ŘADY KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ

OBECNÉ VLASTNOSTI

Řady komplexních čísel $\sum z_n$ byly částečně probírány v kapitole o číselných řadách.

Definice říká, že $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$, jestliže z je limita částečných součtů řady $\sum z_n$, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro $m > k$ je $|z - \sum_{n=0}^{m} z_n| < \varepsilon$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ (to je řada reálných čísel a lze na ní použít kritéria konvergence řad reálných čísel).

1. $\sum z_n = z$ právě když $\sum \Re(z_n) = \Re(z)$ a $\sum \Im(z_n) = \Im(z)$.
2. Pokud $\sum z_n$ konverguje, pak $z_n \to 0$ a tedy $\{z_n\}$ je omezená posloupnost.
3. $\sum z_n$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že $|\sum_{n=m}^{m+p} z_n| < \varepsilon$ pro každé $m > k$ a $p \in \mathbb{N}$.
4. $\sum (a z_n + b w_n) = a \sum z_n + b \sum w_n$.
5. Absolutně konvergentní řada je konvergentní.

V kapitole o řadách funkcí byly zmíněny i obecnější funkce než jen reálné funkce jedné reálné proměnné.

Nicméně, u některých vlastností používajících derivaci nebo integrál bylo nutné se omezit jen na reálné funkce. Základní definice však zůstávají stejné.

DEFINICE. Řada $\sum f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f, jestliže konverguje bodově, tj. pro každé $z \in A$ je $\sum f_n(z) = f(z)$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f stejnoměrně, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro každé $m > k$ a každé $z \in A$ je $|f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| < \varepsilon$ (tj. $\lim_m \sup_{z \in A} |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| = 0$).

Následující tvrzení je stejné (i s důkazem) jako odpovídající tvrzení pro reálné funkce.

VĚTA. Nechť řada $\sum f_n$ konverguje k f stejnoměrně na A. Jsou-li všechny funkce f_n (stejnoměrně) spojité, je i f (stejnoměrně) spojitá.

Tvrzení o integraci a derivaci řad komplexních funkcí je však nutné ověřit. Přitom využijeme předchozí vztahy mezi integrací a derivací.

VĚTA. Nechť f_n jsou spojité funkce na křivce C a řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na křivce C. Potom je

$$\sum \int_C f_n(z)\, dz = \int_C \sum f_n(z)\, dz\,.$$

Tvrzení o záměně derivace a součtu řady už tak jednoduché nebylo a bylo třeba přidat nějakou podmínku.

Pro komplexní funkce stačí existence derivace v okolí bodu, tj. holomorfnost:

VĚTA. Nechť řada holomorfních funkcí f_n konverguje stejnoměrně k funkci f na oblasti G. Pak f je holomorfní a $f'(z) = \sum f_n'(z)$.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

MOCNINNÉ ŘADY

Mocninná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ a z je komplexní proměnná. Bod z_0 je střed konvergence řady a v tomto bodě řada vždy konverguje. Připomeňte si důležité tvrzení o konvergenci mocninných řad.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Pak uvedená řada konverguje absolutně pro $|z-z_0| < \rho$, diverguje pro $|z-z_0| > \rho$. Pro libovolné kladné $r < \rho$ konverguje stejnoměrně pro $|z-z_0| \le r$.

Číslo ρ se nazývá poloměr konvergence a $\{z; |z-z_0| < \rho\}$ kruh konvergence dané řady.

Z předchozích tvrzení a podobných úvah z dřívější kapitoly o mocninných řadách nyní vyplývají následující vlastnosti:

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
3. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k $f(z)$ v kruhu konvergence a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
4. Je-li $|z-z_0| < \rho$ a C křivka ležící v kruhu konvergence s počátečním bodem A a koncovým bodem B, pak
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left((B-z_0)^{n+1} - (A-z_0)^{n+1}\right).$$
5. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je Taylorovou řadou funkce $f(z)$ na kruhu konvergence, tj.
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Součet mocninné řady je tedy holomorfní funkce v kruhu konvergence. Platí i opak, že holomorfní funkce lze napsat jako součet holomorfní funkce?

