SINGULARITY A REZIDUA

Zatím to vypadalo, že jsme si definovali šílený komplexní integrál a nakonec jsme se jej naučili počítat.

Ukážeme, že pomocí křivkového integrálu velmi elegantně spočítáme některé reálné integrály.

IZOLOVANÉ SINGULARITY

Kvůli jednoduššímu vyjadřování se bude v této kapitole předpokládat, že mezikruží je vždy otevřené a neprázdné, tj. ve vyjádření $0 < |z - w| < R$ je vždy $R > 0$.

DEFINICE. Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

Singularita v češtině znamená něco jako jedinečnost či výjimečnost.

Definice singularity je velmi obecná, a proto se v dalším textu budou vyšetřovat jen speciálnější singulární body, k jejichž vyšetřování pomohou Laurentovy řady.

DEFINICE. Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce f se nazývá izolovaný singulární bod (stručněji izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus \{w\}$.

Takový je například počátek pro funkci $1/z$.

Je-li w izolovaný singulární bod funkce f, je f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z - w| < R$ a dá se tam rozvinout v Laurentovu řadu. Pomocí tohoto rozvoje lze singulární bod klasifikovat.

DEFINICE. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

- odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;
- pól řádu k ($k \in \mathbb{N}$), jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$;
- podstatná, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n;

Místo „pól řádu 1" se říká častěji jednoduchý pól.

Jak se pozná charakter izolované singularity bez nutnosti počítat hlavní část Laurentovy řady?

VĚTA. Nechť w je izolovaný singulární bod funkce f.

1. V bodě w je odstranitelná singularita právě když $\lim\limits_{z\to w} f(z) \in \mathbb{C}$.
2. V bodě w je pól právě když $\lim\limits_{z\to w} f(z) = \infty$.
3. V bodě w je podstatná singularita právě když $\lim\limits_{z\to w} f(z)$ neexistuje.

Důkaz.

1. Má-li f ve w odstranitelnou singularity, pak v Laurentově rozvoji f v okolí w chybí hlavní část a Laurentova řada $\sum a_n(z-w)^n$ se redukuje na regulární část, takže $\lim\limits_{z\to w} f(z) = a_0$. Je-li $\lim\limits_{z\to w} f(z) = a \in \mathbb{C}$, je f omezená na nějakém okolí bodu w, např. číslem M. Pak pro $n < 0$ je $|a_n| \leq Mr^{-n}$ pro libovolně malá $r > 0$, takže musí být $a_n = 0$.

2. Má-li f ve w pól řádu k, pak $f(z) = g(z)/(z-w)^k$, kde g je funkce holomorfní ve w. Odtud plyne $\lim\limits_{z\to w} f(z) = \infty$.

Je-li $\lim_{z \to w} f(z) = \infty$, je $g = 1/f$ holomorfní ve w po dodefinování $g(w) = 0$. Tedy je $g(z) = (z-w)^k h(z)$, kde $k \geq 1$ a h je holomorfní ve w a $h(w) \neq 0$. Tudíž je

$$f(z) = \frac{1}{(z-w)^k} \frac{1}{h(z)} ,$$

kde poslední zlomek je holomorfní funkce ve w.

3. Popis podstatné singularity nyní vyplývá z předchozích dvou popisů, protože podstatná singularita nastane v izolovaném singulárním bodě právě když v tomto bodě není ani pól ani odstranitelná singularita.

$\diamond$

Tak jsme si jednotlivé singularity oklasifikovali, charakterizovali a pořád se točíme v kruhu (teda v mezikruží).

Chování funkce v okolí podstatné singularity w funkce f je složité. Existují aspoň dvě posloupnosti konvergující k w, jejichž funkční hodnoty konvergují k různým číslům. Není příliš obtížné ukázat, že takovéto limity funkčních hodnot pokryjí $\mathbb{C}$ (viz *Otázky*). Podstatně těžší je dokázat následující tvrzení:

VĚTA. (Pickard) Je-li w podstatná singularita funkce f, pak na každém okolí bodu w nabývá f všech hodnot z $\mathbb{C}$ kromě nejvýše jedné.

A tohle je vrchol. U podstatné singularity nastane totální blázinec.

Podstatná singularita je u exponenciály v nekonečnu. A ta jediná hodnota, kterou tam exponenciála nenabývá je nula. Alespoň nekteré pravdy z reálné analýzy platí i v komplexním světě.

To je teda adrenalin. Jen si to zkuste představit. Deformace roviny je opravdu divoká. A neustále se obrazy prohánějí okolo nuly. Minou ji vždy jenom o fous.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

REZIDUA

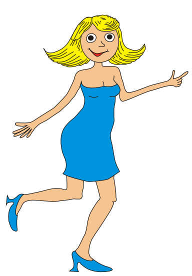
Nechť funkce f je holomorfní v mezikruží $M = \{z; 0 < |z-w| < R\}$, má tam Laurentův rozvoj $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ a C je jednoduchá uzavřená křivka ležící v M a obsahující w ve svém vnitřku, pak

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C (z-w)^n\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}\,.$$

Odtud je vidět, že koeficient s indexem -1 v Laurentově rozvoji hraje velkou roli při integraci a proto má svůj název.

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z-w| < R$. Koeficient s indexem -1 v Laurentově rozvoji funkce f okolo w se nazývá reziduum funkce f v bodě w a značí se $\operatorname{res}_w f$.

A najednou je to jasné jako sluníčko. Integrování se stává fraškou a dovede to i malé dítě. Jenom musí najít reziduum.



Reziduum nemusí být nepatrné. Například funkce $1/z$ má v počátku reziduum 1.

Ale reziduum v láhvi od rumu je zpravidla nevypitelné.

Je zřejmé, že pokud je f holomorfní ve w nebo tam má odstranitelnou singularitu, je $\operatorname{res}_w f = 0$.

To jsem si myslel. To jednoduché se ani nebude počítat.

Z obecné Cauchyovy věty se z předchozí integrace Laurentovy řady dostává následující důležité tvrzení:

VĚTA. (Reziduová věta) Nechť f je holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C kromě konečně mnoha bodů $w_1, ..., w_k$ ležících uvnitř C. Pak platí

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{w_i} f\,.$$

Každé reziduum odpovídá vlastně funkci $1/z$, a ta se při integraci promění v logaritmus. A ten křivkový integrál znamená, že se pohybujeme po "logaritmickém schodišti"a vystoupáme o jedno patro (2πi, případně vynásobeno reziduem). A to jde opakovat s jednotlivými póly uvnitř křivky.

