SINGULARITY A REZIDUA

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

SINGULARITY A REZIDUA

Zatím to vypadalo, že jsme si definovali šílený komplexní integrál a nakonec jsme se jej naučili počítat.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

SINGULARITY A REZIDUA

Zatím to vypadalo, že jsme si definovali šílený komplexní integrál a nakonec jsme se jej naučili počítat.

Ukážeme, že pomocí křivkového integrálu velmi elegantně spočítáme některé reálné integrály.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

IZOLOVANÉ SINGULARITY

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

IZOLOVANÉ SINGULARITY

Kvůli jednoduššímu vyjadřování se bude v této kapitole předpokládat, že mezikruží je vždy otevřené a neprázdné, tj. ve vyjádření $0 < |z - w| < R$ je vždy $R > 0$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

IZOLOVANÉ SINGULARITY

Kvůli jednoduššímu vyjadřování se bude v této kapitole předpokládat, že mezikruží je vždy otevřené a neprázdné, tj. ve vyjádření $0 < |z - w| < R$ je vždy $R > 0$.

DEFINICE. Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

IZOLOVANÉ SINGULARITY

Kvůli jednoduššímu vyjadřování se bude v této kapitole předpokládat, že mezikruží je vždy otevřené a neprázdné, tj. ve vyjádření $0 < |z - w| < R$ je vždy $R > 0$.

DEFINICE. Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

Singularita v češtině znamená něco jako jedinečnost či výjimečnost.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definice singularity je velmi obecná, a proto se v dalším textu budou vyšetřovat jen speciálnější singulární body, k jejichž vyšetřování pomohou Laurentovy řady.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definice singularity je velmi obecná, a proto se v dalším textu budou vyšetřovat jen speciálnější singulární body, k jejichž vyšetřování pomohou Laurentovy řady.

Definice singularity je velmi obecná, a proto se v dalším textu budou vyšetřovat jen speciálnější singulární body, k jejichž vyšetřování pomohou Laurentovy řady.

DEFINICE. Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce f se nazývá izolovaný singulární bod (stručněji izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus \{w\}$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definice singularity je velmi obecná, a proto se v dalším textu budou vyšetřovat jen speciálnější singulární body, k jejichž vyšetřování pomohou Laurentovy řady.

DEFINICE. Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce f se nazývá izolovaný singulární bod (stručněji izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus \{w\}$.

Takový je například počátek pro funkci $1/z$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li w izolovaný singulární bod funkce f, je f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z - w| < R$ a dá se tam rozvinout v Laurentovu řadu. Pomocí tohoto rozvoje lze singulární bod klasifikovat.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li w izolovaný singulární bod funkce f, je f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z - w| < R$ a dá se tam rozvinout v Laurentovu řadu. Pomocí tohoto rozvoje lze singulární bod klasifikovat.

DEFINICE. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

- odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li w izolovaný singulární bod funkce f, je f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z - w| < R$ a dá se tam rozvinout v Laurentovu řadu. Pomocí tohoto rozvoje lze singulární bod klasifikovat.

DEFINICE. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

- odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;
- pól řádu k ($k \in \mathbb{N}$), jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$;

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li w izolovaný singulární bod funkce f, je f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z - w| < R$ a dá se tam rozvinout v Laurentovu řadu. Pomocí tohoto rozvoje lze singulární bod klasifikovat.

DEFINICE. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

- odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;
- pól řádu k ($k \in \mathbb{N}$), jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$;
- podstatná, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n;

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li w izolovaný singulární bod funkce f, je f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z - w| < R$ a dá se tam rozvinout v Laurentovu řadu. Pomocí tohoto rozvoje lze singulární bod klasifikovat.

DEFINICE. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

- odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;
- pól řádu k ($k \in \mathbb{N}$), jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$;
- podstatná, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n;

Místo „pól řádu 1" se říká častěji jednoduchý pól.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jak se pozná charakter izolované singularity bez nutnosti počítat hlavní část Laurentovy řady?

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jak se pozná charakter izolované singularity bez nutnosti počítat hlavní část Laurentovy řady?

VĚTA. Nechť w je izolovaný singulární bod funkce f.

1. V bodě w je odstranitelná singularita právě když $\lim_{z\to w} f(z) \in \mathbb{C}$.
2. V bodě w je pól právě když $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$.
3. V bodě w je podstatná singularita právě když $\lim_{z\to w} f(z)$ neexistuje.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz.

1. Má-li f ve w odstranitelnou singularity, pak v Laurentově rozvoji f v okolí w chybí hlavní část a Laurentova řada $\sum a_n(z-w)^n$ se redukuje na regulární část, takže $\lim_{z \to w} f(z) = a_0$.

Důkaz.

1. Má-li f ve w odstranitelnou singularity, pak v Laurentově rozvoji f v okolí w chybí hlavní část a Laurentova řada $\sum a_n(z-w)^n$ se redukuje na regulární část, takže $\lim_{z\to w} f(z) = a_0$.

   Je-li $\lim_{z\to w} f(z) = a \in \mathbb{C}$, je f omezená na nějakém okolí bodu w, např. číslem M. Pak pro $n < 0$ je $|a_n| \le M r^{-n}$ pro libovolně malá $r > 0$, takže musí být $a_n = 0$.

Důkaz.

1. Má-li f ve w odstranitelnou singularity, pak v Laurentově rozvoji f v okolí w chybí hlavní část a Laurentova řada $\sum a_n(z-w)^n$ se redukuje na regulární část, takže $\lim_{z\to w} f(z) = a_0$.

   Je-li $\lim_{z\to w} f(z) = a \in \mathbb{C}$, je f omezená na nějakém okolí bodu w, např. číslem M. Pak pro $n < 0$ je $|a_n| \le Mr^{-n}$ pro libovolně malá $r > 0$, takže musí být $a_n = 0$.

2. Má-li f ve w pól řádu k, pak $f(z) = g(z)/(z-w)^k$, kde g je funkce holomorfní ve w. Odtud plyne $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz.

1. Má-li f ve w odstranitelnou singularity, pak v Laurentově rozvoji f v okolí w chybí hlavní část a Laurentova řada $\sum a_n(z-w)^n$ se redukuje na regulární část, takže $\lim_{z \to w} f(z) = a_0$.

   Je-li $\lim_{z\to w} f(z) = a \in \mathbb{C}$, je f omezená na nějakém okolí bodu w, např. číslem M. Pak pro $n < 0$ je $|a_n| \leq M r^{-n}$ pro libovolně malá $r > 0$, takže musí být $a_n = 0$.

   ⬇

2. Má-li f ve w pól řádu k, pak $f(z) = g(z)/(z-w)^k$, kde g je funkce holomorfní ve w. Odtud plyne $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$.

   Je-li $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$, je $g = 1/f$ holomorfní ve w po dodefinování $g(w) = 0$. Tedy je $g(z) = (z-w)^k h(z)$, kde $k \geq 1$ a h je holomorfní ve w a $h(w) \neq 0$. Tudíž je

   $$f(z) = \frac{1}{(z-w)^k} \frac{1}{h(z)},$$

   kde poslední zlomek je holomorfní funkce ve w.

   ⬇

Důkaz.

1. Má-li f ve w odstranitelnou singularity, pak v Laurentově rozvoji f v okolí w chybí hlavní část a Laurentova řada $\sum a_n(z-w)^n$ se redukuje na regulární část, takže $\lim_{z\to w} f(z) = a_0$.

   Je-li $\lim_{z\to w} f(z) = a \in \mathbb{C}$, je f omezená na nějakém okolí bodu w, např. číslem M. Pak pro $n < 0$ je $|a_n| \le Mr^{-n}$ pro libovolně malá $r > 0$, takže musí být $a_n = 0$.

   ⬇

2. Má-li f ve w pól řádu k, pak $f(z) = g(z)/(z-w)^k$, kde g je funkce holomorfní ve w. Odtud plyne $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$.

   Je-li $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$, je $g = 1/f$ holomorfní ve w po dodefinování $g(w) = 0$. Tedy je $g(z) = (z-w)^k h(z)$, kde $k \ge 1$ a h je holomorfní ve w a $h(w) \ne 0$. Tudíž je

   $$f(z) = \frac{1}{(z-w)^k}\frac{1}{h(z)},$$

   kde poslední zlomek je holomorfní funkce ve w.

   ⬇

3. Popis podstatné singularity nyní vyplývá z předchozích dvou popisů, protože podstatná singularita nastane v izolovaném singulárním bodě právě když v tomto bodě není ani pól ani odstranitelná singularita.

◇

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tak jsme si jednotlivé singularity oklasifikovali, charakterizovali a pořád se točíme v kruhu (teda v mezikruží).

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Chování funkce v okolí podstatné singularity w funkce f je složité. Existují aspoň dvě posloupnosti konvergující k w, jejichž funkční hodnoty konvergují k různým číslům. Není příliš obtížné ukázat, že takovéto limity funkčních hodnot pokryjí $\mathbb{C}$ (viz *Otázky*). Podstatně těžší je dokázat následující tvrzení:

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Chování funkce v okolí podstatné singularity w funkce f je složité. Existují aspoň dvě posloupnosti konvergující k w, jejichž funkční hodnoty konvergují k různým číslům. Není příliš obtížné ukázat, že takovéto limity funkčních hodnot pokryjí $\mathbb{C}$ (viz *Otázky*). Podstatně těžší je dokázat následující tvrzení:

VĚTA. (Pickard) Je-li w podstatná singularita funkce f, pak na každém okolí bodu w nabývá f všech hodnot z $\mathbb{C}$ kromě nejvýše jedné.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Chování funkce v okolí podstatné singularity w funkce f je složité. Existují aspoň dvě posloupnosti konvergující k w, jejichž funkční hodnoty konvergují k různým číslům. Není příliš obtížné ukázat, že takovéto limity funkčních hodnot pokryjí $\mathbb{C}$ (viz *Otázky*). Podstatně těžší je dokázat následující tvrzení:

VĚTA. (Pickard) Je-li w podstatná singularita funkce f, pak na každém okolí bodu w nabývá f všech hodnot z $\mathbb{C}$ kromě nejvýše jedné.

A tohle je vrchol. U podstatné singularity nastane totální blázinec.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podstatná singularita je u exponenciály v nekonečnu. A ta jediná hodnota, kterou tam exponenciála nenabývá je nula. Alespoň některé pravdy z reálné analýzy platí i v komplexním světě.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podstatná singularita je u exponenciály v nekonečnu. A ta jediná hodnota, kterou tam exponenciála nenabývá je nula. Alespoň některé pravdy z reálné analýzy platí i v komplexním světě.

To je teda adrenalin. Jen si to zkuste představit. Deformace roviny je opravdu divoká. A neustále se obrazy prohánějí okolo nuly. Minou ji vždy jenom o fous.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

REZIDUA

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

REZIDUA

Nechť funkce f je holomorfní v mezikruží $M = \{z; 0 < |z-w| < R\}$, má tam Laurentův rozvoj $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ a C je jednoduchá uzavřená křivka ležící v M a obsahující w ve svém vnitřku, pak

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C (z-w)^n\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} a_{-1}\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

REZIDUA

Nechť funkce f je holomorfní v mezikruží $M = \{z; 0 < |z - w| < R\}$, má tam Laurentův rozvoj $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ a C je jednoduchá uzavřená křivka ležící v M a obsahující w ve svém vnitřku, pak

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C (z-w)^n\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}\,.$$

Odtud je vidět, že koeficient s indexem -1 v Laurentově rozvoji hraje velkou roli při integraci a proto má svůj název.

REZIDUA

Nechť funkce f je holomorfní v mezikruží $M = \{z; 0 < |z - w| < R\}$, má tam Laurentův rozvoj $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ a C je jednoduchá uzavřená křivka ležící v M a obsahující w ve svém vnitřku, pak

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C (z-w)^n\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}\,.$$

Odtud je vidět, že koeficient s indexem -1 v Laurentově rozvoji hraje velkou roli při integraci a proto má svůj název.

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z - w| < R$. Koeficient s indexem -1 v Laurentově rozvoji funkce f okolo w se nazývá reziduum funkce f v bodě w a značí se $\operatorname{res}_w f$.

A najednou je to jasné jako sluníčko. Integrování se stává fraškou a dovede to i malé dítě. Jenom musí najít reziduum.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A najednou je to jasné jako sluníčko. Integrování se stává fraškou a dovede to i malé dítě. Jenom musí najít reziduum.

Reziduum nemusí být nepatrné. Například funkce $1/z$ má v počátku reziduum 1.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A najednou je to jasné jako sluníčko. Integrování se stává fraškou a dovede to i malé dítě. Jenom musí najít reziduum.

