FOURIEROVA TRANSFORMACE

Fourierova transformace je užitečná transformace, která pomáhá řešit řadu úloh tím, že je přetransformuje na jednodušší úlohy, ty vyřešíma a výsledky přetransformujeme zpět.

Má jednu slabinu. Základním prostředím pro ni jsou komplexní čísla.

FOURIEROVA VĚTA

V kapitole o Fourierových řadách byla dokázána Fourierova věta (připomeňte si, že $\widehat{f}(x) = (f(x_+) + f(x_-))/2$):

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. Potom

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(u(x-v)) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \, .$$

Výsledek je možné nyní přeformulovat s použitím komplexních funkcí. Fourierova řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(\pi n x/l) + b_n \sin(\pi n x/l) \Big)$$

lze přepsat do tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\mathrm{i}\pi n x/l} \, , \text{ kde } c_n = \frac{a_n - \mathrm{i} b_n}{2} \text{ pro } n \geq 0 \, , c_n = \frac{a_{-n} + \mathrm{i} b_{-n}}{2} \text{ pro } n < 0 \, .$$

Odtud snadno vyplývá, že pro všechna celá n je

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\mathrm{i}\pi n x/l} \, \mathrm{d}x \, .$$

Pokud znovu provedete postup, který vede k rovnosti ve Fourierově větě, a použijete předchozí modifikovaný zápis Fourierových řad, dostanete Fourierovu větu v následujícím tvaru:

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. Potom

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\mathrm{i}vu} \, \mathrm{d}u \Big) e^{\mathrm{i}vx} \, \mathrm{d}v \, .$$

Rozumí si to dobře s komplexními čísly.

Na základě této věty se definuje Fourierova transformace:

DEFINICE. Pro reálné funkce f a F definované na $\mathbb{R}$ se definuje

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathcal{F}_{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}s\,.$$

Funkce $\mathcal{F}(f)$ se nazývá Fourierova transformace funkce f, funkce $\mathcal{F}_{-1}(F)$ se nazývá inverzní Fourierova transformace funkce F.

Fourierovu větu lze nyní formulovat ve tvaru:
Nechť φ je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a $\int_{\mathbb{R}} |\varphi|$ konverguje. Potom

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}_{-1}(\varphi)) = \mathcal{F}_{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) = \widehat{\varphi}\,.$$

Nenechte se mýlit. Je to opravdu tak úžasně jednoduché.

Sinová a kosinová Fourierova transformace

Je-li funkce f nebo F sudá, lze Fourierovu transformace vyjádřit jiným způsobem:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\big(\cos(st) - \mathrm{i}\sin(st)\big)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(st)\,\mathrm{d}t\,,\\ \mathcal{F}_{-1}(F)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\big(\cos(ts) + \mathrm{i}\sin(ts)\big)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F(s)\cos(ts)\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Podobně lze vyjádřit Fourierovu transformaci liché funkce:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\big(\cos(st) - \mathrm{i}\sin(st)\big)\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}\int_0^{+\infty} f(t)\sin(st)\,\mathrm{d}t\,,\\ \mathcal{F}_{-1}(F)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\big(\cos(ts) + \mathrm{i}\sin(ts)\big)\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_0^{+\infty} F(s)\sin(ts)\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Jedná se o podobnou situaci jako u Fourierových řad sudých nebo lichých funkcí: ve výsledku se vyskytovaly nenulové koeficienty jen u $\cos$, resp. u $\sin$.

Tzv. kosinová Fourierova řada funkce f byla Fourieriova řada funkce, která se rovnala f na $[0,\infty)$ a byla doplněna na sudou funkci na záporných číslech.

Podobně sinová Fourierova řada funkce f byla Fourieriova řada funkce, která se rovnala f na $(0,\infty)$ a byla doplněna na lichou funkci na záporných číslech.

Stejně lze postupovat u Fourierovy transformace.