Napřed jsem tomu nevěřil, tak jsem tam radši zašel. Fakt je to tak.

Pro výpočty integrálů pomocí reziduové věty je tedy potřeba umět rezidua vypočítat. Z konstrukce rozvoje f v Laurentovu řadu je znám vzorec

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_r} f(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

kde C_r je vhodná kružnice okolo w. Toto je také jedna z mála možností, jak vypočítat reziduum v podstatné singularitě (další možností je Laurentův rozvoj získaný vhodným postupem z jiné Laurentovy nebo Taylorovy řady).

Pro póly je vhodnější postup pomocí limit. Je-li w jednoduchý pól funkce f, je funkce $(z-w)f(z)$ holomorfní ve w a tedy

$$\operatorname{res}_w f = \lim_{z\to w} (z-w)f(z)\,.$$

Je-li w pól 2.řádu, bude ve w holomorfní funkce $(z-w)^2 f(z)$, ale její limita ve w není reziduum, ale koeficient a_{-2} jejího Laurentova rozvoje. Pokud ale tuto funkci zderivujete a pak provedete limitu, dostane se reziduum.

Obecně dostaneme následující:

VĚTA. (Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to w} \left((z-w)^k f(z)\right)^{(k-1)}.$$

VĚTA. (Pravidlo 2) Nechť f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0$. Je-li $g(w) = 0, g'(w) \neq 0$, pak

$$\operatorname{res}_w \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)}\,.$$

VĚTA. (Pravidlo 3) Je-li h holomorfní ve w a g má jednoduchý pól ve w, pak $\mathrm{res}_w(gh) = h(w)\mathrm{res}_w g$.

Některé další metody výpočtu reziduí v pólech jsou uvedeny v *Otázkách*.

Já rezidua miluju.

Já rezidua nemiluju.

U nekonečna se formálně zavede reziduum trikem.

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém okolí nekonečna. Definujeme

$$\operatorname{res}_\infty f = \operatorname{res}_0 \left(\frac{-1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)\right) .$$

Pak je například pro funkci $f(z) = 1/z$ součet všech reziduí v komplexní rovině nula. To nakonec platí pro každou racionální funkci.

Příklady 2 Otázky 2 2

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

Některé integrály reálných funkcí reálné proměnné lze počítat pomocí reziduové věty.

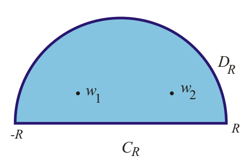
Interval, po kterém se integruje, se rozšíří na jednoduchou uzavřenou křivku v rovině a daná reálná funkce se vhodně rozšíří na komplexní funkci komplexní proměnné.

Postup bude ukázán na integraci přes celé $\mathbb{R}$ a přes interval $[0, 2\pi]$.

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

Nechť h je reálná funkce reálné proměnné. Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

Vezme se $R > 0$ a jednoduchá uzavřená křivka C_R, která leží v jedné z polorovin $x \geq 0$ nebo $x \leq 0$ (nechť je to např, první případ) a na ose x je totožná s úsečkou $[-R, R]$ (D_R bude část C_R ležící v otevřené horní polorovině). Může se požadovat, aby $\min\{|z|; z \in D_R\}$ s rostoucím R konvergovalo k ∞ (např. se za D_R bere polokružnice se středem v 0 a poloměrem R).



Pokud h je zúžením holomorfní funkce f na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit $w_1, .., w_n$, pak pro dostatečně velká R je

$$\int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{w_i} f - \int_{D_R} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{w_i} f - \lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Mám radost.

Není nutné brát všechna $R > 0$, stačí neomezenou rostoucí posloupnost R_n, pro kterou je snadné spočítat $\lim_n \int_{D_{R_n}} f(z)\,\mathrm{d}z$.

To vypadá zajímavě, zkusim to.

Nejlepším případem je ten, kdy poslední limita je rovna 0. To nastane např. pro některé racionální funkce.

VĚTA. (TYP I. Integrál z racionální funkce.) Nechť P, Q jsou polynomy stupňů k, n resp., přičemž $n - k > 1$ a Q nemá reálné kořeny. Potom pro racionální funkci $f = \frac{P}{Q}$ platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{w_i} f\,.$$

Důkaz. Za D_R se vezme půlkružnice $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi]$.

Pro důkaz $\lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ se odhadne

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right| &\leq R \int_0^{\pi} \left| \frac{P(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} \right| \mathrm{d}t \leq R \int_0^{\pi} \frac{R^k |a_k + \ldots + a_0/R^k|}{R^n |b_n - \ldots - b_0/R^n|}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{R^{n-k-1}} \int_0^{\pi} \frac{|a_k + \ldots + a_0/R^k|}{|b_n - \ldots - b_0/R^n|}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Jsou splněny podmínky pro přechod k limitě $R \to +\infty$ za integrálem. Výsledkem celé limity je 0. $\diamond$

Předchozí postup lze použít i na případ, kdy je racionální funkce vynásobená omezenou funkcí, např. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, nebo sice neomezenou funkcí, ale takovou, že limita v $\pm\infty$ této funkce lomené lineární funkcí je 0, např. $\sqrt{|x|}$.

U goniometrických funkcí, např. $\cos x$, bývá vhodné je rozšířit na $\mathbb{C}$ nikoli na $\cos z$, ale na složku mocniny $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$. Výsledkem je pak příslušná složka komplexního výsledku.

Za tím účelem si ukážeme jedno šikovné lemma.

VĚTA. (Jordanovo lemma.) Nechť $\rho > 0$, $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ a funkce f je spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > \rho\}$ taková, že

$$\lim_{z \to \infty,\, \arg z \in [\alpha, \beta]} f(z) = 0\,.$$

Pak pro $r > \rho$, $b > 0$ a křivku $\varphi_r(t) = r\, e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$ je

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\varphi_r} f(z)\, e^{ibz}\ \mathrm{d}z = 0\,.$$

Prostě přes nafukovanou polokružnici jdou integrály z $f(z)\, e^{iz}$ k nule, pokud to f jde k nule. No a ta polokružnice nemusí bejt celá.