VĚTA. Funkce f je holomorfní v bodě z_0 právě když je v nějakém otevřeném kruhu okolo z_0 součtem své Taylorovy řady.

Pro každý bod z_0, ve kterém je funkce f holomorfní, tedy existuje největší možný otevřený kruh o středu z_0, ve kterém je f součtem mocninné řady.

Poloměr tohoto kruhu je vzdálenost mezi z_0 a nejbližším bodem, v kterém f není holomorfní (a tedy je to ∞ pokud je f celistvá).

Tímto bodem může být i bod, kde f není definována – pak získaná řada může konvergovat na větším kruhu a tedy původní funkci rozšiřuje na větší definiční obor jako holomorfní funkci.

Otázka je, zda takovéto rozšíření je jediné, nebo jich může existovat více. Tuto otázku řeší věta o jednoznačnosti v poslední části této kapitoly.

Poznámky 2 Příklady 2 2

LAURENTOVY ŘADY

Velice často se vyskytují případy, kdy funkce je holomorfní v nějakém kruhu kromě jeho středu.

Pak tuto funkci nelze v tomto kruhu psát jako součet mocninné řady.

Např. funkce $e^{1/z}$ je holomorfní všude kromě bodu 0. Je možné se na tuto funkci dívat jako na funkci holomorfní v kruhu o středu ∞.

Nelze psát $\sum a_n(z-\infty)^n$, ale právě uvedená funkce dává návod na použití řady $\sum a_n \frac{1}{z^n}$, resp. $\sum a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ pro funkci $e^{1/(z-z_0)}$.

Podívejme se tedy na tyto „obrácené mocninné řady".

VĚTA. Pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ existuje číslo $\rho \in [0,+\infty]$ takové, že tato řada konverguje absolutně na množině $K = \{z; |z-z_0| > \rho\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině K.

Platí $\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Z předchozích obecných vět o stejnoměrné konvergenci holomorfních funkcí vyplývají následující tvrzení:

VĚTA. Součet řady $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ je holomorfní funkce a její derivace a primitivní funkce se získá derivováním a integrováním řady člen po členu.

Nyní se tyto řady a mocninné řady použijí dohromady.

DEFINICE. Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se definuje rovností

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}\,.$$

První část $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ Laurentovy řady se nazývá regulární část, druhá se nazývá hlavní část.

Uvědomte si, že definice určuje, co znamená konvergence Laurentovy řady: je to konvergence obou jejích částí.

Kombinací předchozích vět o konvergenci regulární a hlavní části Laurentrovy řady se dostává následující tvrzení.

VĚTA. Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ existují čísla $0 \le r \le R \le +\infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z-z_0| < R\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině M.

Součtem této řady je holomorfní funkce v mezikruží M, její derivace a primitivní funkce se získají derivováním a integrováním řady člen po členu.

Podobně jako u funkcí holomorfních v kruhu je otázka, zda funkce holomorfní v mezikruží lze představit jakou součet Laurentovy řady. Odpověď je kladná:

VĚTA. Nechť $0 \le r < R \le \infty$ a funkce f je holomorfní v mezikruží M o středu z_0 a poloměrech r, R. Potom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

pro nějaká $a_n \in \mathbb{C}$ a všechna $z \in M$.

V důkazu jsme získali vzorec pro výpočet koeficientů a_n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde C je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

Odtud vyplývají odhady pro koeficienty a_n. Za křivku C se vezme kružnice se středem v z_0 a poloměrem ρ:

$$|a_n| \le \frac{\max\{|f(z)|; |z-z_0| = \rho\}}{\rho^n}\,.$$

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

RŮZNÁ POUŽITÍ

Zajímavým a důležitým důsledkem předchozího tvrzení je následující věta o jednoznačnosti.

Ta je značně silnější než tvrzení vyplývající z Cauchyova vzorce, odkud vyplývalo, že dvě funkce holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C se rovnají uvnitř C, jakmile se rovnají na C.

