ŘADY KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ

ŘADY KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ

V kapitole si ukážeme, že holomorfní funkce a mocninné řady skoro jedno jsou.

ŘADY KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ

V kapitole si ukážeme, že holomorfní funkce a mocninné řady skoro jedno jsou.

Někomu . . .

OBECNÉ VLASTNOSTI

OBECNÉ VLASTNOSTI

Řady komplexních čísel $\sum z_n$ byly částečně probírány v kapitole o číselných řadách.

OBECNÉ VLASTNOSTI

Řady komplexních čísel $\sum z_n$ byly částečně probírány v kapitole o číselných řadách.

Definice říká, že $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$, jestliže z je limita částečných součtů řady $\sum z_n$, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro $m > k$ je $|z - \sum_{n=0}^{m} z_n| < \varepsilon$.

OBECNÉ VLASTNOSTI

Řady komplexních čísel $\sum z_n$ byly částečně probírány v kapitole o číselných řadách.

Definice říká, že $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$, jestliže z je limita částečných součtů řady $\sum z_n$, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro $m > k$ je $|z - \sum_{n=0}^{m} z_n| < \varepsilon$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ (to je řada reálných čísel a lze na ní použít kritéria konvergence řad reálných čísel).

1. $\sum z_n = z$ právě když $\sum \Re(z_n) = \Re(z)$ a $\sum \Im(z_n) = \Im(z)$.
2. Pokud $\sum z_n$ konverguje, pak $z_n \to 0$ a tedy $\{z_n\}$ je omezená posloupnost.
3. $\sum z_n$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že $|\sum_{n=m}^{m+p} z_n| < \varepsilon$ pro každé $m > k$ a $p \in \mathbb{N}$.
4. $\sum(az_n + bw_n) = a \sum z_n + b \sum w_n$.
5. Absolutně konvergentní řada je konvergentní.

V kapitole o řadách funkcí byly zmíněny i obecnější funkce než jen reálné funkce jedné reálné proměnné.

V kapitole o řadách funkcí byly zmíněny i obecnější funkce než jen reálné funkce jedné reálné proměnné.

Nicméně, u některých vlastností používajících derivaci nebo integrál bylo nutné se omezit jen na reálné funkce. Základní definice však zůstávají stejné.

V kapitole o řadách funkcí byly zmíněny i obecnější funkce než jen reálné funkce jedné reálné proměnné.

⬇

Nicméně, u některých vlastností používajících derivaci nebo integrál bylo nutné se omezit jen na reálné funkce. Základní definice však zůstávají stejné.

⬇

DEFINICE. Řada $\sum f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f, jestliže konverguje bodově, tj. pro každé $z \in A$ je $\sum f_n(z) = f(z)$.

V kapitole o řadách funkcí byly zmíněny i obecnější funkce než jen reálné funkce jedné reálné proměnné.

Nicméně, u některých vlastností používajících derivaci nebo integrál bylo nutné se omezit jen na reálné funkce. Základní definice však zůstávají stejné.

DEFINICE. Řada $\sum f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f, jestliže konverguje bodově, tj. pro každé $z \in A$ je $\sum f_n(z) = f(z)$.

V kapitole o řadách funkcí byly zmíněny i obecnější funkce než jen reálné funkce jedné reálné proměnné.

Nicméně, u některých vlastností používajících derivaci nebo integrál bylo nutné se omezit jen na reálné funkce. Základní definice však zůstávají stejné.

DEFINICE. Řada $\sum f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f, jestliže konverguje bodově, tj. pro každé $z \in A$ je $\sum f_n(z) = f(z)$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f stejnoměrně, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro každé $m > k$ a každé $z \in A$ je $|f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| < \varepsilon$ (tj. $\lim_m \sup_{z\in A} |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| = 0$).

Následující tvrzení je stejné (i s důkazem) jako odpovídající tvrzení pro reálné funkce.

Následující tvrzení je stejné (i s důkazem) jako odpovídající tvrzení pro reálné funkce.

VĚTA. Nechť řada $\sum f_n$ konverguje k f stejnoměrně na A. Jsou-li všechny funkce f_n (stejnoměrně) spojité, je i f (stejnoměrně) spojitá.

Tvrzení o integraci a derivaci řad komplexních funkcí je však nutné ověřit. Přitom využijeme předchozí vztahy mezi integrací a derivací.

Tvrzení o integraci a derivaci řad komplexních funkcí je však nutné ověřit. Přitom využijeme předchozí vztahy mezi integrací a derivací.

VĚTA. Nechť f_n jsou spojité funkce na křivce C a řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na křivce C. Potom je

$$\sum \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \sum f_n(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Tvrzení o integraci a derivaci řad komplexních funkcí je však nutné ověřit. Přitom využijeme předchozí vztahy mezi integrací a derivací.

VĚTA. Nechť f_n jsou spojité funkce na křivce C a řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na křivce C. Potom je

$$\sum \int_C f_n(z)\, \mathrm{d}z = \int_C \sum f_n(z)\, \mathrm{d}z\,.$$

Důkaz. Označme $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ a L délku křivky C. Platí

$$\left| \int_C f(z)\, \mathrm{d}z - \int_C \sum_{n=0}^{m} f_n(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq L \max_{z\in C} |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)|$$

a uvedené maximum konverguje k 0 vzhledem ke stejnoměrné konvergenci. $\diamond$

Tvrzení o záměně derivace a součtu řady už tak jednoduché nebylo a bylo třeba přidat nějakou podmínku.

Tvrzení o záměně derivace a součtu řady už tak jednoduché nebylo a bylo třeba přidat nějakou podmínku.

Pro komplexní funkce stačí existence derivace v okolí bodu, tj. holomorfnost:

Tvrzení o záměně derivace a součtu řady už tak jednoduché nebylo a bylo třeba přidat nějakou podmínku.

Pro komplexní funkce stačí existence derivace v okolí bodu, tj. holomorfnost:

VĚTA. Nechť řada holomorfních funkcí f_n konverguje stejnoměrně k funkci f na oblasti G. Pak f je holomorfní a $f'(z) = \sum f'_n(z)$.

Důkaz. Nechť $w \in G$, W je otevřený kruh okolo w ležící v G a C je jednoduchá uzavřená křivka ve W.

Důkaz. Nechť $w \in G$, W je otevřený kruh okolo w ležící v G a C je jednoduchá uzavřená křivka ve W.

Podle předchozí věty je

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = \sum \oint_C f_n(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

protože f_n jsou holomorfní ve W. Podle Morerovy věty je tedy i f holomorfní ve W.

Důkaz. Nechť $w \in G$, W je otevřený kruh okolo w ležící v G a C je jednoduchá uzavřená křivka ve W.

Podle předchozí věty je

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum \oint_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

protože f_n jsou holomorfní ve W. Podle Morerovy věty je tedy i f holomorfní ve W.

Nyní lze použít Cauchyův vzorec pro kružnici se středem z_0 ležící ve W a dostane se

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \sum \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \sum \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z = \sum f_n'(z_0)\,.$$

Důkaz. Nechť $w \in G$, W je otevřený kruh okolo w ležící v G a C je jednoduchá uzavřená křivka ve W.

Podle předchozí věty je

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum \oint_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

protože f_n jsou holomorfní ve W. Podle Morerovy věty je tedy i f holomorfní ve W.

Nyní lze použít Cauchyův vzorec pro kružnici se středem z_0 ležící ve W a dostane se

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \sum \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \sum \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z = \sum f_n'(z_0)\,.$$

Použil se fakt, že spolu se $\sum f_n(z)$ je stejnoměrně konvergentní i řada $\sum \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}$, protože

$$\Big|\sum_{n=m}^{k} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\Big| = \frac{1}{r^2}\Big|\sum_{n=m}^{k} f_n(z)\Big|\,,$$

kde r je poloměr kružnice C. ◇

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je to dobře rozdaný. Já ty komplexní řady miluju.

MOCNINNÉ ŘADY

Mocninná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $z_0 \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}$ a z je komplexní proměnná. Bod z_0 je střed konvergence řady a v tomto bodě řada vždy konverguje. Připomeňte si důležité tvrzení o konvergenci mocninných řad.

Mocninná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $z_0 \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}$ a z je komplexní proměnná. Bod z_0 je střed konvergence řady a v tomto bodě řada vždy konverguje. Připomeňte si důležité tvrzení o konvergenci mocninných řad.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Pak uvedená řada konverguje absolutně pro $|z-z_0| < \rho$, diverguje pro $|z-z_0| > \rho$. Pro libovolné kladné $r < \rho$ konverguje stejnoměrně pro $|z-z_0| \le r$.

Číslo ρ se nazývá poloměr konvergence a $\{z; |z-z_0| < \rho\}$ kruh konvergence dané řady.

Z předchozích tvrzení a podobných úvah z dřívější kapitoly o mocninných řadách nyní vyplývají následující vlastnosti:

Z předchozích tvrzení a podobných úvah z dřívější kapitoly o mocninných řadách nyní vyplývají následující vlastnosti:

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.

Z předchozích tvrzení a podobných úvah z dřívější kapitoly o mocninných řadách nyní vyplývají následující vlastnosti:

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z-z_0|<\rho$, pak $f'(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.

Z předchozích tvrzení a podobných úvah z dřívější kapitoly o mocninných řadách nyní vyplývají následující vlastnosti:

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z-z_0|<\rho$, pak $f'(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
3. Je-li $|z-z_0|<\rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k $f(z)$ v kruhu konvergence a poloměr konvergence této řady je opět ρ.

Z předchozích tvrzení a podobných úvah z dřívější kapitoly o mocninných řadách nyní vyplývají následující vlastnosti:

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z-z_0|<\rho$, pak $f'(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
3. Je-li $|z-z_0|<\rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k $f(z)$ v kruhu konvergence a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
4. Je-li $|z-z_0|<\rho$ a C křivka ležící v kruhu konvergence s počátečním bodem A a koncovým bodem B, pak

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left((B-z_0)^{n+1}-(A-z_0)^{n+1}\right).$$

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z předchozích tvrzení a podobných úvah z dřívější kapitoly o mocninných řadách nyní vyplývají následující vlastnosti:

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z - z_0| < \rho$, pak $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
3. Je-li $|z - z_0| < \rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k $f(z)$ v kruhu konvergence a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
4. Je-li $|z - z_0| < \rho$ a C křivka ležící v kruhu konvergence s počátečním bodem A a koncovým bodem B, pak

$$\int_C f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left((B - z_0)^{n+1} - (A - z_0)^{n+1} \right) .$$

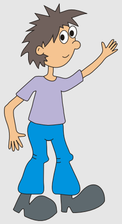
5. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ je Taylorovou řadou funkce $f(z)$ na kruhu konvergence, tj.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} .$$

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Součet mocninné řady je tedy holomorfní funkce v kruhu konvergence. Platí i opak, že holomorfní funkce lze napsat jako součet holomorfní funkce?

Součet mocninné řady je tedy holomorfní funkce v kruhu konvergence. Platí i opak, že holomorfní funkce lze napsat jako součet holomorfní funkce?



Na to jsem si předem vsadil, vyvracet to nebudu.

VĚTA. Funkce f je holomorfní v bodě z_0 právě když je v nějakém otevřeném kruhu okolo z_0 součtem své Taylorovy řady.

VĚTA. Funkce f je holomorfní v bodě z_0 právě když je v nějakém otevřeném kruhu okolo z_0 součtem své Taylorovy řady.

A mám to v kapse!!!

