SINGULARITY A REZIDUA

IZOLOVANÉ SINGULARITY

Kvůli jednoduššímu vyjadřování se bude v této kapitole předpokládat, že mezikruží je vždy otevřené a neprázdné, tj. ve vyjádření $0 < |z - w| < R$ je vždy $R > 0$.

DEFINICE. Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

Definice singularity je velmi obecná, a proto se v dalším textu budou vyšetřovat jen speciálnější singulární body, k jejichž vyšetřování pomohou Laurentovy řady.

DEFINICE. Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce f se nazývá izolovaný singulární bod (stručněji izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus \{w\}$.

Je-li w izolovaný singulární bod funkce f, je f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z - w| < R$ a dá se tam rozvinout v Laurentovu řadu. Pomocí tohoto rozvoje lze singulární bod klasifikovat.

DEFINICE. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

- odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;
- pól řádu k ($k \in \mathbb{N}$), jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$;
- podstatná, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n;

Místo „pól řádu 1" se říká častěji jednoduchý pól.

VĚTA. Nechť w je izolovaný singulární bod funkce f.

1. V bodě w je odstranitelná singularita právě když $\lim_{z\to w} f(z) \in \mathbb{C}$.
2. V bodě w je pól právě když $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$.
3. V bodě w je podstatná singularita právě když $\lim_{z\to w} f(z)$ neexistuje.

Chování funkce v okolí podstatné singularity w funkce f je složité. Existují aspoň dvě posloupnosti konvergující k w, jejichž funkční hodnoty konvergují k různým číslům. Není příliš obtížné ukázat, že takovéto limity funkčních hodnot pokryjí $\mathbb{C}$ (viz *Otázky*). Podstatně těžší je dokázat následující tvrzení:

VĚTA. (Pickard) Je-li w podstatná singularita funkce f, pak na každém okolí bodu w nabývá f všech hodnot z $\mathbb{C}$ kromě nejvýše jedné.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

REZIDUA

Nechť funkce f je holomorfní v mezikruží $M = \{z; 0 < |z-w| < R\}$, má tam Laurentův rozvoj $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ a C je jednoduchá uzavřená křivka ležící v M a obsahující w ve svém vnitřku, pak

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C (z-w)^n\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}\,.$$

Odtud je vidět, že koeficient s indexem -1 v Laurentově rozvoji hraje velkou roli při integraci a proto má svůj název.

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z-w| < R$. Koeficient s indexem -1 v Laurentově rozvoji funkce f okolo w se nazývá reziduum funkce f v bodě w a značí se $\mathrm{res}_w f$.

Je zřejmé, že pokud je f holomorfní ve w nebo tam má odstranitelnou singularitu, je $\mathrm{res}_w f = 0$.

Z obecné Cauchyovy věty se z předchozí integrace Laurentovy řady dostává následující důležité tvrzení:

VĚTA. (Reziduová věta) Nechť f je holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C kromě konečně mnoha bodů $w_1, \ldots, w_k$ ležících uvnitř C. Pak platí

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_{w_i} f .$$

Pro výpočty integrálů pomocí reziduové věty je tedy potřeba umět rezidua vypočítat. Z konstrukce rozvoje f v Laurentovu řadu je znám vzorec

$$\mathrm{res}_w f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_r} f(z)\ \mathrm{d}z ,$$

kde C_r je vhodná kružnice okolo w. Toto je také jedna z mála možností, jak vypočítat reziduum v podstatné singularitě (další možností je Laurentův rozvoj získaný vhodným postupem z jiné Laurentovy nebo Taylorovy řady).

Pro póly je vhodnější postup pomocí limit. Je-li w jednoduchý pól funkce f, je funkce $(z-w)f(z)$ holomorfní ve w a tedy

$$\mathrm{res}_w f = \lim_{z\to w} (z-w)f(z) .$$

Je-li w pól 2.řádu, bude ve w holomorfní funkce $(z-w)^2 f(z)$, ale její limita ve w není reziduum, ale koeficient a_{-2} jejího Laurentova rozvoje. Pokud ale tuto funkci zderivujete a pak provedete limitu, dostane se reziduum.