VĚTA. (Věta o jednoznačnosti) Nechť funkce f a g jsou holomorfní v oblasti G a $\{w_n\}$ je posloupnost v G konvergující k $w \in G$. Jestliže $f(w_n) = g(w_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in G$.

Věta o jednoznačnosti má zajímavé důsledky pro přenášení vzorců z reálné analýzy do komplexní analýzy – viz *Otázky*.

Jednou z aplikací rozvoje v řady je obdoba L'Hospitalova pravidla o výpočtu limit pomocí derivací.

VĚTA. (L'Hospitalovo pravidlo) Nechť f a g jsou holomorfní funkce v bodě w a nechť $f(w) = g(w) = 0$. Potom

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to w} \frac{f'(z)}{g'(z)} .$$

Z důkazu vyplývá více, než je formulováno ve větě. Pokud je $k > l$, je uvedená limita podílu rovna 0. Pokud je $k < l$, je limita rovna ∞. Pokud je $k = l$, je limita rovna a_k/b_k.

Následující tvrzení je podobné tvrzení o regulárních zobrazeních uvedenému v části o substituci v integrálu více proměnných. Podobnost není náhodná, nekonstantní holomorfní funkce je regulárním zobrazením.

VĚTA. Každá holomorfní nekonstantní funkce f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina roviny, jakmile je G otevřená podmnožina definičního oboru f.

S regulárními zobrazeními mají souvislost i následující věty. Nejdříve je nutné uvést pomocné tvrzení, které je zajímavé samo o sobě. Připomeňte si, že násobnost (neboli řád) nulového bodu w funkce f je nejmenší přirozené číslo k takové, že $f^{(k)}(w) \neq 0$ (tj. první index koeficientu a_k v Taylorově rozvoji f okolo w, který je nenulový).

LEMMA. Nechť f je holomorfní uvnitř a na uzavřené jednoduché křivce C, nenulová na C a má jen konečný počet nulových bodů uvnitř C. Pak integrál

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z$$

udává počet nulových bodů f uvnitř C, každý braný tolikrát, kolik je jeho násobnost.

VĚTA. Holomorfní a prostá funkce na oblasti má všude nenulovou derivaci.

Předchozí věta se dá obrátit, ale jen lokálně.

VĚTA. Mé-li holomorfní funkce nenulovou derivaci v bodě, je prostá na nějakém jeho okolí.

Obě věty lze vyslovit současně: *Funkce holomorfní v nějakém bodě je prostá v nějakém jeho okolí právě když má v tomto bodě nenulovou derivaci.*

Dalším důsledkem je obdoba derivace inverzní reálné funkce reálné proměnné.

S tvrzením o derivaci inverzní funkce jste se setkali již v kapitole o derivaci, ale bylo nutné předpokládat spojitost inverzní funkce – ta nyní vyplývá z předchozích tvrzení.

VĚTA. Nechť f je holomorfní prostá funkce na oblasti G. Pak inverzní funkce $g = f^{-1}$ je holomorfní na G a $g'(z) = 1/f'(g(z))$.

VĚTA. (Riemannova věta.) Nechť U je jednoduše souvislá otevřená množina v $\mathbb{C}$. Pak U je izomorfní s jednotkovým kruhem $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, to znamená, že existuje holomorfní bijekce mezi U a D, která má holomorfní inverzi.

STANDARDY z kapitoly

ŘADY KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ

OBECNÉ VLASTNOSTI

Definice říká, že $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$, jestliže z je limita částečných součtů řady $\sum z_n$, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro $m > k$ je $|z - \sum_{n=0}^{m} z_n| < \varepsilon$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ (to je řada reálných čísel a lze na ní použít kritéria konvergence řad reálných čísel).

1. $\sum z_n = z$ právě když $\sum \Re(z_n) = \Re(z)$ a $\sum \Im(z_n) = \Im(z)$.
2. Pokud $\sum z_n$ konverguje, pak $z_n \to 0$ a tedy $\{z_n\}$ je omezená posloupnost.
3. $\sum z_n$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že $|\sum_{n=m}^{m+p} z_n| < \varepsilon$ pro každé $m > k$ a $p \in \mathbb{N}$.
4. $\sum (az_n + bw_n) = a \sum z_n + b \sum w_n$.
5. Absolutně konvergentní řada je konvergentní.