Aby nebylo nutné si pamatovat dvě různé konstanty před integrály, změní se jedna konstanta na 1 a druhá na $2/\pi$:

DEFINICE. Pro reálné funkce f a F definované na $(0,\infty)$ se definuje

$$\mathcal{F}^c(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos(st)\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathcal{F}^c_{-1}(F)(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F(s)\cos(ts)\,\mathrm{d}s\,.$$

Funkce $\mathcal{F}^c(f)$ se nazývá kosinová Fourierova transformace funkce f, funkce $\mathcal{F}^c_{-1}(F)$ se nazývá inverzní kosinová Fourierova transformace funkce F.

$$\mathcal{F}^s(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin(st)\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathcal{F}^s_{-1}(F)(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F(s)\sin(ts)\,\mathrm{d}s\,.$$

Funkce $\mathcal{F}^s(f)$ se nazývá sinová Fourierova transformace funkce f, funkce $\mathcal{F}^s_{-1}(F)$ se nazývá inverzní sinová Fourierova transformace funkce F.

Z Fourierovy věty se dostává:

VĚTA. Nechť φ je po částech hladká na $(0,\infty)$ a $\int_0^\infty |\varphi|$ konverguje. Potom

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^c(\mathcal{F}^c_{-1}(\varphi)) &= \mathcal{F}^c_{-1}(\mathcal{F}^c(\varphi)) = \widehat{\varphi}\,,\\ \mathcal{F}^s(\mathcal{F}^s_{-1}(\varphi)) &= \mathcal{F}^s_{-1}(\mathcal{F}^s(\varphi)) = \widehat{\varphi}\,.\end{aligned}$$

Ani trochu se to neplete ...

Poznámky 1 Příklady 1 1

VLASTNOSTI FOURIEROVY TRANSFORMACE

Následující vlastnosti jsou i s důkazy (kromě poslední vlastnosti o součinu a konvoluci) podobné těm z teorie Laplaceovy transformace.

Následuje odvození vlastností. Jsou to jenom hrátky s integrály.

V následujících vzorcích lze předpokládat, že uvedené funkce jsou po částech spojité absolutně integrovatelné.

Posunutí

Posunutí funkce f o a je funkce $f(t-a)$.

Fourierova transformace posunuté funkce a posunutá Fourierova transformace (oboje posunutí o a) se spočítá snadno:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t-a))(s) &= e^{-\mathrm{i}as}\mathcal{F}(f(t))(s) \\ \mathcal{F}(f(t))(s-a) &= \mathcal{F}(e^{\mathrm{i}at}f(t))(s)\,.\end{aligned}$$

Zvětšení

Zvětšením (nebo zmenšením) funkce f se míní funkce $f(at)$ pro $a \neq 0$. Následující výpočty jsou velmi jednoduché (druhá rovnost plyne z první):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(at))(s) &= \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f(t))\Big(\frac{s}{a}\Big) \\ \mathcal{F}(f(t))(as) &= \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f\Big(\frac{t}{a}\Big))(s)\,.\end{aligned}$$

Derivace

Vztah derivace a Fourierovy transformace je podstatný pro použití na řešení diferenciálních rovnic.

Rovnosti se dokáží snadno pomocí integrace po částech. Je nutné předpokládat, že všechny uvedené integrály konvergují. spojitá.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f'(t))(s) &= \mathrm{i}s\mathcal{F}(f(t))(s) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{F}(f(t))(s) &= \mathcal{F}(-\mathrm{i}tf(t))(s)\,.\end{aligned}$$

Indukcí se dokáží rovnosti pro derivace vyšších řádů:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f^{(n)}(t))(s) &= (\mathrm{i}s)^n\mathcal{F}(f(t))(s) \\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathcal{F}(f(t))(s) &= \mathcal{F}((-\mathrm{i}t)^n f(t))(s)\,.\end{aligned}$$

Integrace

Vzorce na integraci Fourierovy transformace se získají z předchozích vzorců pro derivace:

Je-li g primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ taková, že $\lim_{t\to-\infty} g(t) = \lim_{t\to-+\infty} g(t) = 0$, pak $\mathcal{F}(g)(s) = \mathcal{F}(f)(s)/(is)$.

Funkce $\mathcal{F}(f)(s)$ je primitivní k funkci $\mathcal{F}(-f(t)/(\mathrm{i}t))(s)$ na $\mathbb{R}$.

Konvoluce

Na rozdíl od Laplaceovy transformace převádí Fourierova transformace součin funkcí na konvoluci obrazů. V případě funkcí na $\mathbb{R}$ se konvoluce definuje trochu jinak:

DEFINICE. Konvoluce na $\mathbb{R}$ dvou funkcí f, g je funkce

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Vlastnosti konvoluce jsou probrány v *Otázkách*.