Důkaz. Přejdeme k integraci přes t a odhadujeme $I := |\int_\alpha^\beta f(r\, e^{it})\, e^{ib\, r\, e^{it}}\ r\, i\, e^{it}\ \mathrm{d}t| \le r\ \max_{<\varphi_r>} |f|\ \int_\alpha^\beta e^{-br \sin t}\ \mathrm{d}t$.

Funkce sin je na $[0, \pi/2]$ konkávní, takže tam je $\sin(t) \ge c\, t$, kde $c = 2/\pi$.

Máme $\int_\alpha^\beta e^{-br \sin t}\ \mathrm{d}t \le \int_0^\pi e^{-br \sin t}\ \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-br \sin t}\ \mathrm{d}t \le 2 \int_0^{\pi/2} e^{-br\, ct}\ \mathrm{d}t < 2 \int_0^{+\infty} e^{-br\, ct}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{br\, c}$.

Odtud $I \le \frac{2}{b\, c}\ \max_{<\varphi_r>} |f| \to 0$. $\diamond$

VĚTA. (TYP II. Integrál z racionální funkce vynásobené cos nebo sin) Nechť Q je racionální funkce taková, že nemá v $\mathbb{R}$ pól a pro $z \to \infty$ je $Q(z) = O(z^{-1})$ (t.j. stupeň jmenovatele alespoň o 1 větší než stupeň čitatele). Pro $b > 0$ označme $f(z) = Q(z)\, e^{ibz}$. Pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \cos(bx)\ \mathrm{d}x = \Re \left(2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+,\, Q(a) = \infty} \operatorname*{res}_a f \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \sin(bx)\ \mathrm{d}x = \Im \left(2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+,\, Q(a) = \infty} \operatorname*{res}_a f \right)$$

Důkaz. Volíme stejnou integrační cestu φ_r jako v důkazu u typu I, integrujeme ale funkci f (nikoli funkci $Q(z) \cos bz$ nebo $Q(z) \sin bz$).

Něco se musí prostě vědět.

Podle reziduové věty je $\int_{-r}^{+r} f + \int_{\varphi_r} f = 2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \mathrm{res}_a\, f$.

Pro $r \to +\infty$ je limita druhého integrálu rovna nule (Jordanovo lemma), limita prvního integrálu je $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)(\cos bx + i \sin bx)\ \mathrm{d}x$. ◇

Integruje-li se funkce na intervalu $(0, +\infty)$, dá se přejít k sudé funkci na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a použít předchozí postup.

Někdy je nutné se vyhnout bodu 0, např. u funkce $\sin x/x$ – viz *Příklady*.

Říká "někdy", "můžeme", "lze použít", …

… ale myslí něco jiného, já vím.

(TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu.)

Přechodem ke křivkovému integrálu se dají spočítat i některé integrály goniometrických funkcí přes omezené intervaly. Jako příklad lze vzít

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3 + \sin x} .$$

Stačí zvolit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, čímž se z uvedeného integrálu stane integrál

$$\int_{|z|=1} \frac{2\ \mathrm{d}z}{z^2 + 6\mathrm{i}z - 1} ,$$

který se již spočte pomocí reziduové věty.

To byla ale náhodička, co?

VĚTA. (TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Nechť $Q(a,b)$ je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro $a,b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2=1$ v ní nedělíme nulou. Pak funkce

$$T(z) := Q\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)/(iz)$$

jedné komplexní proměnné z je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\ \mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \sum_{|a|<1,\, T(a)=\infty} \operatorname{res}_a T\,.$$

Důkaz. Pro $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ uvažujeme křivkový integrál $\int_\varphi T(z)\ \mathrm{d}z$.

Použití reziduové věty nám dá pravou stranu rovnosti, zatímco integrace přes reálný parametr t (podle definice křivkového integrálu) dá levou stranu. $\diamond$

Poznámky 3 Příklady 3 3 4 5 6

POZNÁMKY

Poznámky 1:

Meromorfní funkce. Některé vlastnosti holomorfních funkcí na jednoduše souvislých oblastech lze dokázat i za slabších podmínek pro tzv. meromorfní funkce:

Nechť G je otevřená množina a P je uzavřená diskrétní podmnožina G. Funkce holomorfní v $G \setminus P$, která má v bodech z P póly, se nazývá meromorfní v G.

Podmínka na P znamená, že každý bod P má okolí neobsahující žádné další body P a že body z P nemají hromadný bod, kromě nekonečna. Je-li P omezená množina, musí být P konečná.

Zřejmě součin a lineární kombinace meromorfních funkcí je meromorfní funkce (vše na G). O něco složitější je dokázat, že i jisté podíly a složení meromorfních funkcí jsou meromorfní.

Zkuste ukázat, že pro meromorfní funkce platí věta o jednoznačnosti a také obdoba Liouvillovy věty: *Nechť f je meromorfní v $\mathbb{C}$, která má konečně mnoho pólů a $\lim_{z\to\infty} f(z)$ existuje. Pak f je racionální funkce.* V důkazu se používá fakt, že má-li f pól ve w a h je hlavní část Laurentova rozvoje f okolo w, má $f-h$ odstranitelnou singularitu ve w. Odečtením všech takových hlavních čístí (i případně v bodě ∞) vznikne omezená holomorfní, a tedy konstantní, funkce v $\mathbb{C}$.

Konec poznámek 1.

Poznámky 3:

V uvedeném použití na výpočet reálných integrálů se předpokládalo, že ve zkoumané polorovině leželo jen konečně mnoho singulárních bodů. Stačí, aby uvnitř křivek C_R leželo jen konečně singulárních bodů, i když v celé polorovině je jich nekonečně mnoho. Postup je stejný, jen se ve výsledku dostane součet nekonečné řady reziduí.

Pomocí tohoto postupu lze někdy vhodně spočítat součet nekonečné řady, pokud známe hodnotu integrálu.

Rozšíření Gama funkce na komplexní čísla.

Podle definice je $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ pro $x > 0$. Dejte nyní za x komplexní číslo z, použijte pro obecnou mocninu její hlavní větev a zjistíte, že $\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ konverguje, jakmile $\Re(z) > 0$. V této polorovině je holomorfní (derivace za integrálem).