DEFINICE. Řada $\sum f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f, jestliže konverguje bodově, tj. pro každé $z \in A$ je $\sum f_n(z) = f(z)$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f stejnoměrně, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro každé $m > k$ a každé $z \in A$ je $|f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| < \varepsilon$ (tj. $\lim_m \sup_{z \in A} |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| = 0$).

VĚTA. Nechť řada $\sum f_n$ konverguje k f stejnoměrně na A. Jsou-li všechny funkce f_n (stejnoměrně) spojité, je i f (stejnoměrně) spojitá.

VĚTA. Nechť f_n jsou spojité funkce na křivce C a řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na křivce C. Potom je

$$\sum \int_C f_n(z)\, dz = \int_C \sum f_n(z)\, dz\,.$$

VĚTA. Nechť řada holomorfních funkcí f_n konverguje stejnoměrně k funkci f na oblasti G. Pak f je holomorfní a $f'(z) = \sum f_n'(z)$.

MOCNINNÉ ŘADY

Mocninná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, kde $z_0 \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}$ a z je komplexní proměnná. Bod z_0 je střed konvergence řady a v tomto bodě řada vždy konverguje.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ a $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Pak uvedená řada konverguje absolutně pro $|z - z_0| < \rho$, diverguje pro $|z - z_0| > \rho$. Pro libovolné kladné $r < \rho$ konverguje stejnoměrně pro $|z - z_0| \le r$.

Číslo ρ se nazývá poloměr konvergence a $\{z; |z - z_0| < \rho\}$ kruh konvergence dané řady.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z - z_0| < \rho$, pak $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
3. Je-li $|z - z_0| < \rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k $f(z)$ v kruhu konvergence a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
4. Je-li $|z - z_0| < \rho$ a C křivka ležící v kruhu konvergence s počátečním bodem A a koncovým bodem B, pak
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\big((B - z_0)^{n+1} - (A - z_0)^{n+1}\big)\,.$$
5. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ je Taylorovou řadou funkce $f(z)$ na kruhu konvergence, tj.
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,.$$

VĚTA. Funkce f je holomorfní v bodě z_0 právě když je v nějakém otevřeném kruhu okolo z_0 součtem své Taylorovy řady.

LAURENTOVY ŘADY

DEFINICE. Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ se definuje rovností
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z - z_0)^n}\,.$$

První část $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ Laurentovy řady se nazývá regulární část, druhá se nazývá hlavní část.

Definice určuje, co znamená konvergence Laurentovy řady: je to konvergence obou jejích částí:

VĚTA. Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ existují čísla $0 \le r \le R \le +\infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z - z_0| < R\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině M.

Součtem této řady je holomorfní funkce v mezikruží M, její derivace a primitivní funkce se získají derivováním a integrováním řady člen po členu.

VĚTA. Nechť $0 \le r < R \le \infty$ a funkce f je holomorfní v mezikruží M o středu z_0 a poloměrech r, R. Potom
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$
pro nějaká $a_n \in \mathbb{C}$ a všechna $z \in M$.

V důkazu jsme získali vzorec pro výpočet koeficientů a_n:
$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,,$$
kde C je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

RŮZNÁ POUŽITÍ

VĚTA. (Věta o jednoznačnosti) Nechť funkce f a g jsou holomorfní v oblasti G a $\{w_n\}$ je posloupnost v G konvergující k $w \in G$. Jestliže $f(w_n) = g(w_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in G$.

VĚTA. Každá holomorfní nekonstantní funkce f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina roviny, jakmile je G otevřená podmnožina definičního oboru f.

LEMMA. Nechť f je holomorfní uvnitř a na uzavřené jednoduché křivce C, nenulová na C a má jen konečný počet nulových bodů uvnitř C. Pak integrál

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z$$

udává počet nulových bodů f uvnitř C, každý braný tolikrát, kolik je jeho násobnost.