Platí

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g) \\ \mathcal{F}(f\,g) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)\,. \end{aligned}$$

Důkaz. Pravá strana první rovnosti se rozepíše pomocí definice transformace a ve vzniklém dvojnásobném integrálu se dá substituce $x + y = u$

$$\mathcal{F}(f)(s)\,\mathcal{F}(g)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}s(x+y)} f(x)g(y)\ \mathrm{d}y \Big)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}su} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\ \mathrm{d}x \Big)\ \mathrm{d}u = \mathcal{F}(f * g)(s)\,.$$

Použijete-li předchozí postup pro $\mathcal{F}_{-1}$, dostanete rovnost $\mathcal{F}_{-1}(f)\,\mathcal{F}_{-1}(g) = \mathcal{F}_{-1}(f * g)/2\pi$. Když se do této rovnosti dosadí $\mathcal{F}(f)$ místo f a $\mathcal{F}(g)$ místo g, dostane se rovnost $f\,g = \mathcal{F}_{-1}(\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g))$, odkud pomocí inverze plyne druhá dokazovaná rovnost. $\diamond$

Použití Fourierovy transformace na hledání řešení diferenciálních a integrálních rovnic je podobné použití Laplaceovy transformace – viz příklady.

BTW, neznám jednoduchou aplikaci Fourierovy transformace.

Příklady 2 Otázky 2 2

KOMPLEXNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Na rozdíl od Laplaceovy transformace, která se dá použít i pro funkce neomezené v nekonečnu, Fourierova transformace (jako reálná funkce) nelze aplikovat ani na nenulové konstantní funkce. Tento nedostatek se dá odstranit umožněním komplexních hodnot.

Definice Fourierovy transformace má smysl i pro komplexní funkce reálné proměnné f a pro komplexní čísla s. Dostane se pak komplexní funkce komplexní proměnné (změníme označení proměnné):

$$\mathcal{F}(f)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}zt}\ \mathrm{d}t\,.$$

To je jízda!

Kde je tato funkce definována a kde je holomorfní?

VĚTA. Nechť f je po částech hladká a $|f(t)| \leq ke^{-at}$ pro $t > 0$ a $|f(t)| \leq ke^{-bt}$ pro $t < 0$ a pro nějakou konstantu k. Potom $\mathcal{F}(f)(z)$ je holomorfní v pásu $b < \Im(z) < a$.

Důkaz. Pro $t > 0$ je zřejmě

$$|f(t)e^{-\mathrm{i}tz}| \leq |e^{-t(\mathrm{i}z+a)}| \leq e^{t(\Im(z)-a)}$$

a poslední funkce je integrovatelná na $(0, \infty)$ pro $\Im(z) < a$.

Podobně pro $t < 0$:

$$|f(t)e^{-\mathrm{i}tz}| \leq |e^{-t(\mathrm{i}z+b)}| \leq e^{t(\Im(z)-b)}$$

a poslední funkce je integrovatelná na $(-\infty, 0)$ pro $\Im(z) > b$.

Protože funkce $tf(t)$ má stejná exponenciální omezení jako f (až na jinou konstantu k), lze $\mathcal{F}(f)(z)$ derivovat v uvedeném pásu za integračním znamením, takže $\mathcal{F}(f)(z)$ je tam holomorfní. $\diamond$

Jak to vypadá s inverzní transformací pro $\mathcal{F}(f)(z)$?

Obecně ji nelze definovat jako pro reálné funkce, protože $\mathcal{F}(f)(z)$ nemusí být na reálné ose (tj. pro $\Im(z) = 0$) vůbec definována.

Nechť je $\mathcal{F}(f)(z)$ definována na přímce $\Im(z) = c$. Potom $\mathcal{F}(f)(s + \mathrm{i}c)$ je definována na $\mathbb{R}$ a rovná se $\mathcal{F}(e^{ct}f(t))(z)$. Tedy platí

$$e^{ct}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(s+\mathrm{i}c)e^{ist}\,\mathrm{d}s = \frac{e^{ct}}{2\pi}\int_{-\infty+\mathrm{i}c}^{+\infty+\mathrm{i}c} \mathcal{F}(f)(u)e^{iut}\,\mathrm{d}s$$

kde pro poslední integrál byla použita substituce $u = s + \mathrm{i}c$ a uvedené meze značí integraci po přímce $\Im(z) = c$.