Podle vztahu $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ se rozšíří definice Gama funkce na celou rovinu kromě bodů $0, -1, -2, -3, \ldots$. Tato rozšířená funkce je holomorfní, v bodech $0, -1, -2, -3, \ldots$ jsou jednoduché póly a $res_{-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$ (ověřte).

Rovnost $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ platí všude kromě $z \in \mathbb{Z}$.

ζ funkce.

V předchozí kapitole v *Příkladech 1* bylo ukázáno, že řada $\sum_{n=1}^\infty n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \le 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty n^{-z}$ holomorfní.

Použijte rovnosti (ověřte)

$$\frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nu} u^{z-1}\ \mathrm{d}u$$

a dostanete po úpravě vzorec

$$\zeta z = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{\mathrm{e}^u - 1}\ \mathrm{d}u\,.$$

Odtud plyne rovnost

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^1 \frac{u^{z-1}}{\mathrm{e}^u - 1}\ \mathrm{d}u + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{\mathrm{e}^u - 1}\ \mathrm{d}u\,,$$

kde poslední integrál je celistvou funkcí.

Zbývající integrál konverguje všude v $\mathbb{C}$ kromě bodů $1, 0, -1, -3, -5, \ldots$, kde jsou jednoduché póly (důkaz lze provést rozložením funkce $\frac{u}{\mathrm{e}^u - 1}$ v řadu $1 - u/2 + \sum_1^\infty a_k u^{2k}$, jejím vynásobením u^{z-2} a integrováním).

Odtud vyplývá, že ζ lze rozšířit na holomorfní funkci všude kromě bodu 1, kde má jednoduchý pól s reziduem 1, v bodech $-2, -4, -6, \ldots$ jsou jednoduché nulové hodnoty. Dále má ζ nekonečně mnoho nulových hodnot v pásu $0 < \Re(z) < 1$ (Riemannova hypotéze tvrdí, že tyto nulové hodnoty všechny leží na přímce $\Re(z) = 1/2$).

Existuje zajímavá souvislost ζ funkce s prvočísly:

$$\zeta(z) = \Pi_{n=1}^\infty \frac{1}{1 - p_n^{-z}}.\,,$$

kde p_n je n-té prvočíslo. Rovnost platí pro $\Re(z) > 1$. Důkaz není obtížný; zlomek v součinu je součet geometrické řady a roznásobením konečně mnoha těchto řad (tj. částečný součin) se ověří, že se získají zlomky $1/n^z$.

Právě jsme se za pochodu dozvěděli to, čím se mnoho lidí trápilo celý život.

Konec poznámek 3.

PŘÍKLADY

Příklady 1:

1. Ukažte pomocí Laurentovy řady i pomocí limity, že $\sin z/z$ má v 0 odstranitelnou singularitu.

2. Ukažte pomocí Laurentovy řady i pomocí limity, že $e^{1/z}$ má v 0 podstatnou singularitu.

3. Ukažte pomocí Laurentovy řady i pomocí limity, že $1/z^3$ má v 0 pól řádu 3.

4. Ukažte, že $e^{1/z}$ má v libovolném mezikruží $0 < |z - w| < R$ za obor hodnot $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5. Najděte všechny singularity následujících funkcí a určete jejich charakter:

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{2z}}{z^4}\,,\; z\cos\frac{1}{z}\,,\; \frac{z}{\cos z}\,,\; \frac{\mathrm{e}^z}{z^2 + \pi^2}\,.$$

6. Ukažte, že funkce $\sin(\pi/z)$ má v 0 neizolovanou singularitu.

7. Jaké jsou singulární body funkce Log?

Konec příkladů 1.

Příklady 2:

1. V *Příkladě 5* předchozí části jste určili charakter singulárních bodů následujících funkcí:

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{2z}}{z^4}\,,\; z\cos\frac{1}{z}\,,\; \frac{z}{\cos z}\,,\; \frac{\mathrm{e}^z}{z^2 + \pi^2}\,.$$

Najděte příslušná rezidua.

2. Najděte rezidua funkcí $\mathrm{e}^{(1/z)}, \mathrm{e}^{1/z^2)}$ v bodě 0, který je jejich podstatnou singularitou.

3. Pomocí reziduové věty spočtěte následující integrály:

$$\int_{|z-2|=2} \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)}\,\mathrm{d}z\,,\; \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{\sinh(2z)}\,,\; \int_{|z|=1} z\mathrm{e}^{1/z}\,.$$

Konec příkladů 2.

Příklady 3:

1. Spočtěte integrály

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x\,,\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(3x)}{x^4+4}\,\mathrm{d}x\,,\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Přechodem k sudé funkci spočtěte

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,,\; \int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Spočtěte integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. [Návod: Místo polokružnice vezměte obdélník nad intervalem $[-R, R]$ výšky 2π.]

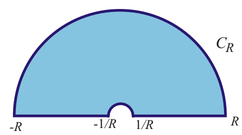
Kam na to ty lidi chodí . . .

Pozor, takové věci daly moc práce vymyslit. Zde jsou za odměnu. To je přece jasné!

4. Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}\,.$$

Použijte křivku C_R složenou z intervalů $[-R,-1/R],[1/R,R]$ a půlkružnic $z = Re^{\mathrm{i}t}, t\in[0,\pi)$ a $z = e^{\mathrm{i}t}/R, t\in[0,\pi)$ – tato poslední půlkružnice opačně orientovaná.



U nuly se dostane mínus půl rezidua. To se u jednoduchého pólu smí, jinde ne!!! Zkusil jsem.

5. Dopočtěte integrál $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{dx}}{3+\sin x}$ metodou uvedenou v textu a podobným způsobem spočtěte

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{dx}}{1-2a\sin x+a^2}$$

pro $0\le a\le 1$.

6. Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{kx}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{dx}$$

pro $k\in(0,1)$. Použijte stejný obdélník jako v příkladu 3.

Oba integrály přes dlouhé strany obdélníku dejte dohromady, zbylé dva konvergují k 0. Výsledek je $\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Substitucí $\mathrm{e}^x = t$ tak získáte $\int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t$ známý z teorie Gama funkce.

Konec příkladů 3.