Důkaz. Nechť f je holomorfní v kruhu $K = \{z; |z - z_0| < r\}$ a w je libovolný bod K. Má se dokázat, že

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w - z_0)^n \,.$$

Důkaz. Nechť f je holomorfní v kruhu $K = \{z; |z - z_0| < r\}$ a w je libovolný bod K. Má se dokázat, že

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w - z_0)^n .$$

Nechť C je kružnice se středem z_0 ležící v K obsahující uvnitř w, takže $f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)/(z - w)^{-1} \, \mathrm{d}z$. Zlomek $1/(z - w)$ je součtem geometrické řady

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{(z - z_0)\left(1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}\right)} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0}\right)^n ,$$

přičemž poslední řada konverguje stejnoměrně na C (má za majorantu geometrickou řadu s kvocientem menším než 1).

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Nechť f je holomorfní v kruhu $K = \{z; |z - z_0| < r\}$ a w je libovolný bod K. Má se dokázat, že

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w - z_0)^n .$$

Nechť C je kružnice se středem z_0 ležící v K obsahující uvnitř w, takže $f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)/(z-w)^{-1}\, \mathrm{d}z$. Zlomek $1/(z-w)$ je součtem geometrické řady

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-z_0)\left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n ,$$

přičemž poslední řada konverguje stejnoměrně na C (má za majorantu geometrickou řadu s kvocientem menším než 1).

Dosazením do Cauchyova vzorce pro $f(w)$ se dostane

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} (w-z_0)^n \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w-z_0)^n ,$$

což se mělo dokázat ◇

Bez Cauchyova vzorce nevím nevím ...

Pro každý bod z_0, ve kterém je funkce f holomorfní, tedy existuje největší možný otevřený kruh o středu z_0, ve kterém je f součtem mocninné řady.

Pro každý bod z_0, ve kterém je funkce f holomorfní, tedy existuje největší možný otevřený kruh o středu z_0, ve kterém je f součtem mocninné řady.

$\Downarrow$

Poloměr tohoto kruhu je vzdálenost mezi z_0 a nejbližším bodem, v kterém f není holomorfní (a tedy je to ∞ pokud je f celistvá).

$\Downarrow$

Pro každý bod z_0, ve kterém je funkce f holomorfní, tedy existuje největší možný otevřený kruh o středu z_0, ve kterém je f součtem mocninné řady.

⬇

Poloměr tohoto kruhu je vzdálenost mezi z_0 a nejbližším bodem, v kterém f není holomorfní (a tedy je to ∞ pokud je f celistvá).

⬇

Tímto bodem může být i bod, kde f není definována – pak získaná řada může konvergovat na větším kruhu a tedy původní funkci rozšiřuje na větší definiční obor jako holomorfní funkci.

⬇

Pro každý bod z_0, ve kterém je funkce f holomorfní, tedy existuje největší možný otevřený kruh o středu z_0, ve kterém je f součtem mocninné řady.

⬇

Poloměr tohoto kruhu je vzdálenost mezi z_0 a nejbližším bodem, v kterém f není holomorfní (a tedy je to ∞ pokud je f celistvá).

⬇

Tímto bodem může být i bod, kde f není definována – pak získaná řada může konvergovat na větším kruhu a tedy původní funkci rozšiřuje na větší definiční obor jako holomorfní funkci.

⬇

Otázka je, zda takovéto rozšíření je jediné, nebo jich může existovat více. Tuto otázku řeší věta o jednoznačnosti v poslední části této kapitoly.

Pomocí řad a jejich kruhů konvergence se dají modelovat úžasné plochy.

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí řad a jejich kruhů konvergence se dají modelovat úžasné plochy.

Kdo si chce hrát, tak si zkusí funkci arkus-tangens rozvíjet v řadu na různých kruzích konvergence. Bude příjemně překvapen.

Poznámky 2 Příklady 2 Cvičení 2

LAURENTOVY ŘADY

LAURENTOVY ŘADY

Velice často se vyskytují případy, kdy funkce je holomorfní v nějakém kruhu kromě jeho středu.

LAURENTOVY ŘADY

⬇

Velice často se vyskytují případy, kdy funkce je holomorfní v nějakém kruhu kromě jeho středu.

⬇

Pak tuto funkci nelze v tomto kruhu psát jako součet mocninné řady.

⬇

LAURENTOVY ŘADY

Velice často se vyskytují případy, kdy funkce je holomorfní v nějakém kruhu kromě jeho středu.

Pak tuto funkci nelze v tomto kruhu psát jako součet mocninné řady.

Např. funkce $e^{1/z}$ je holomorfní všude kromě bodu 0. Je možné se na tuto funkci dívat jako na funkci holomorfní v kruhu o středu ∞.

LAURENTOVY ŘADY

Velice často se vyskytují případy, kdy funkce je holomorfní v nějakém kruhu kromě jeho středu.

Pak tuto funkci nelze v tomto kruhu psát jako součet mocninné řady.

Např. funkce $e^{1/z}$ je holomorfní všude kromě bodu 0. Je možné se na tuto funkci dívat jako na funkci holomorfní v kruhu o středu ∞.

To byl sqělý nápad. Kdybych na něj přišel já, mohly se ty řady jmenovat po mně. Smůla.

Nelze psát $\sum a_n(z-\infty)^n$, ale právě uvedená funkce dává návod na použití řady $\sum a_n \frac{1}{z^n}$, resp. $\sum a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ pro funkci $e^{1/(z-z_0)}$.

Nelze psát $\sum a_n(z-\infty)^n$, ale právě uvedená funkce dává návod na použití řady $\sum a_n \frac{1}{z^n}$, resp. $\sum a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ pro funkci $e^{1/(z-z_0)}$.

Podívejme se tedy na tyto „obrácené mocninné řady".

Nelze psát $\sum a_n(z-\infty)^n$, ale právě uvedená funkce dává návod na použití řady $\sum a_n \frac{1}{z^n}$, resp. $\sum a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ pro funkci $e^{1/(z-z_0)}$.

Podívejme se tedy na tyto „obrácené mocninné řady".

Je to jako když se jí koláč odprostředka. To se nemá, ale je to legrace.

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ existuje číslo $\rho \in [0, +\infty]$ takové, že tato řada konverguje absolutně na množině $K = \{z; |z - z_0| > \rho\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině K.

VĚTA. Pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ existuje číslo $\rho \in [0, +\infty]$ takové, že tato řada konverguje absolutně na množině $K = \{z; |z - z_0| > \rho\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině K.

Platí $\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

VĚTA. Pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ existuje číslo $\rho \in [0, +\infty]$ takové, že tato řada konverguje absolutně na množině $K = \{z; |z - z_0| > \rho\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině K.

Platí $\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Důkaz. Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ má poloměr konvergence $r \in [0, +\infty]$. Tato řada vznikla z řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ substitucí $w = \frac{1}{z-z_0}$. Z tohoto převodu snadno vyplývají tvrzení věty pro $\rho = 1/r$. $\diamond$

Z předchozích obecných vět o stejnoměrné konvergenci holomorfních funkcí vyplývají následující tvrzení:

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z předchozích obecných vět o stejnoměrné konvergenci holomorfních funkcí vyplývají následující tvrzení:

VĚTA. Součet řady $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ je holomorfní funkce a její derivace a primitivní funkce se získá derivováním a integrováním řady člen po členu.

Nyní se tyto řady a mocninné řady použijí dohromady.

Nyní se tyto řady a mocninné řady použijí dohromady.

DEFINICE. Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se definuje rovností

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}\,.$$

Nyní se tyto řady a mocninné řady použijí dohromady.

DEFINICE. Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se definuje rovností

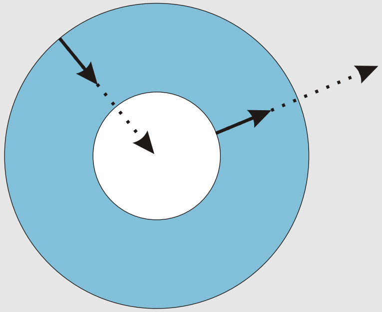
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}\,.$$

První část $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ Laurentovy řady se nazývá regulární část, druhá se nazývá hlavní část.

Uvědomte si, že definice určuje, co znamená konvergence Laurentovy řady: je to konvergence obou jejích částí.

Uvědomte si, že definice určuje, co znamená konvergence Laurentovy řady: je to konvergence obou jejích částí.

Jedna část takové řady konverguje uvnitř nějakého kruhu, jiná část vně jiného kruhu. Když se protnou, vznikne mezikruží konvergence.



Kombinací předchozích vět o konvergenci regulární a hlavní části Laurentrovy řady se dostává následující tvrzení.

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Kombinací předchozích vět o konvergenci regulární a hlavní části Laurentrovy řady se dostává následující tvrzení.

VĚTA. Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existují čísla $0 \leq r \leq R \leq +\infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z-z_0| < R\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině M.

Kombinací předchozích vět o konvergenci regulární a hlavní části Laurentrovy řady se dostává následující tvrzení.

VĚTA. Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existují čísla $0 \le r \le R \le +\infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z-z_0| < R\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině M.

Součtem této řady je holomorfní funkce v mezikruží M, její derivace a primitivní funkce se získají derivováním a integrováním řady člen po členu.

Podobně jako u funkcí holomorfních v kruhu je otázka, zda funkce holomorfní v mezikruží lze představit jakou součet Laurentovy řady. Odpověď je kladná:

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako u funkcí holomorfních v kruhu je otázka, zda funkce holomorfní v mezikruží lze představit jakou součet Laurentovy řady. Odpověď je kladná:

VĚTA. Nechť $0 \leq r < R \leq \infty$ a funkce f je holomorfní v mezikruží M o středu z_0 a poloměrech r, R. Potom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pro nějaká $a_n \in \mathbb{C}$ a všechna $z \in M$.

Důkaz. Kvůli jednoduššímu vyjádření stačí předpokládat $z_0 = 0$.

Důkaz. Kvůli jednoduššímu vyjádření stačí předpokládat $z_0 = 0$.

Zvolte $w \in M$ a kružnice (kladně orientované) C, D o středu 0 ležící v M, z nichž C obsahuje w uvnitř a D vně. Podle obecné Cauchyovy věty je

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - w}\, \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_D \frac{f(z)}{z - w}\, \mathrm{d}z\,.$$

Důkaz. Kvůli jednoduššímu vyjádření stačí předpokládat $z_0 = 0$.

Zvolte $w \in M$ a kružnice (kladně orientované) C, D o středu 0 ležící v M, z nichž C obsahuje w uvnitř a D vně. Podle obecné Cauchyovy věty je

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-w}\, \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_D \frac{f(z)}{z-w}\, \mathrm{d}z\,.$$

V prvním integrálu je $|z| > |w|$ a tedy $\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^n$. Ve druhém integrálu je $|z| < |w|$ a tedy $\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n$. Tyto řady po vynásobení $f(z)$ je možné integrovat člen po členu, takže

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} w^n \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1} \oint_D z^n f(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

což je hledaný tvar. $\diamond$

V důkazu jsme získali vzorec pro výpočet koeficientů a_n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde C je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

V důkazu jsme získali vzorec pro výpočet koeficientů a_n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \, ,$$

kde C je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

Vždy si prstem ukazujte, která část řady je která. Jinak to popletete. Ty koeficienty to jenom potvrzují.

Odtud vyplývají odhady pro koeficienty a_n. Za křivku C se vezme kružnice se středem v z_0 a poloměrem ρ:

$$|a_n| \leq \frac{\max\{|f(z)|; |z - z_0| = \rho\}}{\rho^n}\,.$$

Odtud vyplývají odhady pro koeficienty a_n. Za křivku C se vezme kružnice se středem v z_0 a poloměrem ρ:

$$|a_n| \leq \frac{\max\{|f(z)|; |z - z_0| = \rho\}}{\rho^n} \, .$$

Zatím necítím nic nebezpečného.