Reziduum nemusí být nepatrné. Například funkce $1/z$ má v počátku reziduum 1.

Ale reziduum v láhvi od rumu je zpravidla nevypitelné.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je zřejmé, že pokud je f holomorfní ve w nebo tam má odstranitelnou singularitu, je $\operatorname{res}_w f = 0$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je zřejmé, že pokud je f holomorfní ve w nebo tam má odstranitelnou singularitu, je $\mathrm{res}_{\,w} f = 0$.

To jsem si myslel. To jednoduché se ani nebude počítat.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z obecné Cauchyovy věty se z předchozí integrace Laurentovy řady dostává následující důležité tvrzení:

Z obecné Cauchyovy věty se z předchozí integrace Laurentovy řady dostává následující důležité tvrzení:

⬇

VĚTA. (Reziduová věta) Nechť f je holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C kromě konečně mnoha bodů $w_1, ..., w_k$ ležících uvnitř C. Pak platí

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_{\,w_i} f\ .$$

⬇

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z obecné Cauchyovy věty se z předchozí integrace Laurentovy řady dostává následující důležité tvrzení:

VĚTA. (Reziduová věta) Nechť f je holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C kromě konečně mnoha bodů $w_1, \ldots, w_k$ ležících uvnitř C. Pak platí

$$\oint_C f(z)\;\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{w_i} f\,.$$

Každé reziduum odpovídá vlastně funkci $1/z$, a ta se při integraci promění v logaritmus. A ten křivkový integrál znamená, že se pohybujeme po "logaritmickém schodišti"a vystoupáme o jedno patro ($2\pi\mathrm{i}$, případně vynásobeno reziduem). A to jde opakovat s jednotlivými póly uvnitř křivky.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Napřed jsem tomu nevěřil, tak jsem tam radši zašel. Fakt je to tak.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro výpočty integrálů pomocí reziduové věty je tedy potřeba umět rezidua vypočítat. Z konstrukce rozvoje f v Laurentovu řadu je znám vzorec

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_r} f(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

kde C_r je vhodná kružnice okolo w. Toto je také jedna z mála možností, jak vypočítat reziduum v podstatné singularitě (další možností je Laurentův rozvoj získaný vhodným postupem z jiné Laurentovy nebo Taylorovy řady).

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro póly je vhodnější postup pomocí limit. Je-li w jednoduchý pól funkce f, je funkce $(z-w)f(z)$ holomorfní ve w a tedy

$$\operatorname{res}_w f = \lim_{z \to w} (z-w) f(z) \,.$$

Pro póly je vhodnější postup pomocí limit. Je-li w jednoduchý pól funkce f, je funkce $(z-w)f(z)$ holomorfní ve w a tedy

$$\operatorname{res}_w f = \lim_{z\to w}(z-w)f(z)\,.$$

Je-li w pól 2.řádu, bude ve w holomorfní funkce $(z-w)^2 f(z)$, ale její limita ve w není reziduum, ale koeficient a_{-2} jejího Laurentova rozvoje. Pokud ale tuto funkci zderivujete a pak provedete limitu, dostane se reziduum.

Pro póly je vhodnější postup pomocí limit. Je-li w jednoduchý pól funkce f, je funkce $(z-w)f(z)$ holomorfní ve w a tedy

$$\operatorname{res}_w f = \lim_{z \to w} (z-w) f(z) \,.$$

Je-li w pól 2.řádu, bude ve w holomorfní funkce $(z-w)^2 f(z)$, ale její limita ve w není reziduum, ale koeficient a_{-2} jejího Laurentova rozvoje. Pokud ale tuto funkci zderivujete a pak provedete limitu, dostane se reziduum.

Obecně dostaneme následující:

VĚTA. (Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to w} \Big((z-w)^k f(z)\Big)^{(k-1)} .$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to w} \left((z-w)^k f(z) \right)^{(k-1)} .$$

⬇

VĚTA. (Pravidlo 2) Nechť f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0$. Je-li $g(w) = 0$, $g'(w) \neq 0$, pak

$$\operatorname{res}_w \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)} .$$

⬇

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to w} \left((z-w)^k f(z)\right)^{(k-1)}.$$

VĚTA. (Pravidlo 2) Nechť f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0$. Je-li $g(w) = 0$, $g'(w) \neq 0$, pak

$$\operatorname{res}_w \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)}.$$

VĚTA. (Pravidlo 3) Je-li h holomorfní ve w a g má jednoduchý pól ve w, pak $\mathrm{r}es_w(gh) = h(w)\mathrm{r}es_w g$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Některé další metody výpočtu reziduí v pólech jsou uvedeny v *Otázkách*.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Některé další metody výpočtu reziduí v pólech jsou uvedeny v *Otázkách*.

Já rezidua miluju.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Některé další metody výpočtu reziduí v pólech jsou uvedeny v *Otázkách*.

Já rezidua miluju.

Já rezidua nemiluju.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

U nekonečna se formálně zavede reziduum trikem.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

U nekonečna se formálně zavede reziduum trikem.

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém okolí nekonečna. Definujeme

$$\mathrm{res}_\infty f = \mathrm{res}_0 \left(\frac{-1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)\right) .$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

U nekonečna se formálně zavede reziduum trikem.

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém okolí nekonečna. Definujeme

$$\operatorname{res}_\infty f = \operatorname{res}_0 \left(\frac{-1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)\right) .$$

Pak je například pro funkci $f(z) = 1/z$ součet všech reziduí v komplexní rovině nula. To nakonec platí pro každou racionální funkci.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

Některé integrály reálných funkcí reálné proměnné lze počítat pomocí reziduové věty.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

Některé integrály reálných funkcí reálné proměnné lze počítat pomocí reziduové věty.

Interval, po kterém se integruje, se rozšíří na jednoduchou uzavřenou křivku v rovině a daná reálná funkce se vhodně rozšíří na komplexní funkci komplexní proměnné.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

Některé integrály reálných funkcí reálné proměnné lze počítat pomocí reziduové věty.

Interval, po kterém se integruje, se rozšíří na jednoduchou uzavřenou křivku v rovině a daná reálná funkce se vhodně rozšíří na komplexní funkci komplexní proměnné.

Postup bude ukázán na integraci přes celé $\mathbb{R}$ a přes interval $[0, 2\pi]$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

Nechť h je reálná funkce reálné proměnné. Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx}$ se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

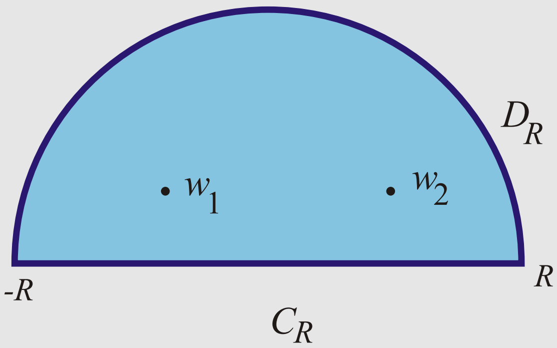
Nechť h je reálná funkce reálné proměnné. Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx}$ se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

Vezme se $R > 0$ a jednoduchá uzavřená křivka C_R, která leží v jedné z polorovin $x \geq 0$ nebo $x \leq 0$ (nechť je to např, první případ) a na ose x je totožná s úsečkou $[-R, R]$ (D_R bude část C_R ležící v otevřené horní polorovině). Může se požadovat, aby $\min\{|z|; z \in D_R\}$ s rostoucím R konvergovalo k ∞ (např. se za D_R bere polokružnice se středem v 0 a poloměrem R).

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

Nechť h je reálná funkce reálné proměnné. Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx}$ se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

Vezme se $R > 0$ a jednoduchá uzavřená křivka C_R, která leží v jedné z polorovin $x \geq 0$ nebo $x \leq 0$ (nechť je to např. první případ) a na ose x je totožná s úsečkou $[-R, R]$ (D_R bude část C_R ležící v otevřené horní polorovině). Může se požadovat, aby $\min\{|z|; z \in D_R\}$ s rostoucím R konvergovalo k ∞ (např. se za D_R bere polokružnice se středem v 0 a poloměrem R).



LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud h je zúžením holomorfní funkce f na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit $w_1, .., w_n$, pak pro dostatečně velká R je

$$\int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k} \mathbf{res}_{\,w_i} f - \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud h je zúžením holomorfní funkce f na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit $w_1, .., w_n$, pak pro dostatečně velká R je

$$\int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_{\,w_i} f - \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_{\,w_i} f - \lim_{R\to\infty}\int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

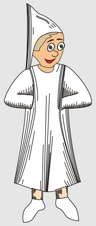
LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud h je zúžením holomorfní funkce f na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit $w_1, .., w_n$, pak pro dostatečně velká R je

$$\int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{res}_{\,w_i} f - \int_{D_R} f(z)\;\mathrm{d}z\,.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{res}_{\,w_i} f - \lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\;\mathrm{d}z\,.$$



Mám radost.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Není nutné brát všechna $R > 0$, stačí neomezenou rostoucí posloupnost R_n, pro kterou je snadné spočítat $\lim_n \int_{D_{R_n}} f(z)\ \mathrm{d}z$.

Není nutné brát všechna $R > 0$, stačí neomezenou rostoucí posloupnost R_n, pro kterou je snadné spočítat $\lim_n \int_{D_{R_n}} f(z)\,\mathrm{d}z$.

To vypadá zajímavě, zkusim to.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejlepším případem je ten, kdy poslední limita je rovna 0. To nastane např. pro některé racionální funkce.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejlepším případem je ten, kdy poslední limita je rovna 0. To nastane např. pro některé racionální funkce.

VĚTA. (TYP I. Integrál z racionální funkce.) Nechť P, Q jsou polynomy stupňů k, n resp., přičemž $n - k > 1$ a Q nemá reálné kořeny. Potom pro racionální funkci $f = \frac{P}{Q}$ platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_{\,w_i} f\ .$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Za D_R se vezme půlkružnice $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi]$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Za D_R se vezme půlkružnice $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi]$.

Pro důkaz $\lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$ se odhadne

$$\Big|\int_{D_R} f(z)\, \mathrm{d}z\Big| \;\le\; R\int_0^\pi \Big|\frac{P(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\Big|\, \mathrm{d}t \le R\int_0^\pi \frac{R^k|a_k + \ldots + a_0/R^k|}{R^n|b_n - \ldots - b_0/R^n|}\, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{R^{n-k-1}}\int_0^\pi \frac{|a_k + \ldots + a_0/R^k|}{|b_n - \ldots - b_0/R^n|}\, \mathrm{d}t\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Za D_R se vezme půlkružnice $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi]$.

Pro důkaz $\lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$ se odhadne

$$\left| \int_{D_R} f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq R \int_0^\pi \left| \frac{P(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} \right| \mathrm{d}t \leq R \int_0^\pi \frac{R^k |a_k + \ldots + a_0/R^k|}{R^n |b_n - \ldots - b_0/R^n|}\, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{R^{n-k-1}} \int_0^\pi \frac{|a_k + \ldots + a_0/R^k|}{|b_n - \ldots - b_0/R^n|}\, \mathrm{d}t\,.$$

Jsou splněny podmínky pro přechod k limitě $R \to +\infty$ za integrálem. Výsledkem celé limity je 0. $\diamond$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Předchozí postup lze použít i na případ, kdy je racionální funkce vynásobená omezenou funkcí, např. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, nebo sice neomezenou funkcí, ale takovou, že limita v $\pm\infty$ této funkce lomené lineární funkcí je 0, např. $\sqrt{|x|}$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Předchozí postup lze použít i na případ, kdy je racionální funkce vynásobená omezenou funkcí, např. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, nebo sice neomezenou funkcí, ale takovou, že limita v $\pm\infty$ této funkce lomené lineární funkcí je 0, např. $\sqrt{|x|}$.

U goniometrických funkcí, např. $\cos x$, bývá vhodné je rozšířit na $\mathbb{C}$ nikoli na $\cos z$, ale na složku mocniny $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$. Výsledkem je pak příslušná složka komplexního výsledku.

Předchozí postup lze použít i na případ, kdy je racionální funkce vynásobená omezenou funkcí, např. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, nebo sice neomezenou funkcí, ale takovou, že limita v $\pm\infty$ této funkce lomené lineární funkcí je 0, např. $\sqrt{|x|}$.

U goniometrických funkcí, např. $\cos x$, bývá vhodné je rozšířit na $\mathbb{C}$ nikoli na $\cos z$, ale na složku mocniny $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$. Výsledkem je pak příslušná složka komplexního výsledku.