Obecně dostaneme následující:

VĚTA. (Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak

$$\mathrm{res}_w f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to w} \left((z-w)^k f(z)\right)^{(k-1)} .$$

VĚTA. (Pravidlo 2) Nechť f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0$. Je-li $g(w) = 0, g'(w) \neq 0$, pak

$$\mathrm{res}_w \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)} .$$

VĚTA. (Pravidlo 3) Je-li h holomorfní ve w a g má jednoduchý pól ve w, pak $res_w(gh) = h(w) res_w g$.

Některé další metody výpočtu reziduí v pólech jsou uvedeny v *Otázkách*.

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém okolí nekonečna. Definujeme

$$\mathrm{res}_\infty f = \mathrm{res}_0 \left(\frac{-1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)\right) .$$

Příklady 2 Otázky 2 2

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

Některé integrály reálných funkcí reálné proměnné lze počítat pomocí reziduové věty.

Interval, po kterém se integruje, se rozšíří na jednoduchou uzavřenou křivku v rovině a daná reálná funkce se vhodně rozšíří na komplexní funkci komplexní proměnné.

Postup bude ukázán na integraci přes celé $\mathbb{R}$ a přes interval $[0, 2\pi]$.

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

Nechť h je reálná funkce reálné proměnné. Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

Vezme se $R > 0$ a jednoduchá uzavřená křivka C_R, která leží v jedné z polorovin $x \geq 0$ nebo $x \leq 0$ (nechť je to např, první případ) a na ose x je totožná s úsečkou $[-R, R]$ (D_R bude část C_R ležící v otevřené horní polorovině). Může se požadovat, aby $\min\{|z|; z \in D_R\}$ s rostoucím R konvergovalo k ∞ (např. se za D_R bere polokružnice se středem v 0 a poloměrem R).

Pokud h je zúžením holomorfní funkce f na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit $w_1, .., w_n$, pak pro dostatečně velká R je

$$\int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{w_i} f - \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{w_i} f - \lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Není nutné brát všechna $R > 0$, stačí neomezenou rostoucí posloupnost R_n, pro kterou je snadné spočítat $\lim_n \int_{D_{R_n}} f(z)\ \mathrm{d}z$.

Nejlepším případem je ten, kdy poslední limita je rovna 0. To nastane např. pro některé racionální funkce.

VĚTA. (TYP I. Integrál z racionální funkce.) Nechť P, Q jsou polynomy stupňů k, n resp., přičemž $n - k > 1$ a Q nemá reálné kořeny. Potom pro racionální funkci $f = \frac{P}{Q}$ platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{w_i} f\,.$$

Předchozí postup lze použít i na případ, kdy je racionální funkce vynásobená omezenou funkcí, např. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, nebo sice neomezenou funkcí, ale takovou, že limita v $\pm\infty$ této funkce lomené lineární funkcí je 0, např. $\sqrt{|x|}$.

U goniometrických funkcí, např. $\cos x$, bývá vhodné je rozšířit na $\mathbb{C}$ nikoli na $\cos z$, ale na složku mocniny $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$. Výsledkem je pak příslušná složka komplexního výsledku.

VĚTA. (Jordanovo lemma.) Nechť $\rho > 0$, $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ a funkce f je spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > \rho\}$ taková, že

$$\lim_{z\to\infty,\, \arg z \in [\alpha,\beta]} f(z) = 0\,.$$

Pak pro $r > \rho$, $b > 0$ a křivku $\varphi_r(t) = r\, e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$ je

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\varphi_r} f(z)\, e^{ibz}\ \mathrm{d}z = 0\,.$$

VĚTA. (TYP II. Integrál z racionální funkce vynásobené cos nebo sin) Nechť Q je racionální funkce taková, že nemá v $\mathbb{R}$ pól a pro $z \to \infty$ je $Q(z) = O(z^{-1})$ (t.j. stupeň jmenovatele alespoň o 1 větší než stupeň čitatele). Pro $b > 0$ označme $f(z) = Q(z)\, e^{ibz}$. Pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\cos(bx)\ \mathrm{d}x = \Re\left(2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \operatorname*{res}_a f\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\sin(bx)\ \mathrm{d}x = \Im\left(2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \operatorname*{res}_a f\right)$$

Integruje-li se funkce na intervalu $(0, +\infty)$, dá se přejít k sudé funkci na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a použít předchozí postup.