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Odtud vyplývají odhady pro koeficienty a_n. Za křivku C se vezme kružnice se středem v z_0 a poloměrem ρ:

$$|a_n| \leq \frac{\max\{|f(z)|; |z - z_0| = \rho\}}{\rho^n}\,.$$

Zatím necítím nic nebezpečného.

BTW, Laurentovy řady se čtou loránovy řady.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 Cvičení 3

RŮZNÁ POUŽITÍ

RŮZNÁ POUŽITÍ

Zajímavým a důležitým důsledkem předchozího tvrzení je následující věta o jednoznačnosti.

RŮZNÁ POUŽITÍ

Zajímavým a důležitým důsledkem předchozího tvrzení je následující věta o jednoznačnosti.

Ta je značně silnější než tvrzení vyplývající z Cauchyova vzorce, odkud vyplývalo, že dvě funkce holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C se rovnají uvnitř C, jakmile se rovnají na C.

RŮZNÁ POUŽITÍ

Zajímavým a důležitým důsledkem předchozího tvrzení je následující věta o jednoznačnosti.

Ta je značně silnější než tvrzení vyplývající z Cauchyova vzorce, odkud vyplývalo, že dvě funkce holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C se rovnají uvnitř C, jakmile se rovnají na C.

Věty o jednoznačnosti jsou v teorii holomorfních funkcí klíčovým výsledkem.

VĚTA. (Věta o jednoznačnosti) Nechť funkce f a g jsou holomorfní v oblasti G a $\{w_n\}$ je posloupnost v G konvergující k $w \in G$. Jestliže $f(w_n) = g(w_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in G$.

VĚTA. (Věta o jednoznačnosti) Nechť funkce f a g jsou holomorfní v oblasti G a $\{w_n\}$ je posloupnost v G konvergující k $w \in G$. Jestliže $f(w_n) = g(w_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in G$.

Věta o jednoznačnosti má zajímavé důsledky pro přenášení vzorců z reálné analýzy do komplexní analýzy – viz *Otázky*.

VĚTA. (Věta o jednoznačnosti) Nechť funkce f a g jsou holomorfní v oblasti G a $\{w_n\}$ je posloupnost v G konvergující k $w \in G$. Jestliže $f(w_n) = g(w_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in G$.

Věta o jednoznačnosti má zajímavé důsledky pro přenášení vzorců z reálné analýzy do komplexní analýzy – viz *Otázky*.

Například sinus z reálné osy nešel rozšířit jinak než tak, jak jsme to udělali.

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

⬇

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

⬇

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

⬇

Zbývá dokázat, že pro libovolný bod $c \in G$ je $f(c) = 0$. Spojme c s w lomenou čarou L ležící v G.

⬇

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

⬇

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

⬇

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

⬇

Zbývá dokázat, že pro libovolný bod $c \in G$ je $f(c) = 0$. Spojme c s w lomenou čarou L ležící v G.

⬇

Pokud $c \in K_w$, není co dokazovat. Jinak se vezme průsečík c_1 hranice kruhu K_w s L takový, že část L od w do c_1 leží v K_w.

⬇

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

⬇

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

⬇

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

⬇

Zbývá dokázat, že pro libovolný bod $c \in G$ je $f(c) = 0$. Spojme c s w lomenou čarou L ležící v G.

⬇

Pokud $c \in K_w$, není co dokazovat. Jinak se vezme průsečík c_1 hranice kruhu K_w s L takový, že část L od w do c_1 leží v K_w.

⬇

Bod c_1 je hromadným bodem nulových bodů funkce f a tedy okolo něho existuje kruh K_1, na kterém je $f = 0$.

⬇

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

⬇

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

⬇

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

⬇

Zbývá dokázat, že pro libovolný bod $c \in G$ je $f(c) = 0$. Spojme c s w lomenou čarou L ležící v G.

⬇

Pokud $c \in K_w$, není co dokazovat. Jinak se vezme průsečík c_1 hranice kruhu K_w s L takový, že část L od w do c_1 leží v K_w.

⬇

Bod c_1 je hromadným bodem nulových bodů funkce f a tedy okolo něho existuje kruh K_1, na kterém je $f = 0$.

⬇

Pokud $c \notin K_1$, vezme se průsečík c_2 hranice K_1 s L ležící blíže k c tak, že část L od c_1 do c_2 leží v K_1. Tímto způsobem se po konečně mnoha krocích dostaneme do situace, kdy $c \in K_n$ pro nějaké n. $\diamond$

Jednou z aplikací rozvoje v řady je obdoba L'Hospitalova pravidla o výpočtu limit pomocí derivací.

Jednou z aplikací rozvoje v řady je obdoba L'Hospitalova pravidla o výpočtu limit pomocí derivací.

VĚTA. (L'Hospitalovo pravidlo) Nechť f a g jsou holomorfní funkce v bodě w a nechť $f(w) = g(w) = 0$. Potom

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to w} \frac{f'(z)}{g'(z)}\,.$$

Důkaz. Podle předpokladu je $f(z) = (z-w)^k(a_k + a_2(z-w) + \ldots)$ a $g(z) = (z-w)^l(b_1 + b_2(z-w) + \ldots)$, kde $k, l \geq 1$, a tedy

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-w)^{k-l}\frac{a_k + a_{k+1}(z-w) + \ldots}{b_l + b_{l+1}(z-w) + \ldots}, \quad \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z-w)^{k-l}\frac{ka_k + (k+1)a_{k+1}(z-w) + \ldots}{lb_l + (l+1)b_{l+1}(z-w) + \ldots}.$$

Srovnáním obou posledních rovností snadno plyne tvrzení věty. ◇

Důkaz. Podle předpokladu je $f(z) = (z-w)^k(a_k + a_2(z-w) + \ldots)$ a $g(z) = (z-w)^l(b_1 + b_2(z-w) + \ldots)$, kde $k, l \geq 1$, a tedy

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-w)^{k-l}\frac{a_k + a_{k+1}(z-w) + \ldots}{b_l + b_{l+1}(z-w) + \ldots}, \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z-w)^{k-l}\frac{ka_k + (k+1)a_{k+1}(z-w) + \ldots}{lb_l + (l+1)b_{l+1}(z-w) + \ldots}.$$

Srovnáním obou posledních rovností snadno plyne tvrzení věty. ◇

Z důkazu vyplývá více, než je formulováno ve větě. Pokud je $k > l$, je uvedená limita podílu rovna 0. Pokud je $k < l$, je limita rovna ∞. Pokud je $k = l$, je limita rovna a_k/b_k.

Následující tvrzení je podobné tvrzení o regulárních zobrazeních uvedenému v části o substituci v integrálu více proměnných. Podobnost není náhodná, nekonstantní holomorfní funkce je regulárním zobrazením.

Následující tvrzení je podobné tvrzení o regulárních zobrazeních uvedenému v části o substituci v integrálu více proměnných. Podobnost není náhodná, nekonstantní holomorfní funkce je regulárním zobrazením.

VĚTA. Každá holomorfní nekonstantní funkce f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina roviny, jakmile je G otevřená podmnožina definičního oboru f.

Důkaz. Má se dokázat toto tvrzení: pro každé $w_0 \in f(G)$ existuje $s > 0$ tak, že $w \in f(G)$ jakmile $|w - w_0| < s$.

Důkaz. Má se dokázat toto tvrzení: pro každé $w_0 \in f(G)$ existuje $s > 0$ tak, že $w \in f(G)$ jakmile $|w - w_0| < s$.

Vezme se $z_0 \in G$ a $r > 0$ tak, že $f(z_0) = w_0$ a $z \in G$ jakmile $0 < |z - z_0| \leq r$ a navíc pro tato z platí $f(z) \neq w_0$ (lze předpokládat, protože f není konstantní). Nechť $m = \min\{|f(z) - w_0|; |z - z_0| = r\}$. Podle předchozího předpokladu je $m > 0$.

Důkaz. Má se dokázat toto tvrzení: pro každé $w_0 \in f(G)$ existuje $s > 0$ tak, že $w \in f(G)$ jakmile $|w - w_0| < s$.

Vezme se $z_0 \in G$ a $r > 0$ tak, že $f(z_0) = w_0$ a $z \in G$ jakmile $0 < |z - z_0| \leq r$ a navíc pro tato z platí $f(z) \neq w_0$ (lze předpokládat, protože f není konstantní). Nechť $m = \min\{|f(z) - w_0|; |z - z_0| = r\}$. Podle předchozího předpokladu je $m > 0$.

Předpokládejte, že existuje w takové, že $|w - w_0| < m/2$ a $w \notin f(G)$. Potom funkce $f(z) - w$ je nenulová a holomorfní na G. Podle věty o nabývání minima absolutní hodnoty na hranici je

$$\frac{m}{2} > |w - w_0| = |w - f(z_0)| \geq \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w| \geq$$

$$\geq \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2},$$

což dává spor. $\diamond$

S regulárními zobrazeními mají souvislost i následující věty. Nejdříve je nutné uvést pomocné tvrzení, které je zajímavé samo o sobě. Připomeňte si, že násobnost (neboli řád) nulového bodu w funkce f je nejmenší přirozené číslo k takové, že $f^{(k)}(w) \neq 0$ (tj. první index koeficientu a_k v Taylorově rozvoji f okolo w, který je nenulový).

S regulárními zobrazeními mají souvislost i následující věty. Nejdříve je nutné uvést pomocné tvrzení, které je zajímavé samo o sobě. Připomeňte si, že násobnost (neboli řád) nulového bodu w funkce f je nejmenší přirozené číslo k takové, že $f^{(k)}(w) \neq 0$ (tj. první index koeficientu a_k v Taylorově rozvoji f okolo w, který je nenulový).

LEMMA. Nechť f je holomorfní uvnitř a na uzavřené jednoduché křivce C, nenulová na C a má jen konečný počet nulových bodů uvnitř C. Pak integrál

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z$$

udává počet nulových bodů f uvnitř C, každý braný tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Důkaz. Označme $w_1, w_2, ..., w_n$ všechny nulové body f uvnitř C, které mají po řadě násobnosti $k_1, k_2, ..., k_n$.

Důkaz. Označme $w_1, w_2, ..., w_n$ všechny nulové body f uvnitř C, které mají po řadě násobnosti $k_1, k_2, ..., k_n$.

Funkce f'/f není uvnitř C definována jen v nulových bodech funkce f, takže podle Cauchyovy věty je

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde C_i jsou navzájem disjunktní kružnice okolo w_i ležící uvnitř C.

Důkaz. Označme $w_1, w_2, ..., w_n$ všechny nulové body f uvnitř C, které mají po řadě násobnosti $k_1, k_2, ..., k_n$.

Funkce f'/f není uvnitř C definována jen v nulových bodech funkce f, takže podle Cauchyovy věty je

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde C_i jsou navzájem disjunktní kružnice okolo w_i ležící uvnitř C.

Lze předpokládat $n = 1$ a $w_1 = w, k_1 = k$. Tudíž je $f(z) = (z-w)^k g(z)$, kde $g(w) \neq 0$ v nějakém okolí U bodu w. Může se i předpokládat, že C je částí U (opět podle Cauchyovy věty).

Důkaz. Označme $w_1, w_2, ..., w_n$ všechny nulové body f uvnitř C, které mají po řadě násobnosti $k_1, k_2, ..., k_n$.

Funkce f'/f není uvnitř C definována jen v nulových bodech funkce f, takže podle Cauchyovy věty je

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z\,,$$

kde C_i jsou navzájem disjunktní kružnice okolo w_i ležící uvnitř C.

Lze předpokládat $n = 1$ a $w_1 = w, k_1 = k$. Tudíž je $f(z) = (z-w)^k g(z)$, kde $g(w) \neq 0$ v nějakém okolí U bodu w. Může se i předpokládat, že C je částí U (opět podle Cauchyovy věty).