Za tím účelem si ukážeme jedno šikovné lemma.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Jordanovo lemma.) Nechť $\rho > 0$, $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ a funkce f je spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > \rho\}$ taková, že

$$\lim_{z \to \infty,\, \arg z \in [\alpha,\beta]} f(z) = 0\,.$$

Pak pro $r > \rho$, $b > 0$ a křivku $\varphi_r(t) = r\, e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$ je

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\varphi_r} f(z)\, e^{ibz}\, \mathrm{d}z = 0\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Jordanovo lemma.) Nechť $\rho > 0$, $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ a funkce f je spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > \rho\}$ taková, že

$$\lim_{z \to \infty,\, \arg z \in [\alpha, \beta]} f(z) = 0\,.$$

Pak pro $r > \rho$, $b > 0$ a křivku $\varphi_r(t) = r\, e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$ je

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\varphi_r} f(z)\, e^{ibz}\, \mathrm{d}z = 0\,.$$

Prostě přes nafukovanou polokružnici jdou integrály z $f(z)\, e^{iz}$ k nule, pokud to f jde k nule. No a ta polokružnice nemusí bejt celá.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Přejdeme k integraci přes t a odhadujeme $I := |\int_\alpha^\beta f(r\,e^{it})\,e^{ib\,r\,e^{it}}\,r\,i\,e^{it}\ \mathrm{d}t| \leq r\ \max_{<\varphi_r>}|f|\ \int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\ \mathrm{d}t$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Přejdeme k integraci přes t a odhadujeme $I \;:= |\int_\alpha^\beta f(r\,e^{it})\,e^{ib\,r\,e^{it}}\,r\,i\,e^{it}\;\mathrm{d}t| \le r\;\max_{<\varphi_r>}|f|\;\int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\;\mathrm{d}t.$

⇓

Funkce $\sin$ je na $[0,\pi/2]$ konkávní, takže tam je $\sin(t) \ge c\,t$, kde $c = 2/\pi$.

⇓

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Přejdeme k integraci přes t a odhadujeme $I := |\int_\alpha^\beta f(r\,e^{it})\,e^{ib\,r\,e^{it}}\,r\,i\,e^{it}\ \mathrm{d}t| \leq r\ \max_{<\varphi_r>}|f|\ \int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\ \mathrm{d}t$.

Funkce $\sin$ je na $[0,\pi/2]$ konkávní, takže tam je $\sin(t)\geq c\,t$, kde $c=2/\pi$.

Máme $\int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^\pi e^{-br\sin t}\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} e^{-br\sin t}\ \mathrm{d}t \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-br\,ct}\ \mathrm{d}t < 2\int_0^{+\infty} e^{-br\,ct}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{br\,c}$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Přejdeme k integraci přes t a odhadujeme $I := |\int_\alpha^\beta f(r\,e^{it})\,e^{ib\,r\,e^{it}}\,r\,i\,e^{it}\ \mathrm{d}t| \leq r\,\max_{<\varphi_r>}|f|\ \int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\ \mathrm{d}t.$

⇓

Funkce $\sin$ je na $[0,\pi/2]$ konkávní, takže tam je $\sin(t) \geq c\,t$, kde $c = 2/\pi$.

⇓

Máme $\int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^\pi e^{-br\sin t}\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} e^{-br\sin t}\ \mathrm{d}t \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-br\,ct}\ \mathrm{d}t < 2\int_0^{+\infty} e^{-br\,ct}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{br\,c}.$

⇓

Odtud $I \leq \frac{2}{b\,c}\max_{<\varphi_r>}|f| \to 0.$ $\diamond$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (TYP II. Integrál z racionální funkce vynásobené $\cos$ nebo $\sin$) Nechť Q je racionální funkce taková, že nemá v $\mathbb{R}$ pól a pro $z \to \infty$ je $Q(z) = O(z^{-1})$ (t.j. stupeň jmenovatele alespoň o 1 větší než stupeň čitatele). Pro $b > 0$ označme $f(z) = Q(z)\, e^{ibz}$. Pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\cos(bx)\ \mathrm{d}x = \Re\left(2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \operatorname*{res}_a f\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\sin(bx)\ \mathrm{d}x = \Im\left(2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \operatorname*{res}_a f\right)$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Volíme stejnou integrační cestu φ_r jako v důkazu u typu I, integrujeme ale funkci f (nikoli funkci $Q(z)\cos bz$ nebo $Q(z)\sin bz$).

Něco se musí prostě vědět.

Důkaz. Volíme stejnou integrační cestu φ_r jako v důkazu u typu I, integrujeme ale funkci f (nikoli funkci $Q(z)\cos bz$ nebo $Q(z)\sin bz$).

$\boxed{\text{Něco se musí prostě vědět.}}$

Podle reziduové věty je $\int_{-r}^{+r} f + \int_{\varphi_r} f = 2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Volíme stejnou integrační cestu φ_r jako v důkazu u typu I, integrujeme ale funkci f (nikoli funkci $Q(z)\cos bz$ nebo $Q(z)\sin bz$).

Něco se musí prostě vědět.

Podle reziduové věty je $\int_{-r}^{+r} f + \int_{\varphi_r} f = 2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f$.

Pro $r \to +\infty$ je limita druhého integrálu rovna nule (Jordanovo lemma), limita prvního integrálu je $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)(\cos bx + i\sin bx)\ \mathrm{d}x$. $\diamond$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Integruje-li se funkce na intervalu $(0, +\infty)$, dá se přejít k sudé funkci na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a použít předchozí postup.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Integruje-li se funkce na intervalu $(0, +\infty)$, dá se přejít k sudé funkci na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a použít předchozí postup.

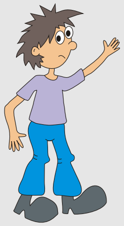
Někdy je nutné se vyhnout bodu 0, např. u funkce $\sin x/x$ – viz *Příklady*.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Říká "někdy", "můžeme", "lze použít", . . .

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Říká "někdy", "můžeme", "lze použít", ...



...ale myslí něco jiného, já vím.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

(TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu.)

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

(TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu.)

Přechodem ke křivkovému integrálu se dají spočítat i některé integrály goniometrických funkcí přes omezené intervaly. Jako příklad lze vzít

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{3 + \sin x}\,.$$

(TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu.)

Přechodem ke křivkovému integrálu se dají spočítat i některé integrály goniometrických funkcí přes omezené intervaly. Jako příklad lze vzít

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{3+\sin x}\,.$$

Stačí zvolit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, čímž se z uvedeného integrálu stane integrál

$$\int_{|z|=1} \frac{2\ \mathrm{d}z}{z^2+6\mathbf{i}z-1}\,,$$

který se již spočte pomocí reziduové věty.

(TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu.)

Přechodem ke křivkovému integrálu se dají spočítat i některé integrály goniometrických funkcí přes omezené intervaly. Jako příklad lze vzít

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x} \,.$$

Stačí zvolit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, čímž se z uvedeného integrálu stane integrál

$$\int_{|z|=1} \frac{2\,\mathrm{d}z}{z^2+6\mathrm{i}z-1} \,,$$

který se již spočte pomocí reziduové věty.

To byla ale náhodička, co?

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Nechť $Q(a,b)$ je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$ v ní nedělíme nulou. Pak funkce

$$T(z) := Q\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right)/(iz)$$

jedné komplexní proměnné z je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\ \mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \sum_{|a|<1,\, T(a)=\infty} \operatorname*{res}_a T\,.$$

VĚTA. (TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Nechť $Q(a,b)$ je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro $a,b\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2=1$ v ní nedělíme nulou. Pak funkce

$$T(z) := Q\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)/(iz)$$

jedné komplexní proměnné z je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\ \mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \sum_{|a|<1,\, T(a)=\infty} \operatorname*{res}_a T\,.$$

Důkaz. Pro $\varphi(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ uvažujeme křivkový integrál $\int_\varphi T(z)\ \mathrm{d}z$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Nechť $Q(a,b)$ je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$ v ní nedělíme nulou. Pak funkce

$$T(z) := Q\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right)/(iz)$$

jedné komplexní proměnné z je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\ \mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \sum_{|a|<1,\, T(a)=\infty} \operatorname*{res}_a T\,.$$

Důkaz. Pro $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ uvažujeme křivkový integrál $\int_\varphi T(z)\ \mathrm{d}z$.

Použití reziduové věty nám dá pravou stranu rovnosti, zatímco integrace přes reálný parametr t (podle definice křivkového integrálu) dá levou stranu. ◇

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZNÁMKY

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Meromorfní funkce. Některé vlastnosti holomorfních funkcí na jednoduše souvislých oblastech lze dokázat i za slabších podmínek pro tzv. meromorfní funkce:

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Meromorfní funkce. Některé vlastnosti holomorfních funkcí na jednoduše souvislých oblastech lze dokázat i za slabších podmínek pro tzv. meromorfní funkce:

Nechť G je otevřená množina a P je uzavřená diskrétní podmnožina G. Funkce holomorfní v $G \setminus P$, která má v bodech z P póly, se nazývá meromorfní v G.

Poznámky 1 :

Meromorfní funkce. Některé vlastnosti holomorfních funkcí na jednoduše souvislých oblastech lze dokázat i za slabších podmínek pro tzv. meromorfní funkce:

Nechť G je otevřená množina a P je uzavřená diskrétní podmnožina G. Funkce holomorfní v $G \setminus P$, která má v bodech z P póly, se nazývá meromorfní v G.

Podmínka na P znamená, že každý bod P má okolí neobsahující žádné další body P a že body z P nemají hromadný bod, kromě nekonečna. Je-li P omezená množina, musí být P konečná.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Meromorfní funkce. Některé vlastnosti holomorfních funkcí na jednoduše souvislých oblastech lze dokázat i za slabších podmínek pro tzv. meromorfní funkce:

Nechť G je otevřená množina a P je uzavřená diskrétní podmnožina G. Funkce holomorfní v $G \setminus P$, která má v bodech z P póly, se nazývá meromorfní v G.

Podmínka na P znamená, že každý bod P má okolí neobsahující žádné další body P a že body z P nemají hromadný bod, kromě nekonečna. Je-li P omezená množina, musí být P konečná.

Zřejmě součin a lineární kombinace meromorfních funkcí je meromorfní funkce (vše na G). O něco složitější je dokázat, že i jisté podíly a složení meromorfních funkcí jsou meromorfní.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Meromorfní funkce. Některé vlastnosti holomorfních funkcí na jednoduše souvislých oblastech lze dokázat i za slabších podmínek pro tzv. meromorfní funkce:

⬇

Nechť G je otevřená množina a P je uzavřená diskrétní podmnožina G. Funkce holomorfní v $G \setminus P$, která má v bodech z P póly, se nazývá meromorfní v G.

⬇

Podmínka na P znamená, že každý bod P má okolí neobsahující žádné další body P a že body z P nemají hromadný bod, kromě nekonečna. Je-li P omezená množina, musí být P konečná.

⬇

Zřejmě součin a lineární kombinace meromorfních funkcí je meromorfní funkce (vše na G). O něco složitější je dokázat, že i jisté podíly a složení meromorfních funkcí jsou meromorfní.

⬇

Zkuste ukázat, že pro meromorfní funkce platí věta o jednoznačnosti a také obdoba Liouvillovy věty: *Nechť f je meromorfní v $\mathbb{C}$, která má konečně mnoho pólů a $\lim_{z\to\infty} f(z)$ existuje. Pak f je racionální funkce.* V důkazu se používá fakt, že má-li f pól ve w a h je hlavní část Laurentova rozvoje f okolo w, má $f - h$ odstranitelnou singularitu ve w. Odečtením všech takových hlavních čístí (i případně v bodě ∞) vznikne omezená holomorfní, a tedy konstantní, funkce v $\mathbb{C}$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec poznámek 1.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

V uvedeném použití na výpočet reálných integrálů se předpokládalo, že ve zkoumané polorovině leželo jen konečně mnoho singulárních bodů. Stačí, aby uvnitř křivek C_R leželo jen konečně singulárních bodů, i když v celé polorovině je jich nekonečně mnoho. Postup je stejný, jen se ve výsledku dostane součet nekonečné řady reziduí.

Poznámky 3 :

V uvedeném použití na výpočet reálných integrálů se předpokládalo, že ve zkoumané polorovině leželo jen konečně mnoho singulárních bodů. Stačí, aby uvnitř křivek C_R leželo jen konečně singulárních bodů, i když v celé polorovině je jich nekonečně mnoho. Postup je stejný, jen se ve výsledku dostane součet nekonečné řady reziduí.

Pomocí tohoto postupu lze někdy vhodně spočítat součet nekonečné řady, pokud známe hodnotu integrálu.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšíření Gama funkce na komplexní čísla.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšíření Gama funkce na komplexní čísla.