Po zkrácení výrazem e^{ct} se dostane inverzní transformace pro uvedený případ, takže

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+\mathrm{i}c}^{+\infty+\mathrm{i}c} \mathcal{F}(f)(s)e^{ist}\,\mathrm{d}s\,,$$

jakmile je $\mathcal{F}(f)(z)$ definována na přímce $\Im(z) = c$.

Zatím tam nevidím vůbec nic těžkého ani lehkého, nevím o čem se povídá.

Shrneme předchozí výsledky do věty:

VĚTA. Nechť f je po částech hladká a $|f(t)| \leq ke^{-at}$ pro $t > 0$ a $|f(t)| \leq ke^{-bt}$ pro $t < 0$ a pro nějakou konstantu k. Potom pro libovolné $c \in (b, a)$ je

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+\mathrm{i}c}^{+\infty+\mathrm{i}c} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t\Big)e^{ist}\,\mathrm{d}s\,,$$

Opravdu to funguje!

INVERZNÍ LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Laplaceova transformace se dá vyjádřit pomocí Fourierovy transformace:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ts}\,\mathrm{d}t = \mathcal{F}(f)(-\mathrm{i}s)\,,$$

jestliže definujeme $f(t) = 0$ pro $t < 0$.

Stejně jako u Fourierovy transformace je v definici Laplaceovy transformace možné chápat proměnnou s jako komplexní číslo a $\mathcal{L}(f)$ je tedy komplexní funkce komplexní proměnné.

Pokud je f exponenciálně omezená, tj. $|f(t)| \leq ke^{bt}$ pro nějaká reálná čísla k, b, je podle předchozí části funkce $\mathcal{F}(f)(-\mathrm{i}z)$ holomorfní pro $\Re(z) > b$ (ukažte to). Použitím předchozí části na získání inverze pro $\mathcal{F}(f)(-\mathrm{i}s)$ se dostane následující tvrzení.

VĚTA. Nechť f je po částech hladká komplexní funkce reálné proměnné, která je rovna 0 pro $t < 0$ a $|f(t)| \leq ke^{bt}$ pro nějaká reálná čísla k, b a pro $t > 0$. Potom $\mathcal{L}(f)(z)$ je holomorfní funkce na polorovině $\Re(z) > b$ a pro libovolné $c > b$ je

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\infty\mathrm{i}}^{c+\infty\mathrm{i}} \mathcal{L}(f)(s)e^{ts}\,\mathrm{d}s\,.$$

Uvedená integrace je po přímce kolmé k ose x v bodě c.

Nyní je možné počítat inverzní Laplaceovu transformaci pomocí uvedeného vzorce. Nicméně, přímý výpočet tohoto integrálu může být komplikovaný.

V některých případech je možné s výhodou použít reziduovou větu. Integrace po uvedené přímce se spočte limitou integrálů přes zvětšující se intervaly, které se doplní (většinou polokružnicí) na uzavřenou křivku.

Následující věta popisuje velkou třídu funkcí, pro které je možné takto inverzní Laplaceovu transformaci spočítat.

VĚTA. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ a existují $k, p > 0$ tak, že $|g(z)| \leq k|z|^{-p}$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$. Potom pro $c > \max\{\Re(z_1), ..., \Re(z_n)\}$ je

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\infty\mathrm{i}}^{c+\infty\mathrm{i}} g(z)e^{tz}\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{tz})\,.$$

Rezidua se prostě nemohou nepoužívat, když jsou tak roztomilá.

Důkaz. Nechť C je křivka skládající se z úsečky $C_1 = \{c+\mathrm{i}\tau; \tau \in [-R, R]\}$ a z polokružnice $C_2 = \{c+Re^{\mathrm{i}\tau}; \tau \in [\pi/2, 3\pi/2]\}$. Zvolí se $R > 0$ tak, že všechny singulární body $z_1, ..., z_n$ leží uvnitř C.