VĚTA. Holomorfní a prostá funkce na oblasti má všude nenulovou derivaci.

VĚTA. Mé-li holomorfní funkce nenulovou derivaci v bodě, je prostá na nějakém jeho okolí.

Obě věty lze vyslovit současně: *Funkce holomorfní v nějakém bodě je prostá v nějakém jeho okolí právě když má v tomto bodě nenulovou derivaci.*

VĚTA. Nechť f je holomorfní prostá funkce na oblasti G. Pak inverzní funkce $g = f^{-1}$ je holomorfní na G a $g'(z) = 1/f'(g(z))$.

VĚTA. (Riemannova věta.) Nechť U je jednoduše souvislá otevřená množina v $\mathbb{C}$. Pak U je izomorfní s jednotkovým kruhem $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, to znamená, že existuje holomorfní bijekce mezi U a D, která má holomorfní inverzi.

Z věty o jednoznačnosti vyplývá řada vztahů pro holomorfní funkce, které platí v reálném oboru. Např. holomorfní funkce $\sin^2 z + \cos^2 z$ a funkce 1 se rovnají na reálné přímce a proto se rovnají všude v C.

Další důležitý důsledek věty o jednoznačnosti se týká tzv. analytického pokračování holomorfní funkce. Je-li f holomorfní funkce na otevřené množině G, g, h jsou holomorfní funkce na otevřené množině H, přičemž $G \cap H \neq \emptyset$ a $g = f, h = f$ na $G \cap H$, pak $g = h$ na H.

Funkce f'/f se často nazývá logaritmická derivace funkce f, protože má za primitivní funkci $\log(f(z)) = \log|f(z)| + \mathrm{i} \arg f(z)$.

Uvedený integrál $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z$ je tedy roven přírůstku argumentu funkce f (vynásobený i) po oběhu bodu z po křivce C (na uzavřené křivce se reálná část logaritmu zruší).

Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \leq 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

Příklad. Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z}$ je holomorfní funkce pro $\Re z > 0$, jakmile $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolutně konverguje.

Příklad. Ukažte, že v oboru komplexních čísel je součet geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ roven $1/(1-z)$ pro $|z| < 1$. Geometrická řada diverguje pro $|z| > 1$.

Příklad. Najděte rozvoj $1/z$ okolo bodu 1.

Řešení. Napíšeme $1/z$ jako $1/(1-(1-z))$ a použijte geometrickou řadu s kvocientem $1-z$.

Příklad. Najděte rozvoj $\frac{2z}{(z-1)(z+1)}$ okolo bodu 0.

Řešení. Rozklad $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$ je součet geometrických řad $-\sum z^n, \sum(-z)^n$.

Příklad. Integrací vhodných mocninných řad získejte mocninné řady pro $\mathrm{Log}(z+1)$ a $\mathrm{arctg}\, z$.

Příklad. Najděte mezikruží konvergence Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n/2^{n^2}$.

Příklad. Rozkladem na parciální zlomky a jejich rozvojem v geometrické řady lze získat Laurentovy řady racionálních funkcí. Zjistěte Laurentovu řadu funkce $1/(z^2-3z+2)$ v mezikruží $1<|z|<2$.

Řešení. Regulární část se získá z parciálního zlomku $1/(z-2)$; hlavní část se získá ze zlomku $1/(z-1)$ úpravou na $(1/z)/(1-(1/z))$ a rozvojem v geometrickou řadu s kvocientem $1/z$.

Příklad. Integrací logaritmické derivace zjistěte počet oběhů následujících funkcí okolo 0:

$$z^n \ (n \in Z)\,, \quad \sin z\,, \quad \mathrm{e}^z\,.$$

Příklad. Najděte rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Řešení. Začneme tím, že zadanou (racionální) funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

Singularity funkce jsou v bodech 0 a 1. Pro $|z-1|<1$ je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Na mezikruží $0<|z-1|<1$ tedy platí

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$