OTÁZKY

Otázky 1:

1. Ukažte, že f má ve w odstranitelnou singularitu právě když je f omezená na nějakém mezikruží $0<|z-w|<R$.

2. Ukažte, že f má ve w pól řádu n právě když existuje mezikruží $0 < |z-w| < R$ a konstanty K, L takové, že pro všechna z z uvedeného mezikruží je

$$\frac{K}{|z-w|^n} \leq |f(z)| \leq \frac{L}{|z-w|^n} \,.$$

3. Ukažte, že f má ve w pól řádu n právě když $1/f$ má ve w nulový bod řádu (násobnosti) n.

4. Ukažte, že f má ve w podstatnou singularitu právě když na každém mezikruží $0 < |z-w| < R$ nabývá f hodnot tvořící hustou množinu v $\mathbb{C}$. [Návod: kdyby funkce f nenabývala žádné hodnoty z nějakého okolí bodu $q \in \mathbb{C}$, pak $1/(f-q)$ má v q odstranitelnou singularitu.]

5. Nechť f je holomorfní v bodě w. Pak funkce $f(z)/(z-w)$ má ve w jednoduchý pól pokud $f(w) \neq 0$ a má ve w odstranitelnou singularitu, pokud $f(w) = 0$.

6. Racionální funkce má pouze konečný počet singulárních bodů, a to jen póly (a je tedy meromorfní funkcí).

7. Ukažte, že je-li f holomorfní v mezikruží $0 < |z-w| < R$ a ve w má nulový bod nebo pól, pak logaritmická derivace f'/f má ve w jednoduchý pól.

8. Dokažte zobecnění věty o logaritmické derivaci:*Nechť f je holomorfní uvnitř a na jednoduché uzavřené křivce C až na konečný počet pólů $p_1, ..., p_n$ řádů $k_1, ..., k_n$ uvnitř C. Je-li f nenulová na C a má-li f konečný počet nulových bodů $q_1, ..., q_m$ násobností $l_1, ..., l_m$, potom*

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\ \mathrm{d} = \sum_{i=1}^{m} l_i - \sum_{j=1}^{n} k_j \,.$$

Konec otázek 1.

Otázky 2:

1. *Dokažte tvrzení o výpočtu rezidua v pólech pomocí limity příslušné derivace:*

VĚTA. *(Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak*

$$res_{\,w} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to w} \left((z-w)^k f(z)\right)^{(k-1)} .$$

2. *Dokažte následující tvrzení používaná pro výpočet rezidua v jednoduchém pólu:*

VĚTA. *(Pravidlo 2) Nechť f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0$. Je-li $g(w) = 0, g'(w) \neq 0$, pak*

$$res_{\,w} \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)} \,.$$

VĚTA. *(Pravidlo 3) Je-li h holomorfní ve w a g má jednoduchý pól ve w, pak $res_w(gh) = h(w) res_w g$.*

3. *Obdoba předchozích tvrzení pro pól 2.řádu je komplikovanější: Pokud f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0, g(w) = g'(w) = 0, g''(w) \neq 0$, pak*

$$res_{\,w} \frac{f}{g} = 2 \frac{f'(w)}{g''(w)} \Big/ \frac{2}{3} \frac{f(w) g'''(w)}{g'^2(w)} \,.$$

4. *Nechť f má vlastnost $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ na svém definičním oboru. Je-li w pól řádu k funkce f, pak i $\overline{w}$ je pól řádu k funkce f a platí $res_{\overline{w}} f = \overline{res_w f}$.*

5. *Ukažte, že $res_w \frac{f'}{f} = \pm k$, kde k je násobnost nulového bodu w (a pak platí znaménko +) nebo řád pólu w (a pak platí znaménko -).+*

6. *Ukažte, že platí tvrzení*

VĚTA. *Nechť f má jednoduchý pól v z_0, nechť $\varphi_r(t) = z_0 + re^{it}$ pro $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Pak*

$$\lim_{r \to 0} \int_{\varphi_r} f(z)\ \mathrm{d}z = \alpha \cdot i \cdot res_{z_0} f\,.$$

Prostě jednoduché póly jde obcházet libovolne blízko a dostaneme příslušný kousek rezidua.

Důkaz. *Napíšeme si Laurentovu řadu a integrujeme první člen výpočtem, zbývající členy dávají holomorfní funkci, která je spojitá a integrály z ní jdou k nule.* ◇

Konec otázek 2.

CVIČENÍ

Cvičení 1: Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Hodnotu rezidua v bodě 1 spočítáme podle vzorce

$$\mathrm{res}_{\,1} f = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z),$$

což je po dosazení

$$\mathrm{res}_{\,1} f = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Hodnotu rezidua v bodě -1 spočítáme podle vzorce

$$\mathrm{res}_{\,-1} f = \lim_{z \to -1} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left((z+1)^k f(z) \right).$$

Tedy,

$$\mathrm{res}_{\,-1} f = \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left((z+1)^2 \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) = -\frac{1}{4}.$$

Konec cvičení 1.

Cvičení 2: Příklad. Spočítejte hodnoty reziduí následující funkce

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}.$$

Řešení. Funkce f má jedinou singularitu, a to v nule, neboť tam není definovaná. Jelikož neexistuje limita funkce f v nule, je tato singularita podstatná.

Reziduum funkce f v 0 určíme z Laurentovy řady.

Rozvoj exponenciely je

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Odtud dostaneme rozvoj pro f :

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots.$$

Hodnota rezidua je koeficient u $\frac{1}{z}$, což je -1.
Konec cvičení 2.

Cvičení 3: Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},$$

kde φ je záporně orientovaná kružnice $\{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| = 1\}$.

Řešení. K výpočtu integrálu použijeme reziduovou větu. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

má singularity v bodech

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}, \\ z_2 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}, \\ z_3 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}, \\ z_4 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}, \end{aligned}$$

což jsou póly prvního řádu.
Zajímají nás ale pouze body z_1, z_4, protože pouze ty leží ve vnitřku φ. Rezidua v těchto pólech mají hodnoty

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_1} f &= \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{res}_{z_4} f &= \frac{1}{(z_4-z_2)(z_4-z_3)(z_4-z_1)} = \frac{-1+i}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Podle reziduové věty je proto integrál roven

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = -2\pi i \left(\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_4} f\right) = -2\pi i \frac{-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

Všimněte si znaménka mínus při použití reziduové věty. To je kvůli záporné orientaci křivky φ.