Podle reziduové věty je

$$\int_{C_1} g(z)e^{tz}\, \mathrm{d}z + \int_{C_2} g(z)e^{tz}\, \mathrm{d}z = \int_C g(z)e^{tz}\, \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{tz})\,.$$

Poslední výraz nezávisí na R a limita prvního integrálu pro $R \to \infty$ je počítaný integrál $\int_{c-\infty\mathrm{i}}^{c+\infty\mathrm{i}} g(z)e^{tz}\, \mathrm{d}z$. Stačí tedy ukázat

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} g(z)e^{tz}\, \mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} g(c+Re^{\mathrm{i}\tau})e^{t(c+R(\cos\tau+\mathrm{i}\sin\tau))}R\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\tau}\, \mathrm{d}\tau = 0\,.$$

Pro posledně integrovanou funkci platí pro $R > c$ odhad (dokažte)

$$\left|g(c+Re^{\mathrm{i}\tau})e^{t(c+R(\cos\tau+\mathrm{i}\sin\tau))}R\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\tau}\right| \le \frac{Rke^{tc\,p}}{R-c}\, e^{tR\cos\tau}\,.$$

Integrál z poslední exponenciály lze odhadnout následovně:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{tR\cos\tau}\, \mathrm{d}\tau = 2\int_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\tau}\, \mathrm{d}\tau \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-tR2\tau/\pi}\, \mathrm{d}\tau = \frac{\pi}{tR}(1-e^{-tR})\,.$$

takže výsledný odhad je

$$\left|\int_{C_2} g(z)e^{tz}\, \mathrm{d}z\right| \le \frac{\pi k e^{ct}}{t(R-c)^p}(1-e^{-tR})$$

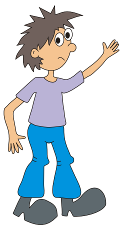
a poslední výraz konverguje k 0 pro $R \to \infty$. $\diamond$

Přeformulováním předchozí věty se dostává tvrzení o výpočtu inverzní Laplaceovy transformace:

DŮSLEDEK. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ a existují $k, p > 0$ tak, že $|g(z)| \le k|z|^{-p}$ pro dostatečně velká $|z|$. Potom

$$\mathcal{L}_{-1}(g(z))(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{tz})\,.$$

Tak jsme se na to podívali. Laplaceova i Fourierova transformace dává z komplexního pohledu dobrý smysl.



Ale nestačí mi na to můj šestý (reálný) smysl. Vznáší se tady komplexní mlha.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4 4 5 6

APLIKACE FOURIEROVY TRANSFORMACE

Fourierova transformace se používá na širokou škálu problémů. Jde mj. o diferenciální, diferenční a integrální rovnice.

K aplikacím si můžeme mimo Fourierovy transformace vybrat z velké rodiny příbuzných transformací známou Laplaceovu transformaci.

Nicméně nejsilnější je Fourierova transformace tam, kde se jedná o frekvence.

Frekvence jsou schovány v muzice (MP3), v obrázcích (JPEG), v kardiogramu, ...

Při Fourierově transformaci přecházíme z prostoru (signál) do frekvencí.

Klíčové kroky zajímavých aplikací

1. Transformace signálu.
2. Potřebné úpravy ve frekvencích.
3. Inverzní transformace.

Diskrétní Fourierova transformace

Nahradíme spojitý signál f za diskrétní posloupnost:

$$\{f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}\}.$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) z této konečné posloupnosti vytvoří diskrétní posloupnost jejich obrazů

$$\{F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}\}$$

pomocí vzorečku

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \left(e^{-2\pi i n/N}\right)^k .$$

Inverzní DFT je pak inverzní proces pomocí vzorečku

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \left(e^{-2\pi i n/N}\right)^k .$$

Pro zpracování zvuků (MP3) se používá modifikace DFT, modifikovaná Diskrétní kosínová Fourierova transformace se vzorečkem

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\left(\pi i \left(k + \frac{1}{2}\right) / N\right) .$$

DFT jde snadno rozšířit do více dimenzí a slouží mimo jiné ke zpracování obrazů (JPEG).

Rychlá Fourierova transformace

Vzoreček pro diskrétní Fourierovu transformaci

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \left(e^{-2\pi i n/N}\right)^k$$

je ve skutečnosti počítáním hodnoty polynomu $P(x) = \sum f_k x^k$ s koeficienty f_k v bodech

$$x = \omega_N^0\,, \omega_N^1, \ldots, \omega_n^{N-1}\,,$$

kde

$$\omega_N = e^{-2\pi i/N}$$

je N-tá odmocnina z jedničky.