Po zderivování uvedeného výrazu pro f se dostává

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z = \oint_C \frac{k}{z-w}\, \mathrm{d}z + \oint_C \frac{g'(z)}{g(z)}\, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} k\,,$$

což se mělo dokázat. ◇

Věta platí. Víc nepovím.

VĚTA. Holomorfní a prostá funkce na oblasti má všude nenulovou derivaci.

VĚTA. Holomorfní a prostá funkce na oblasti má všude nenulovou derivaci.

Platí to i na $\mathbb{R}$?

Důkaz. Nechť f je holomorfní v bodě w a $f'(w) = 0$. Potom $f(z) - f(w) = (z-w)^k g(z)$, kde $k \geq 2$ a g je holomorfní funkce nenabývající 0 ve w. Existuje $r > 0$ tak, že $f'(z) \neq 0$ pro $0 < |z - w| \leq r$ (jinak by f byla konstantní na nějakém okolí bodu w). Položte $m = \min\{|f(z) - f(w)|; |z - w| = r\}$ ($m > 0$ protože f je prostá).

Pro kružnici C se středem w a dostatečně malým poloměrem je podle předchozího lemmatu $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f'(z)/(f(z) - f(w))\, \mathrm{d}z = k \geq 2$. Spočte se integrál $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f'(z)/(f(z) - f(w) - m/2)\, \mathrm{d}z$. Integrál $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f'(z)/(f(z) - f(w) - m/2)\, \mathrm{d}z$ je roven přírůstku argumentu funkce $(f(z) - f(w) - m/2)$ po oběhu křivky C dělený číslem 2π (viz úvahu v *Poznámkách*). Protože

$$f(z) - f(w) - m/2 = (f(z) - f(w))\Big(1 - \frac{m/2}{f(z) - f(w)}\Big) ,$$

je přírůstek argumentu funkce $f(z) - f(w) - m/2$ součtem přírůstku argumentů funkcí $f(z) - f(w)$ a $1 - \frac{m/2}{f(z)-f(w)}$. Ale vzdálenost $\frac{m/2}{f(z)-f(w)}$ od 0 pro $z \in C$ je nejvýše $1/2$ a tedy změna argumentu funkce $1 - \frac{m/2}{f(z)-f(w)}$ je tu menší než 2π, což znamená, že přírůstek argumentu je nulový.

Z předchozího vyplývá, že počet nulových bodů funkce $f(z) - f(w) - m/2$ je také $k \geq 2$. Protože $f'(z) \neq 0$ pro $0 < |z - w| \leq r$, má funkce $f(z) - f(w) - m/2$ jen jednoduché nulové body, a proto $k \geq 2$ nulových bodů, což je spor s tím, že f je prostá. $\diamond$

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Předchozí věta se dá obrátit, ale jen lokálně.

Předchozí věta se dá obrátit, ale jen lokálně.

VĚTA. Mé-li holomorfní funkce nenulovou derivaci v bodě, je prostá na nějakém jeho okolí.

Důkaz. Nechť $f'(w) \neq 0$. Existuje tedy $r > 0$ tak, že $|f'(z) - f'(w)| < |f'(w)|/2$ pro všechna z splňující $|z - w| \leq r$.

Důkaz. Nechť $f'(w) \neq 0$. Existuje tedy $r > 0$ tak, že $|f'(z) - f'(w)| < |f'(w)|/2$ pro všechna z splňující $|z - w| \leq r$.

Předpokládejte, že existují $u \neq v$ tak, že $|u - w| < r, |v - w| < r$ a $f(u) = f(v)$.

Důkaz. Nechť $f'(w) \neq 0$. Existuje tedy $r > 0$ tak, že $|f'(z) - f'(w)| < |f'(w)|/2$ pro všechna z splňující $|z - w| \leq r$.

Předpokládejte, že existují $u \neq v$ tak, že $|u - w| < r$, $|v - w| < r$ a $f(u) = f(v)$.

Funkce $f'(z) - f'(w)$ má primitivní funkce $f(z) - f'(w)z$ a tedy, pro úsečku P spojující body u, v,

$$\int_P (f'(z) - f'(w))\, \mathrm{d}z = f'(w)(u - v) \quad \text{ale} \quad \Big| \int_P (f'(z) - f'(w))\, \mathrm{d}z \Big| \leq \frac{|f'(w)|}{2} |u - v|\,.$$

což je spor. ◇

Důkaz. Nechť $f'(w) \neq 0$. Existuje tedy $r > 0$ tak, že $|f'(z) - f'(w)| < |f'(w)|/2$ pro všechna z splňující $|z - w| \leq r$.

Předpokládejte, že existují $u \neq v$ tak, že $|u - w| < r$, $|v - w| < r$ a $f(u) = f(v)$.

Funkce $f'(z) - f'(w)$ má primitivní funkce $f(z) - f'(w)z$ a tedy, pro úsečku P spojující body u, v,

$$\int_P (f'(z) - f'(w))\, \mathrm{d}z = f'(w)(u - v) \quad \text{ale} \quad \left| \int_P (f'(z) - f'(w))\, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{|f'(w)|}{2} |u - v| \,.$$

což je spor. ◇

Obě věty lze vyslovit současně: *Funkce holomorfní v nějakém bodě je prostá v nějakém jeho okolí právě když má v tomto bodě nenulovou derivaci.*

Dalším důsledkem je obdoba derivace inverzní reálné funkce reálné proměnné.

Dalším důsledkem je obdoba derivace inverzní reálné funkce reálné proměnné.

S tvrzením o derivaci inverzní funkce jste se setkali již v kapitole o derivaci, ale bylo nutné předpokládat spojitost inverzní funkce – ta nyní vyplývá z předchozích tvrzení.

Dalším důsledkem je obdoba derivace inverzní reálné funkce reálné proměnné.

S tvrzením o derivaci inverzní funkce jste se setkali již v kapitole o derivaci, ale bylo nutné předpokládat spojitost inverzní funkce – ta nyní vyplývá z předchozích tvrzení.

VĚTA. Nechť f je holomorfní prostá funkce na oblasti G. Pak inverzní funkce $g = f^{-1}$ je holomorfní na G a $g'(z) = 1/f'(g(z))$.

VĚTA. (Riemannova věta.) Nechť U je jednoduše souvislá otevřená množina v $\mathbb{C}$. Pak U je izomorfní s jednotkovým kruhem $D = \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| < 1\}$, to znamená, že existuje holomorfní bijekce mezi U a D, která má holomorfní inverzi.

VĚTA. (Riemannova věta.) Nechť U je jednoduše souvislá otevřená množina v $\mathbb{C}$. Pak U je izomorfní s jednotkovým kruhem $D = \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| < 1\}$, to znamená, že existuje holomorfní bijekce mezi U a D, která má holomorfní inverzi.

Důkaz věty najde hledanou funkci jako limitu funkcí, které existují. Je cool hledat tu bijekci metodou pokus omyl. Například zobrazení čtvrt kruhu na horní polorovinu je $((1 + z^2)/(1 - z^2))^2$.

POZNÁMKY

Poznámky 1 :

Existují funkce, které se nedají napsat pomocí elementárních funkcí a je nutné použít nějaký nekonečný proces. Bývá to popis např. pomocí integrálu nebo součinu či součtu posloupnosti. Součet nekonečné řady funkcí má v těchto popisech důležitou funkci a je velmi podrobně propracován.

Poznámky 1 :

Existují funkce, které se nedají napsat pomocí elementárních funkcí a je nutné použít nějaký nekonečný proces. Bývá to popis např. pomocí integrálu nebo součinu či součtu posloupnosti. Součet nekonečné řady funkcí má v těchto popisech důležitou funkci a je velmi podrobně propracován.

Příkladem takového popisu je tzv. Riemannova dzeta funkce z *Příkladu 1*. Uvidíte dále, že takto definovaná funkce lze rozšířit na holomorfní funkci na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2 :

Uvědomte si, že vzorce pro výpočet koeficientů mocninné řady implikují jednoznačnost rozkladu holomorfní funkce v mocninnou řadu.

Poznámky 2 :

Uvědomte si, že vzorce pro výpočet koeficientů mocninné řady implikují jednoznačnost rozkladu holomorfní funkce v mocninnou řadu.

Pro konvergenci mocninné řady na hraniční kružnici se často používá Dirichletovo kritérium. Místo z^n se vezme polární vyjádření $r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))$ a zkoumání konvergence se rozdělí na oddělené zkoumání reálné složky a imaginární složky.

Poznámky 2 :

Uvědomte si, že vzorce pro výpočet koeficientů mocninné řady implikují jednoznačnost rozkladu holomorfní funkce v mocninnou řadu.

Pro konvergenci mocninné řady na hraniční kružnici se často používá Dirichletovo kritérium. Místo z^n se vezme polární vyjádření $r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))$ a zkoumání konvergence se rozdělí na oddělené zkoumání reálné složky a imaginární složky.

Úlohu je rozvinout danou funkci v mocninnou řadu s daným středem (pokud je daná funkce v onom středu holomorfní) lze řešit několika způsoby. Jedním z postupů je použít vzorec pro Taylorovy koeficienty, ale to nebývá někdy vhodný postup, protože ne vždy lze po výpočtu prvních koeficientů odhadnout, jak budou vypadat další.

Poznámky 2 :

Uvědomte si, že vzorce pro výpočet koeficientů mocninné řady implikují jednoznačnost rozkladu holomorfní funkce v mocninnou řadu.

⬇

Pro konvergenci mocninné řady na hraniční kružnici se často používá Dirichletovo kritérium. Místo z^n se vezme polární vyjádření $r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))$ a zkoumání konvergence se rozdělí na oddělené zkoumání reálné složky a imaginární složky.

⬇

Úlohu je rozvinout danou funkci v mocninnou řadu s daným středem (pokud je daná funkce v onom středu holomorfní) lze řešit několika způsoby. Jedním z postupů je použít vzorec pro Taylorovy koeficienty, ale to nebývá někdy vhodný postup, protože ne vždy lze po výpočtu prvních koeficientů odhadnout, jak budou vypadat další.

⬇

Jinou možností je případ, kdy daná funkce lze získat derivováním nebo integrováním funkce, jejíž mocninnou řadu již znáte. Pro racionální funkce se používá rozklad na parciální zlomky a jejich rozvoj v geometrickou řadu.

Konec poznámek 2.

Poznámky 3 :

Zatímco mocninná řada vždy konverguje alespoň v jednom bodě, Laurentova řada nemusí konvergovat nikde. Může se stát, že konverguje pouze na nějaké kružnici (viz *Příklady*) a pak její součet není holomorfní funkce.

Poznámky 3 :

Zatímco mocninná řada vždy konverguje alespoň v jednom bodě, Laurentova řada nemusí konvergovat nikde. Může se stát, že konverguje pouze na nějaké kružnici (viz *Příklady*) a pak její součet není holomorfní funkce.

Pokud se u Laurentovy řady mluví o mezikruží konvergence, má se na mysli otevřená množina $\{z; r < |z - w| < R\}$, kde $0 \leq r < R \leq +\infty$.

Konec poznámek 3.

Poznámky 4 :

Z věty o jednoznačnosti vyplývá řada vztahů pro holomorfní funkce, které platí v reálném oboru. Např. holomorfní funkce $\sin^2 z + \cos^2 z$ a funkce 1 se rovnají na reálné přímce a proto se rovnají všude v C. Další podobné vztahy jsou v *Otázkách*.