To jsem věděl!

Konec cvičení 3.

Cvičení 4: *Příklad.* *Spočítejte integrál*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}.$$

Řešení. *Místo zadaného reálného integrálu budeme počítat integrál komplexní funkce komlexní proměnné:*

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^6+1},$$

kde C je křivka sestávající z úsečky $[-R, R]$ na reálné ose a obvodu Γ horního polokruhu $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R,\ Im\, z > 0\}$, která je orientována kladně.

Funkce

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1}$$

má šest jednoduchých singularit v bodech: $e^{\frac{\pi i}{6}}$, $e^{\frac{3\pi i}{6}}$, $e^{\frac{5\pi i}{6}}$, $e^{\frac{7\pi i}{6}}$, $e^{\frac{9\pi i}{6}}$, $e^{\frac{11\pi i}{6}}$.

Ale pouze body $z_1 = e^{\frac{\pi i}{6}}$, $z_2 = e^{\frac{3\pi i}{6}}$, $z_3 = e^{\frac{5\pi i}{6}}$ leží uvnitř křivky C.

Nyní spočítáme rezidua pro tyto póly, abychom mohli použít reziduovou větu.

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z_1} f &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{x^6+1} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}},\\
\operatorname{res}_{z_2} f &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_2}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}},\\
\operatorname{res}_{z_3} f &= \lim_{z\to z_3}(z-z_3)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_3}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{6}}.
\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili komplexní l'Hospitalovo pravidlo.

Z reziduové věty dostáváme hodnotu integrálu:

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^6+1} = 2\pi i\left(\frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}} + \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}} + \frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{6}}\right) = \frac{2}{3}\pi.$$

Z toho plyne

$$\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} + \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^6+1} = \frac{2}{3}\pi.$$

Provedeme-li limitní přechod $R \to \infty$, bude druhý integrál na levé straně nulový a proto

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} = \frac{2}{3}\pi.$$

Ze sudosti funkce f máme celkový výsledek

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}.$$

Konec cvičení 4.

Cvičení 5: *Příklad. Spočítejte integrál*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Řešení. Provedeme substituci $z = e^{i\theta}$, po níž bude

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \cos 3\theta = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, \qquad \mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta.$$

Dostaneme tak

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta = \int_C \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5 - 4\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{iz} = -\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\, \mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku.

Integrand má ve vnitřku této kružnice dvě singularity: pól 3. řádu v 0 a jednoduchý pól v 1/2.

Rezidua v těchto bodech mají hodnoty

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_0 f &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \frac{z^3(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = \frac{21}{8}, \\ \operatorname{res}_{1/2} f &= \lim_{z\to 1/2} \frac{(z-1/2)(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = -\frac{65}{24} \end{aligned}$$

A hledaný integrál je:

$$-\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\, \mathrm{d}z = -\frac{1}{2i} 2\pi i \left(\frac{21}{8} - \frac{65}{24}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Konec cvičení 5.

Cvičení 6: *Příklad. Spočítejte integrál*

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

Řešení. Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice C. Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

Uvědomíme si ale, že nepotřebujeme znát jednotlivá rezidua, nýbrž jejich součet, který je (až na znaménko) roven hodnotě rezidua v nekonečnu.

Pro $|z| > 1$ je

$$\frac{1}{z^{10}+1} = \frac{1}{z^{10}}\frac{1}{1+z^{-10}} = \frac{1}{z^{10}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-10n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} z^{-10n}.$$

Takže reziduum integrandu v nekonečnu je 0, a tedy i hledaný integrál má hodnotu 0.

Prostě když se u počítání přemýšlí, tak se nemusí tolik počítat!

Konec cvičení 6.

STANDARDY z kapitoly

SINGULARITY A REZIDUA

IZOLOVANÉ SINGULARITY

DEFINICE. *Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.*

DEFINICE. *Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce f se nazývá izolovaný singulární bod (stručněji izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus \{w\}$.*

DEFINICE. *Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá*

- *odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;*
- *pól řádu k ($k \in \mathbb{N}$), jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$;*
- *podstatná, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n;*

Místo „pól řádu 1" se říká častěji jednoduchý pól.

VĚTA. *Nechť w je izolovaný singulární bod funkce f.*

1. *V bodě w je odstranitelná singularita právě když $\lim_{z\to w} f(z) \in \mathbb{C}$.*
2. *V bodě w je pól právě když $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$.*
3. *V bodě w je podstatná singularita právě když $\lim_{z\to w} f(z)$ neexistuje.*

VĚTA. *(Pickard) Je-li w podstatná singularita funkce f, pak na každém okolí bodu w nabývá f všech hodnot z $\mathbb{C}$ kromě nejvýše jedné.*

REZIDUA

Nechť funkce f je holomorfní v mezikruží $M = \{z; 0 < |z-w| < R\}$, má tam Laurentův rozvoj $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ a C je jednoduchá uzavřená křivka ležící v M a obsahující w ve svém vnitřku, pak

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C (z-w)^n\,\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1}\,.$$

DEFINICE. *Nechť f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z-w| < R$. Koeficient s indexem -1 v Laurentově rozvoji funkce f okolo w se nazývá reziduum funkce f v bodě w a značí se $\mathrm{res}_w f$.*

VĚTA. *(Reziduová věta) Nechť f je holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C kromě konečně mnoha bodů $w_1, \ldots, w_k$ ležících uvnitř C. Pak platí*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_{w_i} f\,.$$

Z konstrukce rozvoje f v Laurentovu řadu je znám vzorec

$$res_{\,w} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

kde C_r je vhodná kružnice okolo w.

VĚTA. *(Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak*

$$res_{\,w} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to w} \left((z-w)^k f(z) \right)^{(k-1)}.$$

VĚTA. *(Pravidlo 2) Nechť f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0$. Je-li $g(w) = 0, g'(w) \neq 0$, pak*

$$res_{\,w} \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)}\,.$$

VĚTA. *(Pravidlo 3) Je-li h holomorfní ve w a g má jednoduchý pól ve w, pak $res_w(gh) = h(w) res_w g$.*

DEFINICE. *Nechť f je holomorfní v nějakém okolí nekonečna. Definujeme*

$$res_{\infty} f = res_0 \left(\frac{-1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right) \right)\,.$$

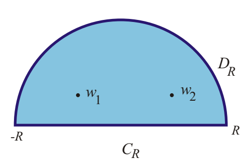
Pak je například pro funkci $f(z) = 1/z$ součet všech reziduí v komplexní rovině nula. To nakonec platí pro každou racionální funkci.