Podle definice je $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ pro $x > 0$. Dejte nyní za x komplexní číslo z, použijte pro obecnou mocninu její hlavní větev a zjistíte, že $\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ konverguje, jakmile $\Re(z) > 0$. V této polorovině je holomorfní (derivace za integrálem).

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšíření Gama funkce na komplexní čísla.

Podle definice je $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pro $x > 0$. Dejte nyní za x komplexní číslo z, použijte pro obecnou mocninu její hlavní větev a zjistíte, že $\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ konverguje, jakmile $\Re(z) > 0$. V této polorovině je holomorfní (derivace za integrálem).

Podle vztahu $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ se rozšíří definice Gama funkce na celou rovinu kromě bodů $0, -1, -2, -3, \ldots$. Tato rozšířená funkce je holomorfní, v bodech $0, -1, -2, -3, \ldots$ jsou jednoduché póly a r$es_{-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$ (ověřte).

Rozšíření Gama funkce na komplexní čísla.

Podle definice je $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ pro $x > 0$. Dejte nyní za x komplexní číslo z, použijte pro obecnou mocninu její hlavní větev a zjistíte, že $\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ konverguje, jakmile $\Re(z) > 0$. V této polorovině je holomorfní (derivace za integrálem).

Podle vztahu $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ se rozšíří definice Gama funkce na celou rovinu kromě bodů $0, -1, -2, -3, \ldots$. Tato rozšířená funkce je holomorfní, v bodech $0, -1, -2, -3, \ldots$ jsou jednoduché póly a r$es_{-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$ (ověřte).

Rovnost $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ platí všude kromě $z \in \mathbb{Z}$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ζ funkce.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ζ funkce.

V předchozí kapitole v *Příkladech 1* bylo ukázáno, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \leq 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ζ funkce.

V předchozí kapitole v *Příkladech 1* bylo ukázáno, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \leq 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

Použijte rovnosti (ověřte)

$$\frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-nu} u^{z-1}\, \mathrm{d}u$$

a dostanete po úpravě vzorec

$$\zeta z = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{\mathrm{e}^u - 1}\, \mathrm{d}u\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ζ **funkce.**

V předchozí kapitole v *Příkladech 1* bylo ukázáno, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \leq 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

Použijte rovnosti (ověřte)

$$\frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nu} u^{z-1}\, \mathrm{d}u$$

a dostanete po úpravě vzorec

$$\zeta z = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{\mathrm{e}^u - 1}\, \mathrm{d}u\,.$$

Odtud plyne rovnost

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^1 \frac{u^{z-1}}{\mathrm{e}^u - 1}\, \mathrm{d}u + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{\mathrm{e}^u - 1}\, \mathrm{d}u\,,$$

kde poslední integrál je celistvou funkcí.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ζ **funkce.**

V předchozí kapitole v *Příkladech 1* bylo ukázáno, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \leq 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

Použijte rovnosti (ověřte)

$$\frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nu} u^{z-1} \, \mathrm{d}u$$

a dostanete po úpravě vzorec

$$\zeta z = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{\mathrm{e}^u - 1} \, \mathrm{d}u \, .$$

Odtud plyne rovnost

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^1 \frac{u^{z-1}}{\mathrm{e}^u - 1} \, \mathrm{d}u + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{\mathrm{e}^u - 1} \, \mathrm{d}u \, ,$$

kde poslední integrál je celistvou funkcí.

Zbývající integrál konverguje všude v $\mathbb{C}$ kromě bodů $1, 0, -1, -3, -5, \ldots$, kde jsou jednoduché póly (důkaz lze provést rozložením funkce $\frac{u}{\mathrm{e}^u-1}$ v řadu $1-u/2+\sum_1^\infty a_k u^{2k}$, jejím vynásobením u^{z-2} a integrováním).

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

jednoduché póly (důkaz lze provést rozložením funkce $\frac{u}{e^u-1}$ v řadu $1-u/2+\sum_1^\infty a_k u^{2k}$, jejím vynásobením u^{z-2} a integrováním).

Odtud vyplývá, že ζ lze rozšířit na holomorfní funkci všude kromě bodu 1, kde má jednoduchý pól s reziduem 1, v bodech -2, -4, -6, ... jsou jednoduché nulové hodnoty. Dále má ζ nekonečně mnoho nulových hodnot v pásu $0 < \Re(z) < 1$ (Riemannova hypotéze tvrdí, že tyto nulové hodnoty všechny leží na přímce $\Re(z) = 1/2$).

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

jednoduché póly (důkaz lze provést rozložením funkce $\frac{u}{\mathrm{e}^u-1}$ v řadu $1-u/2+\sum_1^\infty a_k u^{2k}$, jejím vynásobením u^{z-2} a integrováním).

⬇

Odtud vyplývá, že ζ lze rozšířit na holomorfní funkci všude kromě bodu 1, kde má jednoduchý pól s reziduem 1, v bodech -2, -4, -6, ... jsou jednoduché nulové hodnoty. Dále má ζ nekonečně mnoho nulových hodnot v pásu $0 < \Re(z) < 1$ (Riemannova hypotéze tvrdí, že tyto nulové hodnoty všechny leží na přímce $\Re(z) = 1/2$).

⬇

Existuje zajímavá souvislost ζ funkce s prvočísly:

$$\zeta(z) = \Pi_{n=1}^\infty \frac{1}{1-p_n^{-z}}.,$$

kde p_n je n-té prvočíslo. Rovnost platí pro $\Re(z) > 1$. Důkaz není obtížný; zlomek v součinu je součet geometrické řady a roznásobením konečně mnoha těchto řad (tj. částečný součin) se ověří, že se získají zlomky $1/n^z$.

⬇

jednoduché póly (důkaz lze provést rozložením funkce $\frac{u}{e^u-1}$ v řadu $1-u/2+\sum_1^\infty a_k u^{2k}$, jejím vynásobením u^{z-2} a integrováním).

Odtud vyplývá, že ζ lze rozšířit na holomorfní funkci všude kromě bodu 1, kde má jednoduchý pól s reziduem 1, v bodech $-2, -4, -6, \ldots$ jsou jednoduché nulové hodnoty. Dále má ζ nekonečně mnoho nulových hodnot v pásu $0 < \Re(z) < 1$ (Riemannova hypotéze tvrdí, že tyto nulové hodnoty všechny leží na přímce $\Re(z) = 1/2$).

Existuje zajímavá souvislost ζ funkce s prvočísly:

$$\zeta(z) = \Pi_{n=1}^\infty \frac{1}{1-p_n^{-z}}.,$$

kde p_n je n-té prvočíslo. Rovnost platí pro $\Re(z) > 1$. Důkaz není obtížný; zlomek v součinu je součet geometrické řady a roznásobením konečně mnoha těchto řad (tj. částečný součin) se ověří, že se získají zlomky $1/n^z$.

Právě jsme se za pochodu dozvěděli to, čím se mnoho lidí trápilo celý život.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec poznámek 3.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

PŘÍKLADY

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Ukažte pomocí Laurentovy řady i pomocí limity, že $\sin z/z$ má v 0 odstranitelnou singularitu.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte pomocí Laurentovy řady i pomocí limity, že $e^{1/z}$ má v 0 podstatnou singularitu.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ukažte pomocí Laurentovy řady i pomocí limity, že $1/z^3$ má v 0 pól řádu 3.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ukažte, že $e^{1/z}$ má v libovolném mezikruží $0 < |z-w| < R$ za obor hodnot $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Najděte všechny singularity následujících funkcí a určete jejich charakter:

$$\frac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4}\,,\ z\cos\frac{1}{z}\,,\ \frac{z}{\cos z}\,,\ \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+\pi^2}\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Ukažte, že funkce $\sin(\pi/z)$ má v 0 neizolovanou singularitu.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Jaké jsou singulární body funkce Log?

Konec příkladů 1.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

1. V *Příkladě 5* předchozí části jste určili charakter singulárních bodů následujících funkcí:

$$\frac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4}\,,\; z\cos\frac{1}{z}\,,\; \frac{z}{\cos z}\,,\; \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+\pi^2}\,.$$

Příklady 2 :

1. V *Příkladě 5* předchozí části jste určili charakter singulárních bodů následujících funkcí:

$$\frac{1-e^{2z}}{z^4}\,,\, z\cos\frac{1}{z}\,,\,\frac{z}{\cos z}\,,\,\frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,.$$

Najděte příslušná rezidua.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte rezidua funkcí $\mathrm{e}^{(1/z)}$, $\mathrm{e}^{1/z^2)}$ v bodě 0, který je jejich podstatnou singularitou.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Pomocí reziduové věty spočtěte následující integrály:

$$\int_{|z-2|=2} \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\,\mathrm{d}z\,, \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{\sinh(2z)}\,, \int_{|z|=1} z\mathrm{e}^{1/z}\,.$$

Konec příkladů 2.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

1. Spočtěte integrály

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{dx}\,, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(3x)}{x^4+4}\;\mathrm{d}x\,, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}\,\mathrm{dx}\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Přechodem k sudé funkci spočtěte

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{dx}\,,\int_0^\infty \frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{dx}\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Spočtěte integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. [Návod: Místo polokružnice vezměte obdélník nad intervalem $[-R, R]$ výšky 2π.]

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Spočtěte integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx}$. [Návod: Místo polokružnice vezměte obdélník nad intervalem $[-R, R]$ výšky 2π.]

Kam na to ty lidi chodí . . .

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Spočtěte integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. [Návod: Místo polokružnice vezměte obdélník nad intervalem $[-R, R]$ výšky 2π.]

Kam na to ty lidi chodí . . .

Pozor, takové věci daly moc práce vymyslit. Zde jsou za odměnu. To je přece jasné!

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}\,.$$

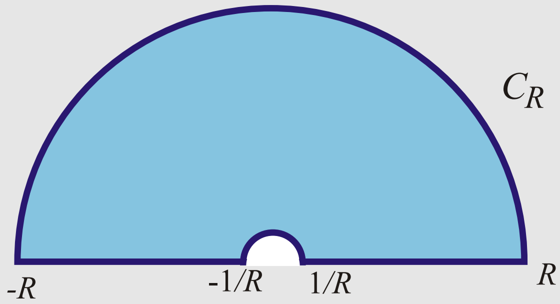
Použijte křivku C_R složenou z intervalů $[-R,-1/R]$, $[1/R,R]$ a půlkružnic $z = Re^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,\pi)$ a $z = e^{\mathrm{i}t}/R$, $t \in [0,\pi)$ – tato poslední půlkružnice opačně orientovaná.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}\,.$$

Použijte křivku C_R složenou z intervalů $[-R,-1/R]$, $[1/R,R]$ a půlkružnic $z=Re^{\mathrm{i}t}$, $t\in[0,\pi)$ a $z=e^{\mathrm{i}t}/R$, $t\in[0,\pi)$ – tato poslední půlkružnice opačně orientovaná.

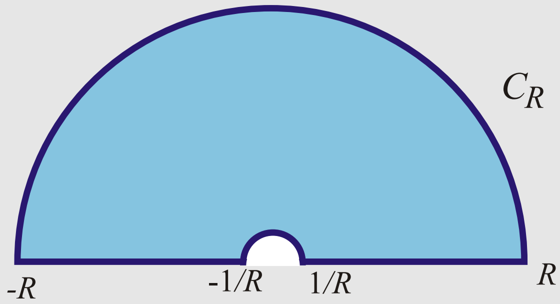


LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}\,.$$

Použijte křivku C_R složenou z intervalů $[-R,-1/R]$, $[1/R,R]$ a půlkružnic $z = Re^{\mathrm{i}t}, t \in [0,\pi)$ a $z = e^{\mathrm{i}t}/R, t \in [0,\pi)$ – tato poslední půlkružnice opačně orientovaná.



U nuly se dostane mínus půl rezidua. To se u jednoduchého pólu smí, jinde ne!!! Zkusil jsem.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Dopočtěte integrál $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{3+\sin x}$ metodou uvedenou v textu a podobným způsobem spočtěte

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{1-2a\sin x+a^2}$$

pro $0 \le a \le 1$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{kx}}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{dx}$$

pro $k \in (0,1)$. Použijte stejný obdélník jako v příkladu 3.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{kx}}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{dx}$$

pro $k \in (0,1)$. Použijte stejný obdélník jako v příkladu 3.

Oba integrály přes dlouhé strany obdélníku dejte dohromady, zbylé dva konvergují k 0. Výsledek je $\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

6. Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{kx}}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{dx}$$

pro $k \in (0,1)$. Použijte stejný obdélník jako v příkladu 3.