Poznámky 4 :

Z věty o jednoznačnosti vyplývá řada vztahů pro holomorfní funkce, které platí v reálném oboru. Např. holomorfní funkce $\sin^2 z + \cos^2 z$ a funkce 1 se rovnají na reálné přímce a proto se rovnají všude v C. Další podobné vztahy jsou v *Otázkách*.

⬇

Další důležitý důsledek věty o jednoznačnosti se týká tzv. analytického pokračování holomorfní funkce. Je-li f holomorfní funkce na otevřené množině G, g, h jsou holomorfní funkce na otevřené množině H, přičemž $G \cap H \neq \emptyset$ a $g = f, h = f$ na $G \cap H$, pak $g = h$ na H.

⬇

Poznámky 4 :

Z věty o jednoznačnosti vyplývá řada vztahů pro holomorfní funkce, které platí v reálném oboru. Např. holomorfní funkce $\sin^2 z + \cos^2 z$ a funkce 1 se rovnají na reálné přímce a proto se rovnají všude v C. Další podobné vztahy jsou v *Otázkách*.

Další důležitý důsledek věty o jednoznačnosti se týká tzv. analytického pokračování holomorfní funkce. Je-li f holomorfní funkce na otevřené množině G, g, h jsou holomorfní funkce na otevřené množině H, přičemž $G \cap H \neq \emptyset$ a $g = f, h = f$ na $G \cap H$, pak $g = h$ na H.

Vezmou-li se složky f_1, f_2 holomorfního zobrazení, snadno se zjistí, že splňují definici regulárního zobrazení. Regulární zobrazení je však obecnější pojem. V citované kapitole je bez důkazu tvrzení, že regulární zobrazení zachovává otevřené množiny. Nyní, alespoň pro speciální případ, je toto tvrzení dokázáno.

Poznámky 4 :

Z věty o jednoznačnosti vyplývá řada vztahů pro holomorfní funkce, které platí v reálném oboru. Např. holomorfní funkce $\sin^2 z + \cos^2 z$ a funkce 1 se rovnají na reálné přímce a proto se rovnají všude v C. Další podobné vztahy jsou v *Otázkách*.

Další důležitý důsledek věty o jednoznačnosti se týká tzv. analytického pokračování holomorfní funkce. Je-li f holomorfní funkce na otevřené množině G, g, h jsou holomorfní funkce na otevřené množině H, přičemž $G \cap H \neq \emptyset$ a $g = f, h = f$ na $G \cap H$, pak $g = h$ na H.

Vezmou-li se složky f_1, f_2 holomorfního zobrazení, snadno se zjistí, že splňují definici regulárního zobrazení. Regulární zobrazení je však obecnější pojem. V citované kapitole je bez důkazu tvrzení, že regulární zobrazení zachovává otevřené množiny. Nyní, alespoň pro speciální případ, je toto tvrzení dokázáno.

Také předposlední věta o lokální prostotě holomorfní funkce s nenulovou derivací platí obecněji pro regulární zobrazení.

Poznámky 4 :

Z věty o jednoznačnosti vyplývá řada vztahů pro holomorfní funkce, které platí v reálném oboru. Např. holomorfní funkce $\sin^2 z + \cos^2 z$ a funkce 1 se rovnají na reálné přímce a proto se rovnají všude v C. Další podobné vztahy jsou v *Otázkách*.

Další důležitý důsledek věty o jednoznačnosti se týká tzv. analytického pokračování holomorfní funkce. Je-li f holomorfní funkce na otevřené množině G, g, h jsou holomorfní funkce na otevřené množině H, přičemž $G \cap H \neq \emptyset$ a $g = f, h = f$ na $G \cap H$, pak $g = h$ na H.

Vezmou-li se složky f_1, f_2 holomorfního zobrazení, snadno se zjistí, že splňují definici regulárního zobrazení. Regulární zobrazení je však obecnější pojem. V citované kapitole je bez důkazu tvrzení, že regulární zobrazení zachovává otevřené množiny. Nyní, alespoň pro speciální případ, je toto tvrzení dokázáno.

Také předposlední věta o lokální prostotě holomorfní funkce s nenulovou derivací platí obecněji pro regulární zobrazení.

Poslední věta o inverzním zobrazení byla již dokázána v *Otázkách* v první kapitole o komplexních funkcích pomocí Cauchyových-Riemannových podmínek. Současný důkaz je elegantnější.

Poznámky 4 :

Z věty o jednoznačnosti vyplývá řada vztahů pro holomorfní funkce, které platí v reálném oboru. Např. holomorfní funkce $\sin^2 z + \cos^2 z$ a funkce 1 se rovnají na reálné přímce a proto se rovnají všude v C. Další podobné vztahy jsou v *Otázkách*.

Další důležitý důsledek věty o jednoznačnosti se týká tzv. analytického pokračování holomorfní funkce. Je-li f holomorfní funkce na otevřené množině G, g, h jsou holomorfní funkce na otevřené množině H, přičemž $G \cap H \neq \emptyset$ a $g = f, h = f$ na $G \cap H$, pak $g = h$ na H.

Vezmou-li se složky f_1, f_2 holomorfního zobrazení, snadno se zjistí, že splňují definici regulárního zobrazení. Regulární zobrazení je však obecnější pojem. V citované kapitole je bez důkazu tvrzení, že regulární zobrazení zachovává otevřené množiny. Nyní, alespoň pro speciální případ, je toto tvrzení dokázáno.

Také předposlední věta o lokální prostotě holomorfní funkce s nenulovou derivací platí obecněji pro regulární zobrazení.

Poslední věta o inverzním zobrazení byla již dokázána v *Otázkách* v první kapitole o komplexních funkcích pomocí Cauchyových-Riemannových podmínek. Současný důkaz je elegantnější.

Funkce f'/f se často nazývá logaritmická derivace funkce f, protože má za primitivní funkci $\log(f(z)) = \log|f(z)| + \mathrm{i}\arg f(z)$.

Funkce f'/f se často nazývá logaritmická derivace funkce f, protože má za primitivní funkci $\log(f(z)) = \log|f(z)| + \mathrm{i} \arg f(z)$.

⬇

Uvedený integrál $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ je tedy roven přírůstku argumentu funkce f (vynásobený i) po oběhu bodu z po křivce C (na uzavřené křivce se reálná část logaritmu zruší).

Konec poznámek 4.

PŘÍKLADY

Příklady 1 :

1. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \leq 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

2. Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z}$ je holomorfní funkce pro $\Re z > 0$, jakmile $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolutně konverguje.

3. Zjistěte, kde následující řady konvergují stejnoměrně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2-n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n.$$

Konec příkladů 1.

Příklady 2 :

1. Ukažte, že v oboru komplexních čísel je součet geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ roven $1/(1-z)$ pro $|z|<1$. Geometrická řada diverguje pro $|z|>1$. Jak je to s konvergencí na hranici? [konverguje (neabsolutně) kromě bodu $z=1$]

2. Najděte kruh konvergence následujících řad a zkuste zjistit konvergenci na hraniční kružnici:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n\,, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\,, \sum_{n=1}^{\infty} (nz)^n\,, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}\,.$$

3. Najděte kruh konvergence následujících řad a zkuste zjistit konvergenci na hraniční kružnici:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z}{2}-1\right).$$

4. Najděte rozvoj $1/z$ okolo bodu 1. [Napište $1/z$ jako $1/(1-(1-z))$ a použijte geometrickou řadu s kvocientem $1-z$.]

5. Najděte rozvoj $\frac{2z}{(z-1)(z+1)}$ okolo bodu 0. [Rozklad $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$ je součet geometrických řad $-\sum z^n, \sum(-z)^n$.]

6. Předchozím způsobem rozložte $z^2/(z^2+1)$ okolo bodu 1.

7. Pomocí derivace mocninné řady získejte rozvoj v mocninnou řadu funkce $1/(1-z)^3$.

8. Integrací jistých mocninných řad získejte mocninné řady pro $\mathrm{Log}(z+1)$ a $\mathrm{arctg}\, z$.

Konec příkladů 2.

Příklady 3 :

1. Najděte mezikruží konvergence Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n/2^{n^2}$.

2. Rozkladem na parciální zlomky a jejich rozvojem v geometrické řady lze získat Laurentovy řady racionálních funkcí. Zjistěte Laurentovu řadu funkce $1/(z^2 - 3z + 2)$ v mezikruží $1 < |z| < 2$. [Regulární část se získá z parciálního zlomku $1/(z - 2)$ postupem ukázaným v *Příkladech 2*; hlavní část se získá ze zlomku $1/(z - 1)$ úpravou na $(1/z)/(1 - (1/z))$ a rozvojem v geometrickou řadu s kvocientem $1/z$.]

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Najděte Laurentovy řady funkce $z^3/(z^3 - 5z^2 + 6z)$ v jednotlivých oblastech

$$0 < |z| < 2\,, \quad 2 < |z| < 3\,, \quad 3 < |z|\,.$$

4. V některých případech se Laurentovy řady získají pouhým vydělením. Napište Laurentovy řady pro $\frac{\mathrm{e}^z}{z^3}$, $\frac{\sin z}{z^2}$, $\frac{\cosh z}{z^5}$.

5. Najděte všechny body z, pro které konvergují řady

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\,.$$

Konec příkladů 3.

Příklady 4 :

1. Integrací logaritmické derivace zjistěte počet oběhů následujících funkcí okolo 0:

$$z^n \ (n \in Z)\,, \quad \sin z\,, \quad \mathrm{e}^z\,.$$

2. Funkce z^3 je v reálném oboru prostá a má v 0 derivaci rovnou 0. Derivaci rovnou 0 v počátku má i jako funkce komplexní proměnné a tedy jako funkce komplexní proměnné není prostá v žádném okolí 0. Ověřte tento fakt přímo bez použití obecných vět.

3. Použijte L'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit (ověřte podmínky pro jeho použití)

$$\lim_{x\to 3\pi i/2} \frac{e^z + \mathbf{i}}{z - 3\pi\mathbf{i}/2}, \quad \lim_{x\to 3i} \frac{\sinh(z-3\mathbf{i})}{z-3\mathbf{i}}, \quad \lim_{x\to 3i} \frac{\operatorname{Log} z - \mathbf{i}}{\sin(z-\mathbf{i})}.$$

Konec příkladů 4.

OTÁZKY

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Dokažte pomocí principu maxima modulu. že pokud řada funkcí, holomorfních uvnitř a na jednoduché uzavřené křivce, konverguje stejnoměrně na této křivce, konverguje stejnoměrně i uvnitř křivky.

2. Najděte příklad stejnoměrně konvergentní řady holomorfních funkcí na uzavřeném kruhu, jejichž derivace konverguje uvnitř kruhu a nikoli na hranici. [$\sum z^n/n^2$]

Konec otázek 1.

Otázky 3 :

1. V důkazu poslední věty se při získání vzorce pro koeficienty a_n integrovalo podél různých křivek C a D podle toho, zda index n byl kladný nebo záporný.

Otázky 3 :

1. V důkazu poslední věty se při získání vzorce pro koeficienty a_n integrovalo podél různých křivek C a D podle toho, zda index n byl kladný nebo záporný.

Ukažte, že vzorec $a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$ platí pro libovolnou jednoduchou uzavřenou křivku C ležící uvnitř M a obsahující z_0 ve svém vnitřku.

2. Dokažte, že pokud Laurentova řada $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ konverguje v mezikruží $r < |z-w| < R$, pak řada $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_n}(z-\overline{w})^n$ konverguje v mezikruží $r < |z-\overline{w}| < R$.

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Dokažte, že pokud Laurentova řada $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ konverguje v mezikruží $r < |z-w| < R$, pak řada $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_n}(z-\overline{w})^n$ konverguje v mezikruží $r < |z-\overline{w}| < R$.