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

Nechť h je reálná funkce reálné proměnné. Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

Vezme se $R > 0$ a jednoduchá uzavřená křivka C_R, která leží v jedné z polorovin $x \geq 0$ nebo $x \leq 0$ (nechť je to např, první případ) a na ose x je totožná s úsečkou $[-R, R]$ (D_R bude část C_R ležící v otevřené horní polorovině). Může se požadovat, aby $\min\{|z|; z \in D_R\}$ s rostoucím R konvergovalo k ∞ (např. se za D_R bere polokružnice se středem v 0 a poloměrem R).



Pokud h je zúžením holomorfní funkce f na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit $w_1, .., w_n$, pak pro dostatečně velká R je

$$\int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} res_{\,w_i} f - \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} res_{\,w_i} f - \lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Není nutné brát všechna $R > 0$, stačí neomezenou rostoucí posloupnost R_n, pro kterou je snadné spočítat $\lim_n \int_{D_{R_n}} f(z)\ \mathrm{d}z$.
Nejlepším případem je ten, kdy poslední limita je rovna 0. To nastane např. pro některé racionální funkce.

VĚTA. *(TYP I. Integrál z racionální funkce.) Nechť P, Q jsou polynomy stupňů k, n resp., přičemž $n - k > 1$ a Q nemá reálné kořeny. Potom pro racionální funkci $f = \frac{P}{Q}$ platí*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} res_{\,w_i} f\,.$$

Důkaz. *Za D_R se vezme půlkružnice $z = R\mathrm{e}^{it}, t \in [0, \pi]$.*
Pro důkaz $\lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$ se odhadne

$$\begin{aligned} \Big|\int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\Big| &\leq R\int_0^{\pi} \Big|\frac{P(R\mathrm{e}^{it})}{Q(R\mathrm{e}^{it})}\Big|\ \mathrm{d}t \leq R\int_0^{\pi} \frac{R^k|a_k + ... + a_0/R^k|}{R^n|b_n - ... - b_0/R^n|}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{R^{n-k-1}}\int_0^{\pi} \frac{|a_k + ... + a_0/R^k|}{|b_n - ... - b_0/R^n|}\ \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Jsou splněny podmínky pro přechod k limitě $R \to +\infty$ za integrálem. Výsledkem celé limity je 0. $\diamond$

VĚTA. *(Jordanovo lemma.) Nechť $\rho > 0$, $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ a funkce f je spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > \rho\}$ taková, že*

$$\lim_{z\to\infty,\, \arg z\in[\alpha,\beta]} f(z) = 0\,.$$

Pak pro $r > \rho$, $b > 0$ a křivku $\varphi_r(t) = r\,e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$ je

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\varphi_r} f(z)\,e^{ibz}\ \mathrm{d}z = 0\,.$$

Prostě přes nafukovanou polokružnici jdou integrály z $f(z)\,e^{iz}$ k nule, pokud to f jde k nule. No a ta polokružnice nemusí bejt celá.

Důkaz. *Přejdeme k integraci přes t a odhadujeme* $I := |\int_\alpha^\beta f(r\,e^{it})\,e^{ib\,r\,e^{it}}\,r\,i\,e^{it}\,\mathrm{d}t| \le r\,\max_{<\varphi_r>}|f|\,\int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\,\mathrm{d}t$.
Funkce $\sin$ *je na* $[0,\pi/2]$ *konkávní, takže tam je* $\sin(t) \ge c\,t$*, kde* $c = 2/\pi$.
Máme $\int_\alpha^\beta e^{-br\sin t}\,\mathrm{d}t \le \int_0^\pi e^{-br\sin t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} e^{-br\sin t}\,\mathrm{d}t \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-br\,ct}\,\mathrm{d}t < 2\int_0^{+\infty} e^{-br\,ct}\,\mathrm{d}t$ $= \frac{2}{br\,c}$.
Odtud $I \le \frac{2}{b\,c}\,\max_{<\varphi_r>}|f| \to 0$. ◇

VĚTA. *(TYP II. Integrál z racionální funkce vynásobené* $\cos$ *nebo* $\sin$ *) Nechť* Q *je racionální funkce taková, že nemá v* $\mathbb{R}$ *pól a pro* $z \to \infty$ *je* $Q(z) = O(z^{-1})$ *(t.j. stupeň jmenovatele alespoň o 1 větší než stupeň čitatele). Pro* $b > 0$ *označme* $f(z) = Q(z)\,e^{ibz}$*. Pak*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \Re\left(2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\,Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \Im\left(2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\,Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f\right)$$

Důkaz. *Volíme stejnou integrační cestu* φ_r *jako v důkazu u typu I, integrujeme ale funkci* f *(nikoli funkci* $Q(z)\cos bz$ *nebo* $Q(z)\sin bz$*).*

Něco se musí prostě vědět.

Podle reziduové věty je $\int_{-r}^{+r} f + \int_{\varphi_r} f = 2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\,Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f$.
Pro $r \to +\infty$ *je limita druhého integrálu rovna nule (Jordanovo lemma), limita prvního integrálu je* $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)(\cos bx + i\sin bx)\,\mathrm{d}x$. ◇

Integruje-li se funkce na intervalu $(0,+\infty)$*, dá se přejít k sudé funkci na intervalu* $(-\infty,+\infty)$ *a použít předchozí postup.*

Někdy je nutné se vyhnout bodu 0, např. u funkce $\sin x/x$ *– viz Příklady.*

(TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu.)

Přechodem ke křivkovému integrálu se dají spočítat i některé integrály goniometrických funkcí přes omezené intervaly. Jako příklad lze vzít

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}\,.$$

Stačí zvolit $z = e^{ix}$*, čímž se z uvedeného integrálu stane integrál*

$$\int_{|z|=1} \frac{2\,\mathrm{d}z}{z^2+6iz-1}\,,$$

který se již spočte pomocí reziduové věty.