Oba integrály přes dlouhé strany obdélníku dejte dohromady, zbylé dva konvergují k 0. Výsledek je $\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Substitucí $\mathrm{e}^{x} = t$ tak získáte $\int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t$ známý z teorie Gama funkce.

Konec příkladů 3.

OTÁZKY

Otázky 1 :

1. Ukažte, že f má ve w odstranitelnou singularitu právě když je f omezená na nějakém mezikruží $0 < |z - w| < R$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte, že f má ve w pól řádu n právě když existuje mezikruží $0 < |z-w| < R$ a konstanty K, L takové, že pro všechna z z uvedeného mezikruží je

$$\frac{K}{|z-w|^n} \le |f(z)| \le \frac{L}{|z-w|^n}\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ukažte, že f má ve w pól řádu n právě když $1/f$ má ve w nulový bod řádu (násobnosti) n.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ukažte, že f má ve w podstatnou singularitu právě když na každém mezikruží $0 < |z - w| < R$ nabývá f hodnot tvořící hustou množinu v $\mathbb{C}$. [Návod: kdyby funkce f nenabývala žádné hodnoty z nějakého okolí bodu $q \in \mathbb{C}$, pak $1/(f - q)$ má v q odstranitelnou singularitu.]

5. Nechť f je holomorfní v bodě w. Pak funkce $f(z)/(z-w)$ má ve w jednoduchý pól pokud $f(w) \neq 0$ a má ve w odstranitelnou singularitu, pokud $f(w) = 0$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Racionální funkce má pouze konečný počet singulárních bodů, a to jen póly (a je tedy meromorfní funkcí).

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Ukažte, že je-li f holomorfní v mezikruží $0 < |z - w| < R$ a ve w má nulový bod nebo pól, pak logaritmická derivace f'/f má ve w jednoduchý pól.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

8. Dokažte zobecnění věty o logaritmické derivaci:*Nechť f je holomorfní uvnitř a na jednoduché uzavřené křivce C až na konečný počet pólů $p_1, \ldots, p_n$ řádů $k_1, \ldots, k_n$ uvnitř C. Je-li f nenulová na C a má-li f konečný počet nulových bodů $q_1, \ldots, q_m$ násobností $l_1, \ldots, l_m$, potom*

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d} = \sum_{i=1}^{m} l_i - \sum_{j=1}^{n} k_j\,.$$

Konec otázek 1.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Dokažte tvrzení o výpočtu rezidua v pólech pomocí limity příslušné derivace:

VĚTA. (Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to w} \left((z-w)^k f(z)\right)^{(k-1)} .$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Dokažte následující tvrzení používaná pro výpočet rezidua v jednoduchém pólu:

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Dokažte následující tvrzení používaná pro výpočet rezidua v jednoduchém pólu:

VĚTA. (Pravidlo 2) Nechť f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0$. Je-li $g(w) = 0$, $g'(w) \neq 0$, pak

$$\operatorname{res}_w \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)}\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Dokažte následující tvrzení používaná pro výpočet rezidua v jednoduchém pólu:

VĚTA. (Pravidlo 2) Nechť f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0$. Je-li $g(w) = 0, g'(w) \neq 0$, pak

$$\operatorname{res}_w \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)}\,.$$

VĚTA. (Pravidlo 3) Je-li h holomorfní ve w a g má jednoduchý pól ve w, pak r$es_w(gh) = h(w)$r$es_w g$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Obdoba předchozích tvrzení pro pól 2.řádu je komplikovanější: *Pokud* f, g *jsou holomorfní v bodě* w *a* $f(w) \neq 0, g(w) = g'(w) = 0, g''(w) \neq 0$*, pak*

$$\textit{res}_{\,w}\frac{f}{g} = 2\frac{f'(w)}{g''(w)} \Big/ \frac{2}{3}\frac{f(w)g'''(w)}{g'^2(w)}\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Nechť f má vlastnost $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ na svém definičním oboru. Je-li w pól řádu k funkce f, pak i $\overline{w}$ je pól řádu k funkce f a platí $\mathrm{r}es_{\overline{w}} f = \overline{\mathrm{r}es_w f}$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Ukažte, že $\mathrm{r}es_w\frac{f'}{f} = \pm k$, kde k je násobnost nulového bodu w (a pak platí znaménko +) nebo řád pólu w (a pak platí znaménko -).+

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Ukažte, že platí tvrzení

VĚTA. Nechť f má jednoduchý pól v z_0, nechť $\varphi_r(t) = z_0 + re^{it}$ pro $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Pak

$$\lim_{r\to 0} \int_{\varphi_r} f(z)\ \mathrm{d}z = \alpha \cdot i \cdot \mathrm{res}_{z_0} f\ .$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Ukažte, že platí tvrzení

VĚTA. Nechť f má jednoduchý pól v z_0, nechť $\varphi_r(t) = z_0 + re^{it}$ pro $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Pak

$$\lim_{r\to 0} \int_{\varphi_r} f(z)\ \mathrm{d}z = \alpha \cdot i \cdot \mathrm{res}_{z_0} f\ .$$

Prostě jednoduché póly jde obcházet libovolne blízko a dostaneme příslušný kousek rezidua.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Ukažte, že platí tvrzení

VĚTA. Nechť f má jednoduchý pól v z_0, nechť $\varphi_r(t) = z_0 + re^{it}$ pro $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Pak

$$\lim_{r\to 0} \int_{\varphi_r} f(z)\ \mathrm{d}z = \alpha \cdot i \cdot \mathrm{res}_{z_0} f\ .$$

Prostě jednoduché póly jde obcházet libovolne blízko a dostaneme příslušný kousek rezidua.

Důkaz. Napíšeme si Laurentovu řadu a integrujeme první člen výpočtem, zbývající členy dávají holomorfní funkci, která je spojitá a integrály z ní jdou k nule. ◇

Konec otázek 2.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

CVIČENÍ

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Cvičení 1 :

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Hodnotu rezidua v bodě 1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z),$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Hodnotu rezidua v bodě 1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z),$$

což je po dosazení

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Cvičení 1 :

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Hodnotu rezidua v bodě 1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z),$$

což je po dosazení

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Hodnotu rezidua v bodě -1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z\to -1} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \Big((z+1)^k f^{(}z) \Big) .$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hodnotu rezidua v bodě -1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z\to -1} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left((z+1)^k f^{(}z) \right).$$

Tedy,

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z\to -1} \frac{1}{1!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left((z+1)^2 \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) = -\frac{1}{4}.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 1.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte hodnoty reziduí následující funkce

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte hodnoty reziduí následující funkce

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}.$$

Řešení. Funkce f má jedinou singularitu, a to v nule, neboť tam není definovaná. Jelikož neexistuje limita funkce f v nule, je tato singularita podstatná.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte hodnoty reziduí následující funkce

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}.$$

⬇

Řešení. Funkce f má jedinou singularitu, a to v nule, neboť tam není definovaná. Jelikož neexistuje limita funkce f v nule, je tato singularita podstatná.

⬇

Reziduum funkce f v 0 určíme z Laurentovy řady.

⬇

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte hodnoty reziduí následující funkce

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}.$$

⬇

Řešení. Funkce f má jedinou singularitu, a to v nule, neboť tam není definovaná. Jelikož neexistuje limita funkce f v nule, je tato singularita podstatná.

⬇

Reziduum funkce f v 0 určíme z Laurentovy řady.

⬇

Rozvoj exponenciely je

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

⬇

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte hodnoty reziduí následující funkce

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}.$$

Řešení. Funkce f má jedinou singularitu, a to v nule, neboť tam není definovaná. Jelikož neexistuje limita funkce f v nule, je tato singularita podstatná.

Reziduum funkce f v 0 určíme z Laurentovy řady.

Rozvoj exponenciely je

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Odtud dostaneme rozvoj pro f :

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots .$$

Cvičení 2 :

Příklad. Spočítejte hodnoty reziduí následující funkce

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}.$$

Řešení. Funkce f má jedinou singularitu, a to v nule, neboť tam není definovaná. Jelikož neexistuje limita funkce f v nule, je tato singularita podstatná.

Reziduum funkce f v 0 určíme z Laurentovy řady.

Rozvoj exponenciely je

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Odtud dostaneme rozvoj pro f :

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots .$$

Hodnota rezidua je koeficient u $\frac{1}{z}$, což je -1.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 2.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_{\varphi} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},$$

kde φ je záporně orientovaná kružnice $\{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| = 1\}$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},$$

kde φ je záporně orientovaná kružnice $\{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| = 1\}$.

Řešení. K výpočtu integrálu použijeme reziduovou větu. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

má singularity v bodech

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}, \\ z_2 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}, \\ z_3 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}, \\ z_4 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}, \end{aligned}$$

což jsou póly prvního řádu.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},$$

kde φ je záporně orientovaná kružnice $\{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| = 1\}$.

Řešení. K výpočtu integrálu použijeme reziduovou větu. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

má singularity v bodech

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}, \\ z_2 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}, \\ z_3 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}, \\ z_4 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}, \end{aligned}$$

což jsou póly prvního řádu.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zajímají nás ale pouze body z_1, z_4, protože pouze ty leží ve vnitřku φ. Rezidua v těchto pólech mají hodnoty

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z_1} f &= \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}},\\ \operatorname{res}_{z_4} f &= \frac{1}{(z_4-z_2)(z_4-z_3)(z_4-z_1)} = \frac{-1+i}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Zajímají nás ale pouze body z_1, z_4, protože pouze ty leží ve vnitřku φ. Rezidua v těchto pólech mají hodnoty

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_1} f &= \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{-1 - i}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{res}_{z_4} f &= \frac{1}{(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_1)} = \frac{-1 + i}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Podle reziduové věty je proto integrál roven

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^4} = -2\pi i \left(\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_4} f\right) = -2\pi i \frac{-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

Zajímají nás ale pouze body z_1, z_4, protože pouze ty leží ve vnitřku φ. Rezidua v těchto pólech mají hodnoty

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z_1} f &= \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{-1 - i}{4\sqrt{2}},\\ \operatorname{res}_{z_4} f &= \frac{1}{(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_1)} = \frac{-1 + i}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Podle reziduové věty je proto integrál roven

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^4} = -2\pi i \left(\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_4} f\right) = -2\pi i \frac{-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

Všimněte si znaménka mínus při použití reziduové věty. To je kvůli záporné orientaci křivky φ.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zajímají nás ale pouze body z_1, z_4, protože pouze ty leží ve vnitřku φ. Rezidua v těchto pólech mají hodnoty

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z_1} f &= \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}},\\ \operatorname{res}_{z_4} f &= \frac{1}{(z_4-z_2)(z_4-z_3)(z_4-z_1)} = \frac{-1+i}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Podle reziduové věty je proto integrál roven

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = -2\pi i\left(\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_4} f\right) = -2\pi i \frac{-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

Všimněte si znaménka mínus při použití reziduové věty. To je kvůli záporné orientaci křivky φ.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

To jsem věděl!

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 3.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Spočítejte integrál
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}.$$

Řešení. Místo zadaného reálného integrálu budeme počítat integrál komplexní funkce komlexní proměnné:
$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^6+1},$$
kde C je křivka sestávající z úsečky $[-R, R]$ na reálné ose a obvodu Γ horního polokruhu $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R, \ Im\, z > 0\}$, která je orientována kladně.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}.$$

Řešení. Místo zadaného reálného integrálu budeme počítat integrál komplexní funkce komlexní proměnné:

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^6+1},$$

kde C je křivka sestávající z úsečky $[-R, R]$ na reálné ose a obvodu Γ horního polokruhu $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R, \ Im\ z > 0\}$, která je orientována kladně.

Funkce

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1}$$

má šest jednoduchých singularit v bodech: $e^{\frac{\pi i}{6}}, \ e^{\frac{3\pi i}{6}}, \ e^{\frac{5\pi i}{6}}, \ e^{\frac{7\pi i}{6}}, \ e^{\frac{9\pi i}{6}}, \ e^{\frac{11\pi i}{6}}$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}.$$

Řešení. Místo zadaného reálného integrálu budeme počítat integrál komplexní funkce komlexní proměnné:

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^6+1},$$

kde C je křivka sestávající z úsečky $[-R, R]$ na reálné ose a obvodu Γ horního polokruhu $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R, \ Im\, z > 0\}$, která je orientována kladně.

Funkce

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1}$$

má šest jednoduchých singularit v bodech: $e^{\frac{\pi i}{6}}, \ e^{\frac{3\pi i}{6}}, \ e^{\frac{5\pi i}{6}}, \ e^{\frac{7\pi i}{6}}, \ e^{\frac{9\pi i}{6}}, \ e^{\frac{11\pi i}{6}}$.

