce dostaneme vztah

$$8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i}\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}z.$$

Odtud již snadno zjistíme, že zadaný integrál má hodnotu

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}z = i\frac{8}{3}\pi e^{-2}.$$

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \left(2xy - x^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(x + y^2\right)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je uzavřená pozitivně orientovaná křivka ohraničující oblast vymezenou funkcemi

$$y = x^2, \qquad x = y^2.$$

Řešení. Zabývejme se nejdříve prvním případem, tj. $y = x^2$. Integrál parametrizujeme:

$$\int_0^1 \left((2x)(x^2) - x^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(x + (x^2)^2\right)\,\mathrm{d}(x^2) = \int_0^1 \left(2x^3 + x^2 + 2x^5\right)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{6}.$$

Podobně tomu bude pro $x = y^2$:

$$\int_1^0 \left(2(y^2)(y) - (y^2)^2\right)\,\mathrm{d}(y^2) + \left(y^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}y = \int_1^0 \left(4y^4 - 2y^5 + 2y^2\right)\,\mathrm{d}y = -\frac{17}{15}.$$

Celkový výsledek tedy bude

$$\int_C \left(2xy - x^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(x + y^2\right)\,\mathrm{d}y = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}.$$