Někdy je nutné se vyhnout bodu 0, např. u funkce $\sin x/x$ – viz *Příklady*.

(TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu.)

Přechodem ke křivkovému integrálu se dají spočítat i některé integrály goniometrických funkcí přes omezené intervaly. Jako příklad lze vzít

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}\,.$$

Stačí zvolit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, čímž se z uvedeného integrálu stane integrál

$$\int_{|z|=1} \frac{2\ \mathrm{d}z}{z^2+6\mathrm{i}z-1}\,,$$

který se již spočte pomocí reziduové věty.

VĚTA. (TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Nechť $Q(a, b)$ je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$ v ní nedělíme nulou. Pak funkce

$$T(z) := Q\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)/(iz)$$

jedné komplexní proměnné z je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\ \mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \sum_{|a|<1,\, T(a)=\infty} \operatorname*{res}_a T\,.$$

Poznámky 3 Příklady 3 3 4 5 6

STANDARDY z kapitoly

SINGULARITY A REZIDUA

IZOLOVANÉ SINGULARITY

DEFINICE. Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce f se nazývá singulární, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

DEFINICE. Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce f se nazývá izolovaný singulární bod (stručněji izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus \{w\}$.

DEFINICE. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

- odstranitelná, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n;
- pól řádu k ($k \in \mathbb{N}$), jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$;
- podstatná, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n;

Místo „pól řádu 1" se říká častěji jednoduchý pól.

VĚTA. Nechť w je izolovaný singulární bod funkce f.

1. V bodě w je odstranitelná singularita právě když $\lim\limits_{z\to w} f(z) \in \mathbb{C}$.
2. V bodě w je pól právě když $\lim\limits_{z\to w} f(z) = \infty$.
3. V bodě w je podstatná singularita právě když $\lim\limits_{z\to w} f(z)$ neexistuje.

VĚTA. (Pickard) Je-li w podstatná singularita funkce f, pak na každém okolí bodu w nabývá f všech hodnot z $\mathbb{C}$ kromě nejvýše jedné.

REZIDUA

Nechť funkce f je holomorfní v mezikruží $M = \{z; 0 < |z-w| < R\}$, má tam Laurentův rozvoj $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$ a C je jednoduchá uzavřená křivka ležící v M a obsahující w ve svém vnitřku, pak

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C (z-w)^n\ \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} a_{-1}\,.$$

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém mezikruží $0 < |z-w| < R$. Koeficient s indexem -1 v Laurentově rozvoji funkce f okolo w se nazývá reziduum funkce f v bodě w a značí se $\operatorname{res}_w f$.

VĚTA. (Reziduová věta) Nechť f je holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C kromě konečně mnoha bodů $w_1, ..., w_k$ ležících uvnitř C. Pak platí

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{w_i} f\,.$$

Z konstrukce rozvoje f v Laurentovu řadu je znám vzorec

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_r} f(z)\ \mathrm{d}z\,,$$

kde C_r je vhodná kružnice okolo w.

VĚTA. (Pravidlo 1) Nechť f má v bodě w pól řádu k. Pak

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to w} \big((z-w)^k f(z)\big)^{(k-1)}\,.$$

VĚTA. (Pravidlo 2) Nechť f, g jsou holomorfní v bodě w a $f(w) \neq 0$. Je-li $g(w) = 0, g'(w) \neq 0$, pak

$$\operatorname{res}_w \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)}\,.$$

VĚTA. (Pravidlo 3) Je-li h holomorfní ve w a g má jednoduchý pól ve w, pak $\mathrm{res}_w(gh) = h(w)\mathrm{res}_w g$.

DEFINICE. Nechť f je holomorfní v nějakém okolí nekonečna. Definujeme

$$\mathrm{res}_\infty f = \mathrm{res}_0 \left(\frac{-1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)\right) .$$

VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

(TYP I. Integrál z racionální funkce.)

Nechť h je reálná funkce reálné proměnné. Integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx}$ se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

Vezme se $R > 0$ a jednoduchá uzavřená křivka C_R, která leží v jedné z polorovin $x \ge 0$ nebo $x \le 0$ (nechť je to např, první případ) a na ose x je totožná s úsečkou $[-R, R]$ (D_R bude část C_R ležící v otevřené horní polorovině). Může se požadovat, aby $\min\{|z|; z \in D_R\}$ s rostoucím R konvergovalo k ∞ (např. se za D_R bere polokružnice se středem v 0 a poloměrem R).