Ale pouze body $z_1 = e^{\frac{\pi i}{6}}, \ z_2 = e^{\frac{3\pi i}{6}}, \ z_3 = e^{\frac{5\pi i}{6}}$ leží uvnitř křivky C.

Cvičení 4 :

Příklad. Spočítejte integrál
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}.$$

Řešení. Místo zadaného reálného integrálu budeme počítat integrál komplexní funkce komlexní proměnné:
$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^6+1},$$
kde C je křivka sestávající z úsečky $[-R, R]$ na reálné ose a obvodu Γ horního polokruhu $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R, \ Im\, z > 0\}$, která je orientována kladně.

Funkce
$$f(z) = \frac{1}{z^6+1}$$
má šest jednoduchých singularit v bodech: $e^{\frac{\pi i}{6}}, \ e^{\frac{3\pi i}{6}}, \ e^{\frac{5\pi i}{6}}, \ e^{\frac{7\pi i}{6}}, \ e^{\frac{9\pi i}{6}}, \ e^{\frac{11\pi i}{6}}$.

Ale pouze body $z_1 = e^{\frac{\pi i}{6}}, \ z_2 = e^{\frac{3\pi i}{6}}, \ z_3 = e^{\frac{5\pi i}{6}}$ leží uvnitř křivky C.

Nyní spočítáme rezidua pro tyto póly, abychom mohli použít reziduovou větu.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z_1} f &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{x^6+1} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}},\\
\operatorname{res}_{z_2} f &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_2}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}},\\
\operatorname{res}_{z_3} f &= \lim_{z\to z_3}(z-z_3)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_3}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{6}}.
\end{aligned}
$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z_1} f &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{x^6+1} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}},\\
\operatorname{res}_{z_2} f &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_2}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}},\\
\operatorname{res}_{z_3} f &= \lim_{z\to z_3}(z-z_3)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_3}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{6}}.
\end{aligned}
$$

Při výpočtu jsme použili komplexní l'Hospitalovo pravidlo.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z_1} f &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{x^6+1} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}},\\
\operatorname{res}_{z_2} f &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_2}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}},\\
\operatorname{res}_{z_3} f &= \lim_{z\to z_3}(z-z_3)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_3}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{6}}.
\end{aligned}
$$

Při výpočtu jsme použili komplexní l'Hospitalovo pravidlo.

Z reziduové věty dostáváme hodnotu integrálu:

$$
\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^6+1} = 2\pi i\left(\frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}} + \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}} + \frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{6}}\right) = \frac{2}{3}\pi.
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z_1} f &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{x^6+1} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}},\\
\operatorname{res}_{z_2} f &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_2}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}},\\
\operatorname{res}_{z_3} f &= \lim_{z\to z_3}(z-z_3)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_3}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{6}}.
\end{aligned}
$$

Při výpočtu jsme použili komplexní l'Hospitalovo pravidlo.

Z reziduové věty dostáváme hodnotu integrálu:

$$
\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^6+1} = 2\pi i\left(\frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}} + \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}} + \frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{6}}\right) = \frac{2}{3}\pi.
$$

Z toho plyne

$$
\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} + \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^6+1} = \frac{2}{3}\pi.
$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z_1} f &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{1}{x^6 + 1} = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{\frac{-5\pi i}{6}}, \\
\operatorname{res}_{z_2} f &= \lim_{z \to z_2} (z - z_2) \frac{1}{z^6 + 1} = \lim_{z \to z_2} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{\frac{-5\pi i}{2}}, \\
\operatorname{res}_{z_3} f &= \lim_{z \to z_3} (z - z_3) \frac{1}{z^6 + 1} = \lim_{z \to z_3} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{\frac{-25\pi i}{6}}.
\end{aligned}
$$

Při výpočtu jsme použili komplexní l'Hospitalovo pravidlo.

Z reziduové věty dostáváme hodnotu integrálu:

$$
\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^6 + 1} = 2\pi i \left(\frac{1}{6} e^{\frac{-5\pi i}{6}} + \frac{1}{6} e^{\frac{-5\pi i}{2}} + \frac{1}{6} e^{\frac{-25\pi i}{6}} \right) = \frac{2}{3}\pi.
$$

Z toho plyne

$$
\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^6 + 1} + \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^6 + 1} = \frac{2}{3}\pi.
$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Provedeme-li limitní přechod $R \to \infty$, bude druhý integrál na levé straně nulový a proto

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} = \frac{2}{3}\pi.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Provedeme-li limitní přechod $R \to \infty$, bude druhý integrál na levé straně nulový a proto

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} = \frac{2}{3}\pi.$$

Ze sudosti funkce f máme celkový výsledek

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 4.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

LEKCE36-KRZ

singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Řešení. Provedeme substituci $z = e^{i\theta}$, po níž bude

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \cos 3\theta = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, \qquad \mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Spočítejte integrál
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Řešení. Provedeme substituci $z = e^{i\theta}$, po níž bude
$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}, \qquad \cos 3\theta = \frac{z^3+z^{-3}}{2}, \qquad \mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta.$$

Dostaneme tak
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_C \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5-4\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = -\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z,$$
kde C je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Řešení. Provedeme substituci $z = e^{i\theta}$, po níž bude

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \cos 3\theta = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, \qquad \mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta.$$

Dostaneme tak

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_C \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5 - 4\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = -\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku.

Integrand má ve vnitřku této kružnice dvě singularity: pól 3. řádu v 0 a jednoduchý pól v 1/2.

Cvičení 5 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Řešení. Provedeme substituci $z = e^{i\theta}$, po níž bude

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \cos 3\theta = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, \qquad \mathrm{d}z = iz\, \mathrm{d}\theta.$$

Dostaneme tak

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta = \int_C \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5 - 4\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{iz} = -\frac{1}{2i} \int_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)}\, \mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku.

Integrand má ve vnitřku této kružnice dvě singularity: pól 3. řádu v 0 a jednoduchý pól v 1/2.

Rezidua v těchto bodech mají hodnoty

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_{0} f &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{z^3(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = \frac{21}{8},\\
\operatorname{res}_{1/2} f &= \lim_{z\to 1/2} \frac{(z-1/2)(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = -\frac{65}{24}
\end{aligned}
$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rezidua v těchto bodech mají hodnoty

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_0 f &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{z^3(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = \frac{21}{8},\\
\operatorname{res}_{1/2} f &= \lim_{z\to 1/2} \frac{(z-1/2)(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = -\frac{65}{24}
\end{aligned}
$$

A hledaný integrál je:

$$
-\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2i}2\pi i\left(\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right) = \frac{\pi}{12}.
$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 5.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

Řešení. Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice C. Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

Řešení. Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice C. Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

Uvědomíme si ale, že nepotřebujeme znát jednotlivá rezidua, nýbrž jejich součet, který je (až na znaménko) roven hodnotě rezidua v nekonečnu.

Cvičení 6 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

⬇

Řešení. Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice C. Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

⬇

Uvědomíme si ale, že nepotřebujeme znát jednotlivá rezidua, nýbrž jejich součet, který je (až na znaménko) roven hodnotě rezidua v nekonečnu.

⬇

Pro $|z|>1$ je

$$\frac{1}{z^{10}+1}=\frac{1}{z^{10}}\frac{1}{1+z^{-10}}=\frac{1}{z^{10}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-10n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{-10n}.$$

⬇

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

Řešení. Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice C. Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

Uvědomíme si ale, že nepotřebujeme znát jednotlivá rezidua, nýbrž jejich součet, který je (až na znaménko) roven hodnotě rezidua v nekonečnu.

Pro $|z|>1$ je

$$\frac{1}{z^{10}+1} = \frac{1}{z^{10}}\frac{1}{1+z^{-10}} = \frac{1}{z^{10}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-10n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} z^{-10n}.$$

Takže reziduum integrandu v nekonečnu je 0, a tedy i hledaný integrál má hodnotu 0.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Prostě když se u počítání přemýšlí, tak se nemusí tolik počítat!

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 6.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

STANDARDY z kapitoly

SINGULARITY A REZIDUA

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

STANDARDY z kapitoly

SINGULARITY A REZIDUA

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

IZOLOVANÉ SINGULARITY

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

IZOLOVANÉ SINGULARITY

DEFINICE. Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

IZOLOVANÉ SINGULARITY

DEFINICE. Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

DEFINICE. Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce f se nazývá izolovaný singulární bod (stručněji izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus \{w\}$.

IZOLOVANÉ SINGULARITY

DEFINICE. Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

DEFINICE. Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce f se nazývá izolovaný singulární bod (stručněji izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus \{w\}$.

DEFINICE. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

- odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

IZOLOVANÉ SINGULARITY

⬇

DEFINICE. Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

⬇

DEFINICE. Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce f se nazývá izolovaný singulární bod (stručněji izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus \{w\}$.

⬇

DEFINICE. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

- odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;
- pól řádu k ($k \in \mathbb{N}$), jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$;

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

IZOLOVANÉ SINGULARITY

DEFINICE. Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

DEFINICE. Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce f se nazývá izolovaný singulární bod (stručněji izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus \{w\}$.

DEFINICE. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

- odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;
- pól řádu k ($k \in \mathbb{N}$), jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$;
- podstatná, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n;

IZOLOVANÉ SINGULARITY

DEFINICE. Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

DEFINICE. Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce f se nazývá izolovaný singulární bod (stručněji izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus \{w\}$.

DEFINICE. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

- odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;
- pól řádu k ($k \in \mathbb{N}$), jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$;
- podstatná, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n;

Místo „pól řádu 1" se říká častěji jednoduchý pól.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť w je izolovaný singulární bod funkce f.

1. V bodě w je odstranitelná singularita právě když $\lim_{z \to w} f(z) \in \mathbb{C}$.
2. V bodě w je pól právě když $\lim_{z \to w} f(z) = \infty$.
3. V bodě w je podstatná singularita právě když $\lim_{z \to w} f(z)$ neexistuje.

VĚTA. Nechť w je izolovaný singulární bod funkce f.

1. V bodě w je odstranitelná singularita právě když $\lim_{z \to w} f(z) \in \mathbb{C}$.
2. V bodě w je pól právě když $\lim_{z \to w} f(z) = \infty$.
3. V bodě w je podstatná singularita právě když $\lim_{z \to w} f(z)$ neexistuje.

VĚTA. (Pickard) Je-li w podstatná singularita funkce f, pak na každém okolí bodu w nabývá f všech hodnot z $\mathbb{C}$ kromě nejvýše jedné.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

REZIDUA

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

REZIDUA

Nechť funkce f je holomorfní v mezikruží $M = \{z; 0 < |z - w| < R\}$, má tam Laurentův rozvoj $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - w)^n$ a C je jednoduchá uzavřená křivka ležící v M a obsahující w ve svém vnitřku, pak

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C (z - w)^n\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

REZIDUA

Nechť funkce f je holomorfní v mezikruží $M = \{z; 0 < |z - w| < R\}$, má tam Laurentův rozvoj $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ a C je jednoduchá uzavřená křivka ležící v M a obsahující w ve svém vnitřku, pak

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C (z-w)^n\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}\,.$$

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z - w| < R$. Koeficient s indexem -1 v Laurentově rozvoji funkce f okolo w se nazývá reziduum funkce f v bodě w a značí se $\operatorname{res}_w f$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Reziduová věta) Nechť f je holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C kromě konečně mnoha bodů $w_1, ..., w_k$ ležících uvnitř C. Pak platí

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{w_i} f\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z konstrukce rozvoje f v Laurentovu řadu je znám vzorec

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

kde C_r je vhodná kružnice okolo w.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to w} \Big((z-w)^k f(z) \Big)^{(k-1)} .$$

VĚTA. (Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to w} \left((z-w)^k f(z)\right)^{(k-1)} .$$

VĚTA. (Pravidlo 2) Nechť f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0$. Je-li $g(w) = 0$, $g'(w) \neq 0$, pak

$$\operatorname{res}_w \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)} .$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak

$$\text{res}_w f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to w} \left((z-w)^k f(z) \right)^{(k-1)} .$$

VĚTA. (Pravidlo 2) Nechť f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0$. Je-li $g(w) = 0$, $g'(w) \neq 0$, pak

$$\text{res}_w \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)} .$$

VĚTA. (Pravidlo 3) Je-li h holomorfní ve w a g má jednoduchý pól ve w, pak $\text{res}_w(gh) = h(w)\text{res}_w g$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém okolí nekonečna. Definujeme

$$\operatorname{res}_\infty f = \operatorname{res}_0 \left(\frac{-1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)\right) .$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém okolí nekonečna. Definujeme

$$\operatorname{res}_\infty f = \operatorname{res}_0 \left(\frac{-1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)\right) .$$

Pak je například pro funkci $f(z) = 1/z$ součet všech reziduí v komplexní rovině nula. To nakonec platí pro každou racionální funkci.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

Nechť h je reálná funkce reálné proměnné. Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx}$ se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

Nechť h je reálná funkce reálné proměnné. Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx}$ se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

Vezme se $R > 0$ a jednoduchá uzavřená křivka C_R, která leží v jedné z polorovin $x \geq 0$ nebo $x \leq 0$ (nechť je to např, první případ) a na ose x je totožná s úsečkou $[-R, R]$ (D_R bude část C_R ležící v otevřené horní polorovině). Může se požadovat, aby $\min\{|z|; z \in D_R\}$ s rostoucím R konvergovalo k ∞ (např. se za D_R bere polokružnice se středem v 0 a poloměrem R).