VĚTA. *(TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Nechť $Q(a,b)$ je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro $a,b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2=1$ v ní nedělíme nulou. Pak funkce*

$$T(z) := Q\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)/(iz)$$

jedné komplexní proměnné z je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\ \mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \sum_{|a|<1,\, T(a)=\infty} \operatorname{res}_a T\,.$$

Důkaz. *Pro $\varphi(t) = \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ uvažujeme křivkový integrál $\int_\varphi T(z)\ \mathrm{d}z$.*
Použití reziduové věty nám dá pravou stranu rovnosti, zatímco integrace přes reálný parametr t (podle definice křivkového integrálu) dá levou stranu. $\diamond$

POZNÁMKY

VĚTA. *Nechť f má jednoduchý pól v z_0, nechť $\varphi_r(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{it}$ pro $t \in [t_0, t_0+\alpha]$. Pak*

$$\lim_{r\to 0} \int_{\varphi_r} f(z)\ \mathrm{d}z = \alpha \cdot i \cdot res_{z_0} f\,.$$

Prostě jednoduché póly jde obcházet libovolne blízko a dostaneme příslušný kousek rezidua.

Důkaz. *Napíšeme si Laurentovu řadu a integrujeme první člen výpočtem, zbývající členy dávají holomorfní funkci, která je spojitá a integrály z ní jdou k nule.* $\diamond$

Rozšíření Gama funkce na komplexní čísla.

Podle definice je $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ pro $x > 0$. Dejte nyní za x komplexní číslo z, použijte pro obecnou mocninu její hlavní větev a zjistíte, že $\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ konverguje, jakmile $\Re(z) > 0$. V této polorovině je holomorfní (derivace za integrálem).

Podle vztahu $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ se rozšíří definice Gama funkce na celou rovinu kromě bodů $0,-1,-2,-3,\ldots$. Tato rozšířená funkce je holomorfní, v bodech $0,-1,-2,-3,\ldots$ jsou jednoduché póly a $res_{-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$ (ověřte).

ζ funkce.

V předchozí kapitole v Příkladech 1 bylo ukázáno, že řada $\sum_{n=1}^\infty n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \le 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty n^{-z}$ holomorfní.

ζ lze rozšířit na holomorfní funkci všude kromě bodu 1, kde má jednoduchý pól s reziduem 1, v bodech $-2,-4,-6,\ldots$ jsou jednoduché nulové hodnoty. Dále má ζ nekonečně mnoho nulových hodnot v pásu $0 < \Re(z) < 1$ (Riemannova hypotéze tvrdí, že tyto nulové hodnoty všechny leží na přímce $\Re(z) = 1/2$).

Existuje zajímavá souvislost ζ funkce s prvočísly:

$$\zeta(z) = \Pi_{n=1}^\infty \frac{1}{1-p_n^{-z}}\cdot,$$

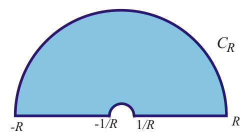
kde p_n je n-té prvočíslo. Rovnost platí pro $\Re(z) > 1$.

PŘÍKLADY

Příklad. Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}\,.$$

Použijte křivku C_R složenou z intervalů $[-R, -1/R], [1/R, R]$ a půlkružnic $z = Re^{it}, t \in [0, \pi)$ a $z = e^{it}/R, t \in [0, \pi)$ – tato poslední půlkružnice opačně orientovaná.



U nuly se dostane mínus půl rezidua. To se u jednoduchého pólu smí, jinde ne!!! Zkusil jsem.

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{1 - 2a\sin x + a^2}$$

pro $0 \leq a \leq 1$.

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Hodnotu rezidua v bodě 1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z),$$

což je po dosazení

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Hodnotu rezidua v bodě -1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z\to -1}\frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\left((z+1)^k f^(z)\right).$$

Tedy,

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z+1)^2\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Příklad. *Vypočítejte integrál*
$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},$$
kde φ je záporně orientovaná kružnice $\{z\in\mathbb{C}:\ |z-1|=1\}$.
Řešení. *K výpočtu integrálu použijeme reziduovou větu. Funkce*
$$f(z)=\frac{1}{1+z^4}=\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$
má singularity v bodech
$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\\ z_2 &= \cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4},\\ z_3 &= \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4},\\ z_4 &= \cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4},\end{aligned}$$
což jsou póly prvního řádu.
Zajímají nás ale pouze body z_1, z_4, protože pouze ty leží ve vnitřku φ. Rezidua v těchto pólech mají hodnoty
$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_1} f &= \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}},\\ \operatorname{res}_{z_4} f &= \frac{1}{(z_4-z_2)(z_4-z_3)(z_4-z_1)} = \frac{-1+i}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$
Podle reziduové věty je proto integrál roven
$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = -2\pi i\left(\operatorname{res}_{z_1} f+\operatorname{res}_{z_4} f\right) = -2\pi i\frac{-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

Všimněte si znaménka mínus při použití reziduové věty. To je kvůli záporné orientaci křivky φ.

Příklad. *Spočítejte integrál*
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$
Řešení. *Provedeme substituci $z=e^{i\theta}$, po níž bude*
$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\qquad \cos 3\theta=\frac{z^3+z^{-3}}{2},\qquad \mathrm{d}z=iz\,\mathrm{d}\theta.$$
Dostaneme tak
$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_C \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5-4\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = -\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku.

Integrand má ve vnitřku této kružnice dvě singularity: pól 3. řádu v 0 a jednoduchý pól v 1/2.

Rezidua v těchto bodech mají hodnoty

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_0 f &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{z^3(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = \frac{21}{8},\\ \operatorname{res}_{1/2} f &= \lim_{z\to 1/2}\frac{(z-1/2)(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = -\frac{65}{24}\end{aligned}$$

A hledaný integrál je:

$$-\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2i}2\pi i\left(\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

Řešení. Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice C. Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

Uvědomíme si ale, že nepotřebujeme znát jednotlivá rezidua, nýbrž jejich součet, který je (až na znaménko) roven hodnotě rezidua v nekonečnu.

Pro $|z| > 1$ je

$$\frac{1}{z^{10}+1} = \frac{1}{z^{10}}\frac{1}{1+z^{-10}} = \frac{1}{z^{10}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-10n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{-10n}.$$

Takže reziduum integrandu v nekonečnu je 0, a tedy i hledaný integrál má hodnotu 0.