Pokud h je zúžením holomorfní funkce f na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit $w_1, .., w_n$, pak pro dostatečně velká R je

$$\int_{-R}^{R} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_{\,w_i} f - \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_{\,w_i} f - \lim_{R\to\infty} \int_{D_R} f(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Není nutné brát všechna $R > 0$, stačí neomezenou rostoucí posloupnost R_n, pro kterou je snadné spočítat $\lim_n \int_{D_{R_n}} f(z)\ \mathrm{d}z$.

Nejlepším případem je ten, kdy poslední limita je rovna 0. To nastane např. pro některé racionální funkce.

VĚTA. (TYP I. Integrál z racionální funkce.) Nechť P, Q jsou polynomy stupňů k, n resp., přičemž $n - k > 1$ a Q nemá reálné kořeny. Potom pro racionální funkci $f = \frac{P}{Q}$ platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_{\,w_i} f\,.$$

VĚTA. (Jordanovo lemma.) Nechť $\rho > 0$, $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ a funkce f je spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > \rho\}$ taková, že

$$\lim_{z\to\infty,\,\arg z\in[\alpha,\beta]} f(z) = 0\,.$$

Pak pro $r > \rho$, $b > 0$ a křivku $\varphi_r(t) = r\, e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$ je

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\varphi_r} f(z)\, e^{ibz}\ \mathrm{d}z = 0\,.$$

VĚTA. (TYP II. Integrál z racionální funkce vynásobené cos nebo sin) Nechť Q je racionální funkce taková, že nemá v $\mathbb{R}$ pól a pro $z \to \infty$ je $Q(z) = O(z^{-1})$ (t.j. stupeň jmenovatele alespoň o 1 větší než stupeň čitatele). Pro $b > 0$ označme $f(z) = Q(z)\, e^{ibz}$. Pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\cos(bx)\ \mathrm{d}x = \Re \left(2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \mathrm{res}_a f \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\sin(bx)\ \mathrm{d}x = \Im\left(2\pi i \cdot \sum_{a\in\mathbb{C}^+,\, Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f\right)$$

Integruje-li se funkce na intervalu $(0, +\infty)$, dá se přejít k sudé funkci na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a použít předchozí postup.

Někdy je nutné se vyhnout bodu 0, např. u funkce $\sin x/x$ – viz *Příklady*.

(TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu.)

Přechodem ke křivkovému integrálu se dají spočítat i některé integrály goniometrických funkcí přes omezené intervaly. Jako příklad lze vzít

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{3+\sin x}\,.$$

Stačí zvolit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, čímž se z uvedeného integrálu stane integrál

$$\int_{|z|=1} \frac{2\ \mathrm{d}z}{z^2+6\mathrm{i}z-1}\,,$$

který se již spočte pomocí reziduové věty.

VĚTA. (TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Nechť $Q(a,b)$ je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2=1$ v ní nedělíme nulou. Pak funkce

$$T(z) := Q\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)/(iz)$$

jedné komplexní proměnné z je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\ \mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \sum_{|a|<1,\, T(a)=\infty} \operatorname{res}_a T\,.$$

VĚTA. Nechť f má jednoduchý pól v z_0, nechť $\varphi_r(t) = z_0 + re^{it}$ pro $t \in [t_0, t_0+\alpha]$. Pak

$$\lim_{r\to 0} \int_{\varphi_r} f(z)\ \mathrm{d}z = \alpha \cdot i \cdot \operatorname{res}_{z_0} f\,.$$

Rozšíření Gama funkce na komplexní čísla.

Podle definice je $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ pro $x > 0$. Dejte nyní za x komplexní číslo z, použijte pro obecnou mocninu její hlavní větev a zjistíte, že $\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ konverguje, jakmile $\Re(z) > 0$. V této polorovině je holomorfní (derivace za integrálem).

Podle vztahu $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ se rozšíří definice Gama funkce na celou rovinu kromě bodů $0, -1, -2, -3, \ldots$. Tato rozšířená funkce je holomorfní, v bodech $0, -1, -2, -3, \ldots$ jsou jednoduché póly a $\mathrm{r}es_{-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$ (ověřte).