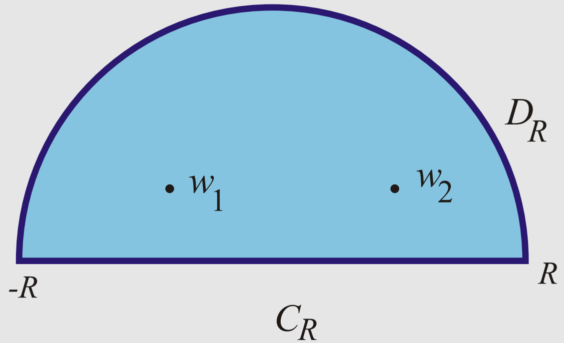
LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

Nechť h je reálná funkce reálné proměnné. Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx}$ se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

Vezme se $R > 0$ a jednoduchá uzavřená křivka C_R, která leží v jedné z polorovin $x \geq 0$ nebo $x \leq 0$ (nechť je to např, první případ) a na ose x je totožná s úsečkou $[-R, R]$ (D_R bude část C_R ležící v otevřené horní polorovině). Může se požadovat, aby $\min\{|z|; z \in D_R\}$ s rostoucím R konvergovalo k ∞ (např. se za D_R bere polokružnice se středem v 0 a poloměrem R).



LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud h je zúžením holomorfní funkce f na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit $w_1, .., w_n$, pak pro dostatečně velká R je

$$\int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k} \mathbf{res}_{\,w_i} f - \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud h je zúžením holomorfní funkce f na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit $w_1, .., w_n$, pak pro dostatečně velká R je

$$\int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathbf{i}\sum_{i=1}^{k} \mathbf{res}_{\,w_i} f - \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathbf{i}\sum_{i=1}^{k} \mathbf{res}_{\,w_i} f - \lim_{R\to\infty}\int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud h je zúžením holomorfní funkce f na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit $w_1, .., w_n$, pak pro dostatečně velká R je

$$\int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k} \mathbf{res}_{\,w_i} f - \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k} \mathbf{res}_{\,w_i} f - \lim_{R\to\infty}\int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Není nutné brát všechna $R > 0$, stačí neomezenou rostoucí posloupnost R_n, pro kterou je snadné spočítat $\lim_n \int_{D_{R_n}} f(z)\ \mathrm{d}z$.

Pokud h je zúžením holomorfní funkce f na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit $w_1, .., w_n$, pak pro dostatečně velká R je

$$\int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{res}_{\,w_i} f - \int_{D_R} f(z)\;\mathrm{d}z\,.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{res}_{\,w_i} f - \lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\;\mathrm{d}z\,.$$

Není nutné brát všechna $R > 0$, stačí neomezenou rostoucí posloupnost R_n, pro kterou je snadné spočítat $\lim_n \int_{D_{R_n}} f(z)\;\mathrm{d}z$.

Nejlepším případem je ten, kdy poslední limita je rovna 0. To nastane např. pro některé racionální funkce.

VĚTA. (TYP I. Integrál z racionální funkce.) Nechť P, Q jsou polynomy stupňů k, n resp., přičemž $n - k > 1$ a Q nemá reálné kořeny. Potom pro racionální funkci $f = \frac{P}{Q}$ platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{w_i} f \,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Za D_R se vezme půlkružnice $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi]$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Za D_R se vezme půlkružnice $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi]$.

Pro důkaz $\lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ se odhadne

$$\Big|\int_{D_R} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \;\le\; R\int_0^\pi \Big|\frac{P(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\Big|\,\mathrm{d}t \le R\int_0^\pi \frac{R^k|a_k + \ldots + a_0/R^k|}{R^n|b_n - \ldots - b_0/R^n|}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{R^{n-k-1}}\int_0^\pi \frac{|a_k + \ldots + a_0/R^k|}{|b_n - \ldots - b_0/R^n|}\,\mathrm{d}t\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Za D_R se vezme půlkružnice $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi]$.

Pro důkaz $\lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$ se odhadne

$$\Big| \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z \Big| \ \le\ R \int_0^{\pi} \Big| \frac{P(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} \Big|\ \mathrm{d}t \le R \int_0^{\pi} \frac{R^k |a_k + ... + a_0/R^k|}{R^n |b_n - ... - b_0/R^n|}\ \mathrm{d}t$$
$$= \ \frac{1}{R^{n-k-1}} \int_0^{\pi} \frac{|a_k + ... + a_0/R^k|}{|b_n - ... - b_0/R^n|}\ \mathrm{d}t\,.$$

Jsou splněny podmínky pro přechod k limitě $R \to +\infty$ za integrálem. Výsledkem celé limity je 0. $\diamond$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Jordanovo lemma.) Nechť $\rho > 0$, $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ a funkce f je spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > \rho\}$ taková, že

$$\lim_{z \to \infty,\, \arg z \in [\alpha, \beta]} f(z) = 0\,.$$

Pak pro $r > \rho$, $b > 0$ a křivku $\varphi_r(t) = r\, e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$ je

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\varphi_r} f(z)\, e^{ibz}\, \mathrm{d}z = 0\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Jordanovo lemma.) Nechť $\rho > 0$, $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ a funkce f je spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > \rho\}$ taková, že

$$\lim_{z \to \infty,\, \arg z \in [\alpha, \beta]} f(z) = 0\,.$$

Pak pro $r > \rho$, $b > 0$ a křivku $\varphi_r(t) = r\, e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$ je

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\varphi_r} f(z)\, e^{ibz}\, \mathrm{d}z = 0\,.$$

Prostě přes nafukovanou polokružnici jdou integrály z $f(z)\, e^{iz}$ k nule, pokud to f jde k nule. No a ta polokružnice nemusí bejt celá.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Přejdeme k integraci přes t a odhadujeme $I := |\int_\alpha^\beta f(r\,e^{it})\,e^{ib\,r\,e^{it}}\,r\,i\,e^{it}\ \mathrm{d}t| \leq r\ \max_{<\varphi_r>}|f|\ \int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\ \mathrm{d}t$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Přejdeme k integraci přes t a odhadujeme $I := |\int_\alpha^\beta f(r\,e^{it})\,e^{ib\,r\,e^{it}}\,r\,i\,e^{it}\ \mathrm{d}t| \le r\ \max_{<\varphi_r>}|f|\ \int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\ \mathrm{d}t$.

Funkce $\sin$ je na $[0,\pi/2]$ konkávní, takže tam je $\sin(t) \ge c\,t$, kde $c = 2/\pi$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Přejdeme k integraci přes t a odhadujeme $I := |\int_\alpha^\beta f(r\,e^{it})\,e^{ib\,r\,e^{it}}\,r\,i\,e^{it}\;\mathrm{d}t| \leq r\,\max_{<\varphi_r>}|f|\;\int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\;\mathrm{d}t$.

⬇

Funkce $\sin$ je na $[0,\pi/2]$ konkávní, takže tam je $\sin(t)\geq c\,t$, kde $c=2/\pi$.

⬇

Máme $\int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\;\mathrm{d}t \leq \int_0^\pi e^{-br\sin t}\;\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} e^{-br\sin t}\;\mathrm{d}t \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-br\,ct}\;\mathrm{d}t < 2\int_0^{+\infty} e^{-br\,ct}\;\mathrm{d}t = \frac{2}{br\,c}$.

⬇

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Přejdeme k integraci přes t a odhadujeme $I := |\int_\alpha^\beta f(r\,e^{it})\,e^{ib\,r\,e^{it}}\,r\,i\,e^{it}\;\mathrm{d}t| \le r\,\max_{<\varphi_r>}|f|\;\int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\;\mathrm{d}t$.

Funkce $\sin$ je na $[0,\pi/2]$ konkávní, takže tam je $\sin(t) \ge c\,t$, kde $c = 2/\pi$.

Máme $\int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\;\mathrm{d}t \le \int_0^\pi e^{-br\sin t}\;\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} e^{-br\sin t}\;\mathrm{d}t \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-br\,ct}\;\mathrm{d}t < 2\int_0^{+\infty} e^{-br\,ct}\;\mathrm{d}t = \frac{2}{br\,c}$.

Odtud $I \le \frac{2}{b\,c}\,\max_{<\varphi_r>}|f| \to 0$. ◇

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (TYP II. Integrál z racionální funkce vynásobené $\cos$ nebo $\sin$) Nechť Q je racionální funkce taková, že nemá v $\mathbb{R}$ pól a pro $z \to \infty$ je $Q(z) = O(z^{-1})$ (t.j. stupeň jmenovatele alespoň o 1 větší než stupeň čitatele). Pro $b > 0$ označme $f(z) = Q(z)\, e^{ibz}$. Pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \cos(bx) \; \mathrm{d}x = \Re \left(2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \operatorname*{res}_a f \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \sin(bx) \; \mathrm{d}x = \Im \left(2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \operatorname*{res}_a f \right)$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Volíme stejnou integrační cestu φ_r jako v důkazu u typu I, integrujeme ale funkci f (nikoli funkci $Q(z)\cos bz$ nebo $Q(z)\sin bz$).

Něco se musí prostě vědět.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Volíme stejnou integrační cestu φ_r jako v důkazu u typu I, integrujeme ale funkci f (nikoli funkci $Q(z)\cos bz$ nebo $Q(z)\sin bz$).

Něco se musí prostě vědět.

Podle reziduové věty je $\int_{-r}^{+r} f + \int_{\varphi_r} f = 2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f$.

Důkaz. Volíme stejnou integrační cestu φ_r jako v důkazu u typu I, integrujeme ale funkci f (nikoli funkci $Q(z)\cos bz$ nebo $Q(z)\sin bz$).

Něco se musí prostě vědět.

Podle reziduové věty je $\int_{-r}^{+r} f + \int_{\varphi_r} f = 2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f$.

Pro $r \to +\infty$ je limita druhého integrálu rovna nule (Jordanovo lemma), limita prvního integrálu je $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)(\cos bx + i\sin bx)\ \mathrm{d}x$. $\diamond$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Integruje-li se funkce na intervalu $(0, +\infty)$, dá se přejít k sudé funkci na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a použít předchozí postup.

Integruje-li se funkce na intervalu $(0, +\infty)$, dá se přejít k sudé funkci na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a použít předchozí postup.

Někdy je nutné se vyhnout bodu 0, např. u funkce $\sin x/x$ – viz *Příklady*.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

(TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu.)

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

(TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu.)

Přechodem ke křivkovému integrálu se dají spočítat i některé integrály goniometrických funkcí přes omezené intervaly. Jako příklad lze vzít

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{3+\sin x}\,.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

(TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu.)

Přechodem ke křivkovému integrálu se dají spočítat i některé integrály goniometrických funkcí přes omezené intervaly. Jako příklad lze vzít

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{3 + \sin x}\,.$$

Stačí zvolit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, čímž se z uvedeného integrálu stane integrál

$$\int_{|z|=1} \frac{2\,\mathrm{d}z}{z^2 + 6\mathbf{i}z - 1}\,,$$

který se již spočte pomocí reziduové věty.

VĚTA. (TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Nechť $Q(a,b)$ je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro $a,b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2=1$ v ní nedělíme nulou. Pak funkce

$$T(z) := Q\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)/(iz)$$

jedné komplexní proměnné z je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\ \mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \sum_{|a|<1,\, T(a)=\infty} \operatorname*{res}_a T\,.$$

VĚTA. (TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Nechť $Q(a,b)$ je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro $a,b\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2=1$ v ní nedělíme nulou. Pak funkce

$$T(z) := Q\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)/(iz)$$

jedné komplexní proměnné z je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t,\sin t)\ \mathrm{d}t = 2\pi i\cdot \sum_{|a|<1,\,T(a)=\infty} \operatorname*{res}_a T\,.$$

Důkaz. Pro $\varphi(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ uvažujeme křivkový integrál $\int_\varphi T(z)\ \mathrm{d}z$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Nechť $Q(a,b)$ je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro $a,b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2=1$ v ní nedělíme nulou. Pak funkce

$$T(z) := Q\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)/(iz)$$

jedné komplexní proměnné z je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\ \mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \sum_{|a|<1,\, T(a)=\infty} \operatorname*{res}_a T\,.$$

Důkaz. Pro $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ uvažujeme křivkový integrál $\int_\varphi T(z)\ \mathrm{d}z$.