⬇

Vyvoďte odtud, že má-li f za definiční obor otevřenou množinu G symetrickou kolem osy x a $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ na G, pak holomorfnost f v mezikruží $r < |z-w| < R$ implikuje holomorfnost f v mezikruží $r < |z-\overline{w}| < R$.

Konec otázek 3.

Otázky 4 :

1. Pomocí věty o jednoznačnosti dokažte následující vztahy:

$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w\,, \sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w\,, \left(z^w\right)^c = z^{wc}\,.$$

[Nejdříve předpokládejte, že např. w je reálné a dokažte rovnost pro komplexní z; v druhém kroku rozšiřte platnost rovnosti i na komplexní w.]

2. Ověřte, že nekonstantní holomorfní funkce je regulárním zobrazením.

3. Ukažte, že hodnota následujícího integrálu logaritmické derivace

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z$$

udává počet oběhů hodnot $f(z)$ okolo 0 když z obíhá jednoduchou uzavřenou křivku C obsahující 0 ve svém vnitřku (funkce f na C nenabývá hodnoty 0). Počtem oběhů se myslí změna argumentu $f(z)$.

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ukažte, že pokud je f nekonstantní a holomorfní v oblasti G, pak množina nulových bodů funkce f je diskrétní v G (tj., každý nulový bod má okolí, v němž nemá f, kromě bodu samého, nulové hodnoty).

5. Ukažte, že v důkazu věty o jednoznačnosti se opravdu po konečně mnoha krocích dospěje k bodu c.

6. Najděte holomorfní funkci v jednoduše souvislé oblasti, která má všude nenulovou derivaci a přitom není prostá.

7. Použijte metodu z důkazu věty o prostém zobrazení na důkaz tzv Rouchého věty: *Nechť f, g jsou holomorfní funkce na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C. Jestliže na C platí $|g| < |f|$, pak f a $f + g$ mají uvnitř C stejný počet nulových bodů.* [$f + g = f(1 + g/f)$ a podobně jako v uvedeném důkazu ukažte, že $1 + g/f$ nemůže oběhnout počátek.]

Konec otázek 4.

CVIČENÍ

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Řešení. Začneme tím, že zadanou (racionální) funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Řešení. Začneme tím, že zadanou (racionální) funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

Singularity funkce jsou v bodech 0 a 1. Pro $|z-1| < 1$ je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Cvičení 1 :

Příklad. Najděte rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Řešení. Začneme tím, že zadanou (racionální) funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

Singularity funkce jsou v bodech 0 a 1. Pro $|z-1| < 1$ je

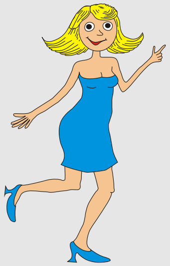
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Na mezikruží $0 < |z-1| < 1$ tedy platí

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Takže stačí znát součet geometrické řady a spočítáme všecko!

Takže stačí znát součet geometrické řady a spočítáme všecko!



Jaká je hlavní a vedlejší část v získané Laurentově řadě?

Konec cvičení 1.

Cvičení 2 :

Příklad. Najděte rozvoj funkce

$$\frac{1}{(z-a)^k}$$

do Laurentovy řady se středem v 0. Předpokládejme, že $a \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$.

Cvičení 2 :

Příklad. Najděte rozvoj funkce

$$\frac{1}{(z-a)^k}$$

do Laurentovy řady se středem v 0. Předpokládejme, že $a \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$.

Řešení. Zadaná funkce má singularitu v bodě a.

Cvičení 2 :

Příklad. Najděte rozvoj funkce

$$\frac{1}{(z-a)^k}$$

do Laurentovy řady se středem v 0. Předpokládejme, že $a \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$.

Řešení. Zadaná funkce má singularitu v bodě a.

Pro $|z| < |a|$ platí

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n.$$

Cvičení 2 :

Příklad. Najděte rozvoj funkce

$$\frac{1}{(z-a)^k}$$

do Laurentovy řady se středem v 0. Předpokládejme, že $a \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$.

Řešení. Zadaná funkce má singularitu v bodě a.

Pro $|z| < |a|$ platí

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n .$$

Tuto řadu $(k-1)$-krát zderivujeme:

$$\frac{-1}{(z-a)^2} = -\frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1} .$$

$$\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z-a)^k} = -\frac{1}{a^k}\sum_{n=k-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+2)\left(\frac{z}{a}\right)^{n-k+1} .$$

Cvičení 2 :

Příklad. Najděte rozvoj funkce

$$\frac{1}{(z-a)^k}$$

do Laurentovy řady se středem v 0. Předpokládejme, že $a \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$.

Řešení. Zadaná funkce má singularitu v bodě a.

Pro $|z| < |a|$ platí

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n .$$

Tuto řadu $(k-1)$-krát zderivujeme:

$$\frac{-1}{(z-a)^2} = -\frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1} .$$

$$\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z-a)^k} = -\frac{1}{a^k}\sum_{n=k-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+2)\left(\frac{z}{a}\right)^{n-k+1} .$$

Odtud dostaneme

$$\frac{1}{(z-a)^k} = \frac{(-1)^k}{a^k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\frac{z}{a}\right)^n .$$

Konec cvičení 2.

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte Laurentovu řadu v bodě 0 pro funkci

$$e^{z+\frac{1}{z}}.$$

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte Laurentovu řadu v bodě 0 pro funkci

$$e^{z+\frac{1}{z}}.$$

Řešení. Protože je

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z e^{\frac{1}{z}},$$

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte Laurentovu řadu v bodě 0 pro funkci

$$e^{z+\frac{1}{z}}.$$

Řešení. Protože je

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z e^{\frac{1}{z}},$$

získáme Laurentovu řadu jako součet Laurentových řad funkcí

$$e^z, \qquad e^{\frac{1}{z}}.$$

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte Laurentovu řadu v bodě 0 pro funkci

$$e^{z+\frac{1}{z}}.$$

Řešení. Protože je

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z e^{\frac{1}{z}},$$

získáme Laurentovu řadu jako součet Laurentových řad funkcí

$$e^z, \qquad e^{\frac{1}{z}}.$$

Rozvoj exponenciely známe:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

Cvičení 3 :

Příklad. Najděte Laurentovu řadu v bodě 0 pro funkci

$$e^{z+\frac{1}{z}}.$$

Řešení. Protože je

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z e^{\frac{1}{z}},$$

získáme Laurentovu řadu jako součet Laurentových řad funkcí

$$e^z, \qquad e^{\frac{1}{z}}.$$

Rozvoj exponenciely známe:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

a odtud získáme i rozvoj druhé funkce:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a odtud získáme i rozvoj druhé funkce:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Celkem tedy máme, podle definice násobení řad, rozvoj

$$e^{z+\frac{1}{z}} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

kde

$$a_n = a_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Konec cvičení 3.

Cvičení 4 :

Příklad. Určete konvergenci následující řady pro $|z| < 1$ a pokud konverguje, určete její součet:

$$z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \dots$$

Cvičení 4 :

Příklad. Určete konvergenci následující řady pro $|z| < 1$ a pokud konverguje, určete její součet:

$$z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \dots$$

Řešení. n-tý částečný součet S_n uvedené řady je

$$\begin{aligned} S_n(z) &= z(1-z) + z^2(1-z) + \cdots + z^n(1-z) \\ &= z - z^2 + z^2 - z^3 + \cdots + z^n - z^{n+1} \\ &= z - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Cvičení 4 :

Příklad. Určete konvergenci následující řady pro $|z| < 1$ a pokud konverguje, určete její součet:

$$z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \dots$$

Řešení. n-tý částečný součet S_n uvedené řady je

$$\begin{aligned} S_n(z) &= z(1-z) + z^2(1-z) + \cdots + z^n(1-z) \\ &= z - z^2 + z^2 - z^3 + \cdots + z^n - z^{n+1} \\ &= z - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Nyní je vidět, že částečné součty konvergují k funkci z :

$$|S_n(z) - z| = |z^{n+1}| = |z|^{n+1} < \varepsilon,$$

pro

$$(n+1)\log|z| < \log\varepsilon,$$

neboli

$$n > \frac{\log\varepsilon}{\log|z|} - 1,$$

pro $z \neq 0$.

Cvičení 4 :

Příklad. Určete konvergenci následující řady pro $|z| < 1$ a pokud konverguje, určete její součet:

$$z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \dots$$

Řešení. n-tý částečný součet S_n uvedené řady je

$$\begin{aligned} S_n(z) &= z(1-z) + z^2(1-z) + \dots + z^n(1-z) \\ &= z - z^2 + z^2 - z^3 + \dots + z^n - z^{n+1} \\ &= z - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Nyní je vidět, že částečné součty konvergují k funkci z :

$$|S_n(z) - z| = |z^{n+1}| = |z|^{n+1} < \varepsilon,$$

pro

$$(n+1)\log|z| < \log\varepsilon,$$

neboli

$$n > \frac{\log\varepsilon}{\log|z|} - 1,$$

pro $z \neq 0$.

Jinak, pro $z = 0$ máme

$$S_n(0) = 0,$$

takže samozřejmě

$$|S_n(0) - 0| < \varepsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jinak, pro $z = 0$ máme

$$S_n(0) = 0,$$

takže samozřejmě

$$|S_n(0) - 0| < \varepsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

⬇

Dokázali jsme tedy, že řada konverguje pro $|z| < 1$ a jejím součtem je z.

⬇

Jinak, pro $z = 0$ máme

$$S_n(0) = 0,$$

takže samozřejmě

$$|S_n(0) - 0| < \varepsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokázali jsme tedy, že řada konverguje pro $|z| < 1$ a jejím součtem je z.

To je ale náhoda, co? Nebo teda jako ne?

Konec cvičení 4.

Cvičení 5 :

Příklad. Rozhodněte, zda je možné rozšírit funkci f definovanou na kruhu $|z| < 1$ součtem řady

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Cvičení 5 :

Příklad. Rozhodněte, zda je možné rozšírit funkci f definovanou na kruhu $|z| < 1$ součtem řady

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Řešení. Snadno ověříme, že platí

$$f(z) = z + f(z^2), \quad f(z) = z + z^2 + f(z^4), \quad f(z) = z + z^2 + z^4 + f(z^8).$$

Cvičení 5 :

Příklad. Rozhodněte, zda je možné rozšířit funkci f definovanou na kruhu $|z| < 1$ součtem řady

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Řešení. Snadno ověříme, že platí

$$f(z) = z + f(z^2), \quad f(z) = z + z^2 + f(z^4), \quad f(z) = z + z^2 + z^4 + f(z^8).$$

Odtud je vidět, že řada diverguje pro všechna z splňující

$$z = 1, \quad z^2 = 1, \quad z^4 = 1, \quad z^8 = 1, \ldots .$$

Cvičení 5 :

Příklad. Rozhodněte, zda je možné rozšírit funkci f definovanou na kruhu $|z| < 1$ součtem řady

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Řešení. Snadno ověříme, že platí

$$f(z) = z + f(z^2), \quad f(z) = z + z^2 + f(z^4), \quad f(z) = z + z^2 + z^4 + f(z^8).$$

Odtud je vidět, že řada diverguje pro všechna z splňující

$$z = 1, \quad z^2 = 1, \quad z^4 = 1, \quad z^8 = 1, \ldots .$$

Všechna tato z leží na jednotkové kružnici a libovolně malý úhel jich obsahuje nekonečně mnoho.