ζ funkce.

V předchozí kapitole v *Příkladech 1* bylo ukázáno, že řada $\sum_{n=1}^\infty n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \le 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty n^{-z}$ holomorfní.

ζ lze rozšířit na holomorfní funkci všude kromě bodu 1, kde má jednoduchý pól s reziduem 1, v bodech $-2, -4, -6, \ldots$ jsou jednoduché nulové hodnoty. Dále má ζ nekonečně mnoho nulových hodnot v pásu $0 < \Re(z) < 1$ (Riemannova hypotéze tvrdí, že tyto nulové hodnoty všechny leží na přímce $\Re(z) = 1/2$).

Existuje zajímavá souvislost ζ funkce s prvočísly:

$$\zeta(z) = \Pi_{n=1}^\infty \frac{1}{1-p_n^{-z}}\cdot,$$

kde p_n je n-té prvočíslo. Rovnost platí pro $\Re(z) > 1$.

Příklad. Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}\,.$$

Použijte křivku C_R složenou z intervalů $[-R, -1/R]$, $[1/R, R]$ a půlkružnic $z = Re^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi)$ a $z = e^{\mathrm{i}t}/R, t \in [0, \pi)$ – tato poslední půlkružnice opačně orientovaná.

Příklad. Spočtěte

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{1 - 2a\sin x + a^2}$$

pro $0 \le a \le 1$.

Příklad. Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Řešení. Z předpisu funkce je vidět, že f má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Hodnotu rezidua v bodě 1 spočítáme podle vzorce

$$\mathrm{res}\,_1 f = \lim_{z\to 1} (z-1) f(z),$$

což je po dosazení

$$\mathrm{res}\,_1 f = \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Hodnotu rezidua v bodě -1 spočítáme podle vzorce

$$\mathrm{res}\,_{-1} f = \lim_{z\to -1} \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\left((z+1)^k f(z)\right).$$

Tedy,

$$\mathrm{res}\,_{-1} f = \lim_{z\to -1} \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z+1)^2\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Příklad. Vypočítejte integrál

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},$$

kde φ je záporně orientovaná kružnice $\{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| = 1\}$.

Řešení. K výpočtu integrálu použijeme reziduovou větu. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

má singularity v bodech

$$\begin{aligned}
z_1 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4},\\
z_2 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4},\\
z_3 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4},\\
z_4 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4},
\end{aligned}$$

což jsou póly prvního řádu.

Zajímají nás ale pouze body z_1, z_4, protože pouze ty leží ve vnitřku φ. Rezidua v těchto pólech mají hodnoty

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z_1} f &= \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}},\\ \operatorname{res}_{z_4} f &= \frac{1}{(z_4-z_2)(z_4-z_3)(z_4-z_1)} = \frac{-1+i}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Podle reziduové věty je proto integrál roven

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = -2\pi i\left(\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_4} f\right) = -2\pi i\frac{-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Řešení. Provedeme substituci $z = e^{i\theta}$, po níž bude

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}, \qquad \cos 3\theta = \frac{z^3+z^{-3}}{2}, \qquad \mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta.$$

Dostaneme tak

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_C \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5-4\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = -\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku.

Integrand má ve vnitřku této kružnice dvě singularity: pól 3. řádu v 0 a jednoduchý pól v 1/2.

Rezidua v těchto bodech mají hodnoty

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_0 f &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{z^3(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = \frac{21}{8},\\ \operatorname{res}_{1/2} f &= \lim_{z\to 1/2}\frac{(z-1/2)(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)} = -\frac{65}{24}\end{aligned}$$

A hledaný integrál je:

$$-\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2i}2\pi i\left(\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Příklad. Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

Řešení. Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice C. Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

Uvědomíme si ale, že nepotřebujeme znát jednotlivá rezidua, nýbrž jejich součet, který je (až na znaménko) roven hodnotě rezidua v nekonečnu.

Pro $|z| > 1$ je

$$\frac{1}{z^{10}+1} = \frac{1}{z^{10}}\frac{1}{1+z^{-10}} = \frac{1}{z^{10}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-10n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{-10n}.$$

Takže reziduum integrandu v nekonečnu je 0, a tedy i hledaný integrál má hodnotu 0.