Použití reziduové věty nám dá pravou stranu rovnosti, zatímco integrace přes reálný parametr t (podle definice křivkového integrálu) dá levou stranu. ◇

POZNÁMKY

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZNÁMKY

VĚTA. Nechť f má jednoduchý pól v z_0, nechť $\varphi_r(t) = z_0 + re^{it}$ pro $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Pak

$$\lim_{r\to 0} \int_{\varphi_r} f(z)\ \mathrm{d}z = \alpha \cdot i \cdot \mathrm{res}_{z_0} f\ .$$

POZNÁMKY

VĚTA. Nechť f má jednoduchý pól v z_0, nechť $\varphi_r(t) = z_0 + re^{it}$ pro $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Pak

$$\lim_{r \to 0} \int_{\varphi_r} f(z) \, \mathrm{d}z = \alpha \cdot i \cdot \mathrm{res}_{z_0} f \, .$$

Prostě jednoduché póly jde obcházet libovolne blízko a dostaneme příslušný kousek rezidua.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZNÁMKY

VĚTA. Nechť f má jednoduchý pól v z_0, nechť $\varphi_r(t) = z_0 + re^{it}$ pro $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Pak

$$\lim_{r\to 0} \int_{\varphi_r} f(z)\ \mathrm{d}z = \alpha \cdot i \cdot \mathrm{res}_{z_0} f\ .$$

Prostě jednoduché póly jde obcházet libovolne blízko a dostaneme příslušný kousek rezidua.

Důkaz. Napíšeme si Laurentovu řadu a integrujeme první člen výpočtem, zbývající členy dávají holomorfní funkci, která je spojitá a integrály z ní jdou k nule. ◇

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšíření Gama funkce na komplexní čísla.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšíření Gama funkce na komplexní čísla.

Podle definice je $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ pro $x > 0$. Dejte nyní za x komplexní číslo z, použijte pro obecnou mocninu její hlavní větev a zjistíte, že $\int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ konverguje, jakmile $\Re(z) > 0$. V této polorovině je holomorfní (derivace za integrálem).

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozšíření Gama funkce na komplexní čísla.

Podle definice je $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ pro $x > 0$. Dejte nyní za x komplexní číslo z, použijte pro obecnou mocninu její hlavní větev a zjistíte, že $\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ konverguje, jakmile $\Re(z) > 0$. V této polorovině je holomorfní (derivace za integrálem).

Podle vztahu $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ se rozšíří definice Gama funkce na celou rovinu kromě bodů $0, -1, -2, -3, ...$. Tato rozšířená funkce je holomorfní, v bodech $0, -1, -2, -3, ...$ jsou jednoduché póly a r$es_{-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$ (ověřte).

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ζ funkce.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ζ funkce.

V předchozí kapitole v *Příkladech 1* bylo ukázáno, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \leq 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ζ **funkce.**

V předchozí kapitole v *Příkladech 1* bylo ukázáno, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \leq 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

ζ lze rozšířit na holomorfní funkci všude kromě bodu 1, kde má jednoduchý pól s reziduem 1, v bodech $-2, -4, -6, \ldots$ jsou jednoduché nulové hodnoty. Dále má ζ nekonečně mnoho nulových hodnot v pásu $0 < \Re(z) < 1$ (Riemannova hypotéze tvrdí, že tyto nulové hodnoty všechny leží na přímce $\Re(z) = 1/2$).

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ζ **funkce.**

V předchozí kapitole v *Příkladech 1* bylo ukázáno, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \leq 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

ζ lze rozšířit na holomorfní funkci všude kromě bodu 1, kde má jednoduchý pól s reziduem 1, v bodech $-2, -4, -6, \ldots$ jsou jednoduché nulové hodnoty. Dále má ζ nekonečně mnoho nulových hodnot v pásu $0 < \Re(z) < 1$ (Riemannova hypotéze tvrdí, že tyto nulové hodnoty všechny leží na přímce $\Re(z) = 1/2$).

Existuje zajímavá souvislost ζ funkce s prvočísly:

$$\zeta(z) = \Pi_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}}.,$$

kde p_n je n-té prvočíslo. Rovnost platí pro $\Re(z) > 1$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

PŘÍKLADY

PŘÍKLADY

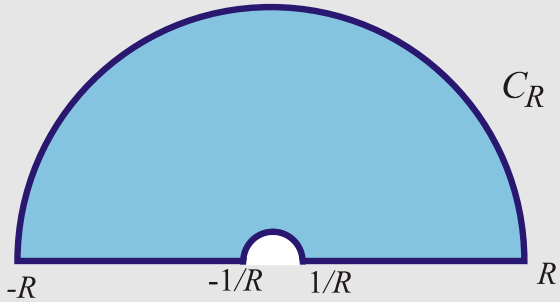
Příklad. Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}\,.$$

Použijte křivku C_R složenou z intervalů $[-R,-1/R]$, $[1/R,R]$ a půlkružnic $z = Re^{\mathrm{i}t}, t \in [0,\pi)$ a $z = e^{\mathrm{i}t}/R, t \in [0,\pi)$ – tato poslední půlkružnice opačně orientovaná.

PŘÍKLADY

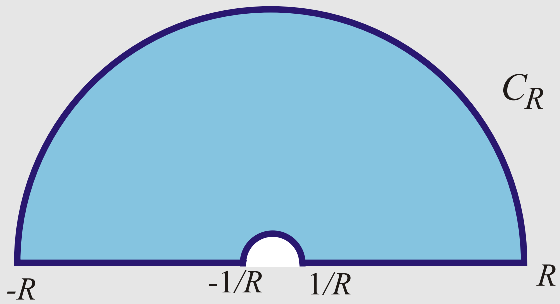
Příklad. Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}\,.$$
Použijte křivku C_R složenou z intervalů $[-R,-1/R]$, $[1/R,R]$ a půlkružnic $z = Re^{\mathrm{i}t}, t \in [0,\pi)$ a $z = e^{\mathrm{i}t}/R, t \in [0,\pi)$ – tato poslední půlkružnice opačně orientovaná.



LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

PŘÍKLADY

Příklad. Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}\,.$$
Použijte křivku C_R složenou z intervalů $[-R,-1/R]$, $[1/R,R]$ a půlkružnic $z = Re^{\mathrm{it}}, t \in [0,\pi)$ a $z = e^{\mathrm{it}}/R, t \in [0,\pi)$ – tato poslední půlkružnice opačně orientovaná.



U nuly se dostane mínus půl rezidua. To se u jednoduchého pólu smí, jinde ne!!! Zkusil jsem.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{1 - 2a\sin x + a^2}$$

pro $0 \leq a \leq 1$.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Hodnotu rezidua v bodě 1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z),$$

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Hodnotu rezidua v bodě 1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z),$$

což je po dosazení

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Hodnotu rezidua v bodě 1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z),$$

což je po dosazení

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Hodnotu rezidua v bodě -1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z\to -1}\frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\Big((z+1)^k f(z)\Big).$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Hodnotu rezidua v bodě 1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z),$$

což je po dosazení

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Hodnotu rezidua v bodě -1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z\to -1}\frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\left((z+1)^k f(z)\right).$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy,

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}z} \left((z+1)^2 \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) = -\frac{1}{4}.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},$$

kde φ je záporně orientovaná kružnice $\{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| = 1\}$.

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_{\varphi} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},$$

kde φ je záporně orientovaná kružnice $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$.

Řešení. K výpočtu integrálu použijeme reziduovou větu. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

má singularity v bodech

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}, \\ z_2 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}, \\ z_3 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}, \\ z_4 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}, \end{aligned}$$

což jsou póly prvního řádu.

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},$$

kde φ je záporně orientovaná kružnice $\{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| = 1\}$.

Řešení. K výpočtu integrálu použijeme reziduovou větu. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

má singularity v bodech

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}, \\ z_2 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}, \\ z_3 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}, \\ z_4 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}, \end{aligned}$$

což jsou póly prvního řádu.

Zajímají nás ale pouze body z_1, z_4, protože pouze ty leží ve vnitřku φ. Rezidua v těchto

pólech mají hodnoty

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z_1} f &= \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{-1 - i}{4\sqrt{2}},\\ \operatorname{res}_{z_4} f &= \frac{1}{(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_1)} = \frac{-1 + i}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

pólech mají hodnoty

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z_1} f &= \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{-1 - i}{4\sqrt{2}}, \\
\operatorname{res}_{z_4} f &= \frac{1}{(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_1)} = \frac{-1 + i}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

⬇

Podle reziduové věty je proto integrál roven

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^4} = -2\pi i \left(\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_4} f\right) = -2\pi i \frac{-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

⬇

pólech mají hodnoty

$$\operatorname{res}_{z_1} f = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{-1 - i}{4\sqrt{2}},$$
$$\operatorname{res}_{z_4} f = \frac{1}{(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_1)} = \frac{-1 + i}{4\sqrt{2}}.$$

Podle reziduové věty je proto integrál roven

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^4} = -2\pi i \left(\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_4} f\right) = -2\pi i \frac{-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

Všimněte si znaménka mínus při použití reziduové věty. To je kvůli záporné orientaci křivky φ.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Řešení. Provedeme substituci $z = e^{i\theta}$, po níž bude

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \cos 3\theta = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, \qquad \mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Řešení. Provedeme substituci $z = e^{i\theta}$, po níž bude

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \cos 3\theta = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, \qquad \mathrm{d}z = iz\, \mathrm{d}\theta.$$

Dostaneme tak

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta = \int_C \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5 - 4\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{iz} = -\frac{1}{2i} \int_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)}\, \mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Řešení. Provedeme substituci $z = e^{i\theta}$, po níž bude

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \cos 3\theta = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, \qquad \mathrm{d}z = iz\, \mathrm{d}\theta.$$

Dostaneme tak

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta = \int_C \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5 - 4\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{iz} = -\frac{1}{2i} \int_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)}\, \mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku.

Integrand má ve vnitřku této kružnice dvě singularity: pól 3. řádu v 0 a jednoduchý pól v 1/2.

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Řešení. Provedeme substituci $z = e^{i\theta}$, po níž bude

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \cos 3\theta = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, \qquad \mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta.$$

Dostaneme tak

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_C \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5 - 4\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = -\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku.

Integrand má ve vnitřku této kružnice dvě singularity: pól 3. řádu v 0 a jednoduchý pól v 1/2.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rezidua v těchto bodech mají hodnoty

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_0 f &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \frac{z^3(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = \frac{21}{8}, \\
\operatorname{res}_{1/2} f &= \lim_{z\to 1/2} \frac{(z-1/2)(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = -\frac{65}{24}
\end{aligned}$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rezidua v těchto bodech mají hodnoty

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_0 f &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{z^3(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = \frac{21}{8}, \\
\operatorname{res}_{1/2} f &= \lim_{z\to 1/2} \frac{(z-1/2)(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = -\frac{65}{24}
\end{aligned}$$

A hledaný integrál je:

$$-\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2i}2\pi i\left(\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte integrál
$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$
kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

Řešení. Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice C. Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

Řešení. Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice C. Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

Uvědomíme si ale, že nepotřebujeme znát jednotlivá rezidua, nýbrž jejich součet, který je (až na znaménko) roven hodnotě rezidua v nekonečnu.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

Řešení. Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice C. Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

Uvědomíme si ale, že nepotřebujeme znát jednotlivá rezidua, nýbrž jejich součet, který je (až na znaménko) roven hodnotě rezidua v nekonečnu.

Pro $|z| > 1$ je

$$\frac{1}{z^{10}+1} = \frac{1}{z^{10}} \frac{1}{1+z^{-10}} = \frac{1}{z^{10}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-10n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-10n}.$$

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

⬇

Řešení. Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice C. Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

⬇

Uvědomíme si ale, že nepotřebujeme znát jednotlivá rezidua, nýbrž jejich součet, který je (až na znaménko) roven hodnotě rezidua v nekonečnu.

⬇

Pro $|z| > 1$ je

$$\frac{1}{z^{10}+1} = \frac{1}{z^{10}}\frac{1}{1+z^{-10}} = \frac{1}{z^{10}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-10n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} z^{-10n}.$$

⬇

Takže reziduum integrandu v nekonečnu je 0, a tedy i hledaný integrál má hodnotu 0.

LEKCE36-KRZ
singulární bod
izolovaná singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9