Cvičení 5 :

Příklad. Rozhodněte, zda je možné rozšířit funkci f definovanou na kruhu $|z| < 1$ součtem řady

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Řešení. Snadno ověříme, že platí

$$f(z) = z + f(z^2), \quad f(z) = z + z^2 + f(z^4), \quad f(z) = z + z^2 + z^4 + f(z^8).$$

Odtud je vidět, že řada diverguje pro všechna z splňující

$$z = 1, \quad z^2 = 1, \quad z^4 = 1, \quad z^8 = 1, \ldots.$$

Všechna tato z leží na jednotkové kružnici a libovolně malý úhel jich obsahuje nekonečně mnoho.

Proto neexistuje otevřená množina, která by měla s otevřeným jednotkovým kruhem neprázdný průnik a nebyla jeho podmnožinou, tak že f je na této množině analytická.

Cvičení 5 :

Příklad. Rozhodněte, zda je možné rozšírit funkci f definovanou na kruhu $|z| < 1$ součtem řady

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Řešení. Snadno ověříme, že platí

$$f(z) = z + f(z^2), \quad f(z) = z + z^2 + f(z^4), \quad f(z) = z + z^2 + z^4 + f(z^8).$$

Odtud je vidět, že řada diverguje pro všechna z splňující

$$z = 1, \quad z^2 = 1, \quad z^4 = 1, \quad z^8 = 1, \ldots .$$

Všechna tato z leží na jednotkové kružnici a libovolně malý úhel jich obsahuje nekonečně mnoho.

Proto neexistuje otevřená množina, která by měla s otevřeným jednotkovým kruhem neprázdný průnik a nebyla jeho podmnožinou, tak že f je na této množině analytická.

Analytické prodloužení tedy neexistuje.

Analytické prodloužení tedy neexistuje.

Ani prodloužení ani rozšíření. Prostě nic.

Konec cvičení 5.

Cvičení 6 :

Příklad. Určete, kde konverguje následující řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n .$$

Cvičení 6 :

Příklad. Určete, kde konverguje následující řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$

Řešení. Označme $a_n = n!$. V tomto případě je vhodnější místo počítání $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ počítat limitu podílu

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty.$$

Cvičení 6 :

Příklad. Určete, kde konverguje následující řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$

Řešení. Označme $a_n = n!$. V tomto případě je vhodnější místo počítání $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ počítat limitu podílu

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty.$$

Tedy poloměr konvergence je

$$\rho = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Cvičení 6 :

Příklad. Určete, kde konverguje následující řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$

Řešení. Označme $a_n = n!$. V tomto případě je vhodnější místo počítání $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ počítat limitu podílu

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty.$$

Tedy poloměr konvergence je

$$\rho = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Jelikož řada konverguje v nule, je to jediný bod konvergence.

Konec cvičení 6.

STANDARDY z kapitoly

ŘADY KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ

STANDARDY z kapitoly

ŘADY KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ

OBECNÉ VLASTNOSTI

OBECNÉ VLASTNOSTI

Definice říká, že $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$, jestliže z je limita částečných součtů řady $\sum z_n$, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro $m > k$ je $|z - \sum_{n=0}^{m} z_n| < \varepsilon$.

OBECNÉ VLASTNOSTI

Definice říká, že $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$, jestliže z je limita částečných součtů řady $\sum z_n$, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro $m > k$ je $|z - \sum_{n=0}^{m} z_n| < \varepsilon$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ (to je řada reálných čísel a lze na ní použít kritéria konvergence řad reálných čísel).

OBECNÉ VLASTNOSTI

Definice říká, že $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$, jestliže z je limita částečných součtů řady $\sum z_n$, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro $m > k$ je $|z - \sum_{n=0}^{m} z_n| < \varepsilon$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ (to je řada reálných čísel a lze na ní použít kritéria konvergence řad reálných čísel).

1. $\sum z_n = z$ právě když $\sum \Re(z_n) = \Re(z)$ a $\sum \Im(z_n) = \Im(z)$.
2. Pokud $\sum z_n$ konverguje, pak $z_n \to 0$ a tedy $\{z_n\}$ je omezená posloupnost.
3. $\sum z_n$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že $|\sum_{n=m}^{m+p} z_n| < \varepsilon$ pro každé $m > k$ a $p \in \mathbb{N}$.
4. $\sum (az_n + bw_n) = a \sum z_n + b \sum w_n$.
5. Absolutně konvergentní řada je konvergentní.

DEFINICE. Řada $\sum f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f, jestliže konverguje bodově, tj. pro každé $z \in A$ je $\sum f_n(z) = f(z)$.

DEFINICE. Řada $\sum f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f, jestliže konverguje bodově, tj. pro každé $z \in A$ je $\sum f_n(z) = f(z)$.

DEFINICE. Řada $\sum f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f, jestliže konverguje bodově, tj. pro každé $z \in A$ je $\sum f_n(z) = f(z)$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f stejnoměrně, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro každé $m > k$ a každé $z \in A$ je $|f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| < \varepsilon$ (tj. $\lim_m \sup_{z \in A} |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| = 0$).

VĚTA. Nechť řada $\sum f_n$ konverguje k f stejnoměrně na A. Jsou-li všechny funkce f_n (stejnoměrně) spojité, je i f (stejnoměrně) spojitá.

VĚTA. Nechť f_n jsou spojité funkce na křivce C a řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na křivce C. Potom je

$$\sum \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \sum f_n(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

VĚTA. Nechť f_n jsou spojité funkce na křivce C a řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na křivce C. Potom je

$$\sum \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \sum f_n(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Důkaz. Označme $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ a L délku křivky C. Platí

$$\left| \int_C f(z)\,\mathrm{d}z - \int_C \sum_{n=0}^{m} f_n(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq L \max_{z\in C} \left| f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z) \right|$$

a uvedené maximum konverguje k 0 vzhledem ke stejnoměrné konvergenci. ◇

VĚTA. Nechť řada holomorfních funkcí f_n konverguje stejnoměrně k funkci f na oblasti G. Pak f je holomorfní a $f'(z) = \sum f_n'(z)$.

Důkaz. Nechť $w \in G$, W je otevřený kruh okolo w ležící v G a C je jednoduchá uzavřená křivka ve W.

Důkaz. Nechť $w \in G$, W je otevřený kruh okolo w ležící v G a C je jednoduchá uzavřená křivka ve W.

Podle předchozí věty je

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = \sum \oint_C f_n(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

protože f_n jsou holomorfní ve W. Podle Morerovy věty je tedy i f holomorfní ve W.

Důkaz. Nechť $w \in G$, W je otevřený kruh okolo w ležící v G a C je jednoduchá uzavřená křivka ve W.

Podle předchozí věty je

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum \oint_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

protože f_n jsou holomorfní ve W. Podle Morerovy věty je tedy i f holomorfní ve W.

Nyní lze použít Cauchyův vzorec pro kružnici se středem z_0 ležící ve W a dostane se

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \sum \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \sum \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z = \sum f_n'(z_0)\,.$$

Důkaz. Nechť $w \in G$, W je otevřený kruh okolo w ležící v G a C je jednoduchá uzavřená křivka ve W.

Podle předchozí věty je

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = \sum \oint_C f_n(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

protože f_n jsou holomorfní ve W. Podle Morerovy věty je tedy i f holomorfní ve W.

Nyní lze použít Cauchyův vzorec pro kružnici se středem z_0 ležící ve W a dostane se

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \sum \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\ \mathrm{d}z =$$

$$= \sum \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\ \mathrm{d}z = \sum f_n'(z_0)\,.$$

Použil se fakt, že spolu se $\sum f_n(z)$ je stejnoměrně konvergentní i řada $\sum \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}$, protože

$$\Big|\sum_{n=m}^{k} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\Big| = \frac{1}{r^2}\Big|\sum_{n=m}^{k} f_n(z)\Big|\,,$$

kde r je poloměr kružnice C. $\diamond$

MOCNINNÉ ŘADY

Mocninná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $z_0 \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}$ a z je komplexní proměnná. Bod z_0 je střed konvergence řady a v tomto bodě řada vždy konverguje.

Mocninná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $z_0 \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}$ a z je komplexní proměnná. Bod z_0 je střed konvergence řady a v tomto bodě řada vždy konverguje.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Pak uvedená řada konverguje absolutně pro $|z-z_0| < \rho$, diverguje pro $|z-z_0| > \rho$. Pro libovolné kladné $r < \rho$ konverguje stejnoměrně pro $|z-z_0| \le r$.

Číslo ρ se nazývá poloměr konvergence a $\{z; |z-z_0| < \rho\}$ kruh konvergence dané řady.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
3. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k $f(z)$ v kruhu konvergence a poloměr konvergence této řady je opět ρ.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
3. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k $f(z)$ v kruhu konvergence a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
4. Je-li $|z-z_0| < \rho$ a C křivka ležící v kruhu konvergence s počátečním bodem A a koncovým bodem B, pak

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left((B-z_0)^{n+1} - (A-z_0)^{n+1}\right).$$

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
3. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k $f(z)$ v kruhu konvergence a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
4. Je-li $|z-z_0| < \rho$ a C křivka ležící v kruhu konvergence s počátečním bodem A a koncovým bodem B, pak
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left((B-z_0)^{n+1} - (A-z_0)^{n+1}\right).$$
5. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je Taylorovou řadou funkce $f(z)$ na kruhu konvergence, tj.
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

VĚTA. Funkce f je holomorfní v bodě z_0 právě když je v nějakém otevřeném kruhu okolo z_0 součtem své Taylorovy řady.

VĚTA. Funkce f je holomorfní v bodě z_0 právě když je v nějakém otevřeném kruhu okolo z_0 součtem své Taylorovy řady.

Důkaz. Nechť f je holomorfní v kruhu $K = \{z; |z - z_0| < r\}$ a w je libovolný bod K. Má se dokázat, že

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w - z_0)^n \,.$$

Důkaz. Nechť f je holomorfní v kruhu $K = \{z; |z - z_0| < r\}$ a w je libovolný bod K. Má se dokázat, že

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w - z_0)^n \,.$$

Nechť C je kružnice se středem z_0 ležící v K obsahující uvnitř w, takže $f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)/(z - w)^{-1} \, \mathrm{d}z$. Zlomek $1/(z - w)$ je součtem geometrické řady

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{(z - z_0)\left(1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}\right)} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0}\right)^n ,$$

přičemž poslední řada konverguje stejnoměrně na C (má za majorantu geometrickou řadu s kvocientem menším než 1).

Důkaz. Nechť f je holomorfní v kruhu $K = \{z; |z - z_0| < r\}$ a w je libovolný bod K. Má se dokázat, že

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w - z_0)^n .$$

Nechť C je kružnice se středem z_0 ležící v K obsahující uvnitř w, takže $f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)/(z-w)^{-1}\, \mathrm{d}z$. Zlomek $1/(z-w)$ je součtem geometrické řady

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-z_0)\left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n ,$$

přičemž poslední řada konverguje stejnoměrně na C (má za majorantu geometrickou řadu s kvocientem menším než 1).

Dosazením do Cauchyova vzorce pro $f(w)$ se dostane

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} (w-z_0)^n \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w-z_0)^n ,$$

což se mělo dokázat ◇

LAURENTOVY ŘADY

LAURENTOVY ŘADY

DEFINICE. Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se definuje rovností

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n} \,.$$

LAURENTOVY ŘADY

DEFINICE. Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se definuje rovností

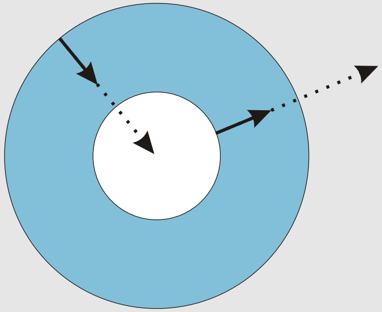
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}\,.$$

První část $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ Laurentovy řady se nazývá regulární část, druhá se nazývá hlavní část.

Definice určuje, co znamená konvergence Laurentovy řady: je to konvergence obou jejích částí:

Definice určuje, co znamená konvergence Laurentovy řady: je to konvergence obou jejích částí:

Jedna část takové řady konverguje uvnitř nějakého kruhu, jiná část vně jiného kruhu. Když se protnou, vznikne mezikruží konvergence.



VĚTA. Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existují čísla $0 \le r \le R \le +\infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z-z_0| < R\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině M.

VĚTA. Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existují čísla $0 \le r \le R \le +\infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z-z_0| < R\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině M.

$\Downarrow$

Součtem této řady je holomorfní funkce v mezikruží M, její derivace a primitivní funkce se získají derivováním a integrováním řady člen po členu.

VĚTA. Nechť $0 \le r < R \le \infty$ a funkce f je holomorfní v mezikruží M o středu z_0 a poloměrech r, R. Potom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pro nějaká $a_n \in \mathbb{C}$ a všechna $z \in M$.

Důkaz. Kvůli jednoduššímu vyjádření stačí předpokládat $z_0 = 0$.

Důkaz. Kvůli jednoduššímu vyjádření stačí předpokládat $z_0 = 0$.

Zvolte $w \in M$ a kružnice (kladně orientované) C, D o středu 0 ležící v M, z nichž C obsahuje w uvnitř a D vně. Podle obecné Cauchyovy věty je

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-w}\, \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_D \frac{f(z)}{z-w}\, \mathrm{d}z\,.$$

Důkaz. Kvůli jednoduššímu vyjádření stačí předpokládat $z_0 = 0$.

Zvolte $w \in M$ a kružnice (kladně orientované) C, D o středu 0 ležící v M, z nichž C obsahuje w uvnitř a D vně. Podle obecné Cauchyovy věty je

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_D \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z\,.$$

V prvním integrálu je $|z| > |w|$ a tedy $\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^n$. Ve druhém integrálu je $|z| < |w|$ a tedy $\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n$. Tyto řady po vynásobení $f(z)$ je možné integrovat člen po členu, takže

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} w^n \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1} \oint_D z^n f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

což je hledaný tvar. $\diamond$

V důkazu jsme získali vzorec pro výpočet koeficientů a_n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z\,,$$

kde C je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

V důkazu jsme získali vzorec pro výpočet koeficientů a_n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z\,,$$

kde C je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

BTW, Laurentovy řady se čtou loránovy řady.

RŮZNÁ POUŽITÍ

RŮZNÁ POUŽITÍ

VĚTA. (Věta o jednoznačnosti) Nechť funkce f a g jsou holomorfní v oblasti G a $\{w_n\}$ je posloupnost v G konvergující k $w \in G$. Jestliže $f(w_n) = g(w_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in G$.

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

⬇

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

⬇

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

⬇

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

⬇

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

⬇

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

Zbývá dokázat, že pro libovolný bod $c \in G$ je $f(c) = 0$. Spojme c s w lomenou čarou L ležící v G.

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

⬇

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

⬇

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

⬇

Zbývá dokázat, že pro libovolný bod $c \in G$ je $f(c) = 0$. Spojme c s w lomenou čarou L ležící v G.

⬇

Pokud $c \in K_w$, není co dokazovat. Jinak se vezme průsečík c_1 hranice kruhu K_w s L takový, že část L od w do c_1 leží v K_w.

⬇

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

⬇

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

⬇

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

⬇

Zbývá dokázat, že pro libovolný bod $c \in G$ je $f(c) = 0$. Spojme c s w lomenou čarou L ležící v G.

⬇

Pokud $c \in K_w$, není co dokazovat. Jinak se vezme průsečík c_1 hranice kruhu K_w s L takový, že část L od w do c_1 leží v K_w.

⬇

Bod c_1 je hromadným bodem nulových bodů funkce f a tedy okolo něho existuje kruh K_1, na kterém je $f = 0$.

⬇

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

⬇

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

⬇

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

⬇

Zbývá dokázat, že pro libovolný bod $c \in G$ je $f(c) = 0$. Spojme c s w lomenou čarou L ležící v G.

⬇

Pokud $c \in K_w$, není co dokazovat. Jinak se vezme průsečík c_1 hranice kruhu K_w s L takový, že část L od w do c_1 leží v K_w.

⬇

Bod c_1 je hromadným bodem nulových bodů funkce f a tedy okolo něho existuje kruh K_1, na kterém je $f = 0$.

⬇

Pokud $c \notin K_1$, vezme se průsečík c_2 hranice K_1 s L ležící blíže k c tak, že část L od c_1 do c_2 leží v K_1. Tímto způsobem se po konečně mnoha krocích dostaneme do situace, kdy $c \in K_n$ pro nějaké n. $\diamond$

VĚTA. Každá holomorfní nekonstantní funkce f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina roviny, jakmile je G otevřená podmnožina definičního oboru f.

LEMMA. Nechť f je holomorfní uvnitř a na uzavřené jednoduché křivce C, nenulová na C a má jen konečný počet nulových bodů uvnitř C. Pak integrál

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z$$

udává počet nulových bodů f uvnitř C, každý braný tolikrát, kolik je jeho násobnost.

VĚTA. Holomorfní a prostá funkce na oblasti má všude nenulovou derivaci.

VĚTA. Holomorfní a prostá funkce na oblasti má všude nenulovou derivaci.

⇓

VĚTA. Mé-li holomorfní funkce nenulovou derivaci v bodě, je prostá na nějakém jeho okolí.

⇓

VĚTA. Holomorfní a prostá funkce na oblasti má všude nenulovou derivaci.

⇓

VĚTA. Mé-li holomorfní funkce nenulovou derivaci v bodě, je prostá na nějakém jeho okolí.

⇓

Obě věty lze vyslovit současně: *Funkce holomorfní v nějakém bodě je prostá v nějakém jeho okolí právě když má v tomto bodě nenulovou derivaci.*

VĚTA. Nechť f je holomorfní prostá funkce na oblasti G. Pak inverzní funkce $g = f^{-1}$ je holomorfní na G a $g'(z) = 1/f'(g(z))$.

VĚTA. (Riemannova věta.) Nechť U je jednoduše souvislá otevřená množina v $\mathbb{C}$. Pak U je izomorfní s jednotkovým kruhem $D = \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| < 1\}$, to znamená, že existuje holomorfní bijekce mezi U a D, která má holomorfní inverzi.

VĚTA. (Riemannova věta.) Nechť U je jednoduše souvislá otevřená množina v $\mathbb{C}$. Pak U je izomorfní s jednotkovým kruhem $D = \{z \in \mathbb{C}\,, |z| < 1\}$, to znamená, že existuje holomorfní bijekce mezi U a D, která má holomorfní inverzi.

Důkaz věty najde hledanou funkci jako limitu funkcí, které existují. Je cool hledat tu bijekci metodou pokus omyl. Například zobrazení čtvrt kruhu na horní polorovinu je $((1+z^2)/(1-z^2))^2$.

POZNÁMKY

POZNÁMKY

Z věty o jednoznačnosti vyplývá řada vztahů pro holomorfní funkce, které platí v reálném oboru. Např. holomorfní funkce $\sin^2 z + \cos^2 z$ a funkce 1 se rovnají na reálné přímce a proto se rovnají všude v C.

Další důležitý důsledek věty o jednoznačnosti se týká tzv. analytického pokračování holomorfní funkce. Je-li f holomorfní funkce na otevřené množině G, g, h jsou holomorfní funkce na otevřené množině H, přičemž $G \cap H \neq \emptyset$ a $g = f, h = f$ na $G \cap H$, pak $g = h$ na H.

Funkce f'/f se často nazývá logaritmická derivace funkce f, protože má za primitivní funkci $\log(f(z)) = \log|f(z)| + \mathrm{i} \arg f(z)$.

Funkce f'/f se často nazývá logaritmická derivace funkce f, protože má za primitivní funkci $\log(f(z)) = \log|f(z)| + \mathrm{i}\arg f(z)$.

Uvedený integrál $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ je tedy roven přírůstku argumentu funkce f (vynásobený i) po oběhu bodu z po křivce C (na uzavřené křivce se reálná část logaritmu zruší).

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

PŘÍKLADY

PŘÍKLADY

Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \leq 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

PŘÍKLADY

Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \leq 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

Příklad. Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z}$ je holomorfní funkce pro $\Re z > 0$, jakmile $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolutně konverguje.

Příklad. Ukažte, že v oboru komplexních čísel je součet geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ roven $1/(1-z)$ pro $|z| < 1$. Geometrická řada diverguje pro $|z| > 1$.

Příklad. Najděte rozvoj $1/z$ okolo bodu 1.

Příklad. Najděte rozvoj $1/z$ okolo bodu 1.

Řešení. Napíšeme $1/z$ jako $1/(1-(1-z))$ a použijte geometrickou řadu s kvocientem $1-z$.

Příklad. Najděte rozvoj $1/z$ okolo bodu 1.

Řešení. Napíšeme $1/z$ jako $1/(1-(1-z))$ a použijte geometrickou řadu s kvocientem $1-z$.

Příklad. Najděte rozvoj $\frac{2z}{(z-1)(z+1)}$ okolo bodu 0.

Příklad. Najděte rozvoj $1/z$ okolo bodu 1.

Řešení. Napíšeme $1/z$ jako $1/(1-(1-z))$ a použijte geometrickou řadu s kvocientem $1-z$.

Příklad. Najděte rozvoj $\frac{2z}{(z-1)(z+1)}$ okolo bodu 0.

Řešení. Rozklad $\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}$ je součet geometrických řad $-\sum z^n, \sum(-z)^n$.

Příklad. Integrací vhodných mocninných řad získejte mocninné řady pro $\operatorname{Log}(z+1)$ a $\operatorname{arctg} z$.

Příklad. Najděte mezikruží konvergence Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n/2^{n^2}$.

Příklad. Rozkladem na parciální zlomky a jejich rozvojem v geometrické řady lze získat Laurentovy řady racionálních funkcí. Zjistěte Laurentovu řadu funkce $1/(z^2 - 3z + 2)$ v mezikruží $1 < |z| < 2$.

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Rozkladem na parciální zlomky a jejich rozvojem v geometrické řady lze získat Laurentovy řady racionálních funkcí. Zjistěte Laurentovu řadu funkce $1/(z^2 - 3z + 2)$ v mezikruží $1 < |z| < 2$.

Řešení. Regulární část se získá z parciálního zlomku $1/(z-2)$; hlavní část se získá ze zlomku $1/(z-1)$ úpravou na $(1/z)/(1-(1/z))$ a rozvojem v geometrickou řadu s kvocientem $1/z$.

Příklad. Integrací logaritmické derivace zjistěte počet oběhů následujících funkcí okolo 0:

$$z^n \; (n \in Z)\,, \quad \sin z\,, \quad e^z\,.$$

Příklad. Najděte rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Příklad. Najděte rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Řešení. Začneme tím, že zadanou (racionální) funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

LEKCE35-KRA
konvergence řady funkcí
integrace řady
derivace řady
mocninné řady
poloměr konvergence
rozvoj funkce v řadu
věta o jednoznačnosti
L'Hospitalovo pravidlo
Laurentova řada
regulární část řady
hlavní část řady
otevřené zobrazení
logaritmická derivace
prosté zobrazení
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Najděte rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Řešení. Začneme tím, že zadanou (racionální) funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

Singularity funkce jsou v bodech 0 a 1. Pro $|z-1| < 1$ je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Příklad. Najděte rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Řešení. Začneme tím, že zadanou (racionální) funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

Singularity funkce jsou v bodech 0 a 1. Pro $|z-1| < 1$ je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Na mezikruží $0 < |z-1| < 1$ tedy platí

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$