Na to se používá Rychlá Fourierova transformace.

Rychlá Fourierova transformace (FFT) počítá hodnoty DFT pomocí následujícího triku.

Všimneme si, že výpočet hodnoty polynomu N-tého stupně potřebuje řádově N operací:

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-2} + x a_{n-1}) \cdots))\,.$$

To je takzvané Hornerovo schéma. Kdo by potřeboval řádově N^2 operací je od přírody pilný jako včelička.

Nechť je N sudé. Pro DFT máme počítat N hodnot polynomu $P(x) = \sum f_k x^k$ stupně $(N-1)$. Tedy lze očekávat řádově N^2 operací.

Trik spočívá v tom, že místo toho budeme počítat dva polynomy stupně nejvýše $N/2$

$$S(y) = f_0 + f_2 y + f_4 y^2 + \cdots$$

$$L(y) = f_1 + f_3 y + f_5 y^2 + \cdots$$

v $N/2$ bodech

$$(\omega_N^0)^2,\ (\omega_N^1)^2,\ \ldots,\ (\omega_N^{N-1})^2\,,$$

(je jich sice N, ale některé jsou v seznamu dvakrát, TRIK!!!), protože

$$P(x) = S(x^2) + x L(x^2)\,.$$

Tedy místo N^2 operací na jeden problém velikosti N s kvadratickou náročností dostaneme zhruba polovinu, protože zjednodušení vede na dva problémy poloviční velikosti, tedy $(N/2)^2 + (N/2)^2$ operací.

> Když se to spočítá pro rekurzivní použití tohoto triku, dostane se náročnost $n \log n$.

> Rychlá DFT je základem pro spoustu numerických výpočtů a my víme proč.

> Protože čas jsou prachy.

Podobně se použije FFT pro inverzní DFT:

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \left(e^{-2\pi i n/N}\right)^k .$$

STANDARDY z kapitoly

FOURIEROVA TRANSFORMACE

FOURIEROVA VĚTA

V kapitole o Fourierových řadách byla definována průměrovací operace na funkce $\widehat{f}(x) = (f(x_+)+f(x_-))/2$.

VĚTA. Nechť f je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a $\int_{\mathbb{R}} |f|$ konverguje. Potom

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-ivu} \, \mathrm{d}u \Big) e^{ivx} \, \mathrm{d}v .$$

DEFINICE. Pro reálné funkce f a F definované na $\mathbb{R}$ se definuje

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathcal{F}_{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}s\,.$$

Funkce $\mathcal{F}(f)$ se nazývá Fourierova transformace funkce f, funkce $\mathcal{F}_{-1}(F)$ se nazývá inverzní Fourierova transformace funkce F.

Nechť φ je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a $\int_{\mathbb{R}} |\varphi|$ konverguje. Potom

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}_{-1}(\varphi)) = \mathcal{F}_{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) = \widehat{\varphi}\,.$$

Sinová a kosinová Fourierova transformace

DEFINICE. Pro reálné funkce f a F definované na $(0,\infty)$ se definuje

$$\mathcal{F}^c(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos(st)\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathcal{F}^c_{-1}(F)(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F(s)\cos(ts)\,\mathrm{d}s\,.$$

Funkce $\mathcal{F}^c(f)$ se nazývá kosinová Fourierova transformace funkce f, funkce $\mathcal{F}^c_{-1}(F)$ se nazývá inverzní kosinová Fourierova transformace funkce F.

$$\mathcal{F}^s(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin(st)\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathcal{F}^s_{-1}(F)(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F(s)\sin(ts)\,\mathrm{d}s\,.$$

Funkce $\mathcal{F}^s(f)$ se nazývá sinová Fourierova transformace funkce f, funkce $\mathcal{F}^s_{-1}(F)$ se nazývá inverzní sinová Fourierova transformace funkce F.

Z Fourierovy věty se dostává:

VĚTA. Nechť φ je po částech hladká na $(0,\infty)$ a $\int_0^\infty |\varphi|$ konverguje. Potom

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^c(\mathcal{F}^c_{-1}(\varphi)) &= \mathcal{F}^c_{-1}(\mathcal{F}^c(\varphi)) = \widehat{\varphi}\,,\\ \mathcal{F}^s(\mathcal{F}^s_{-1}(\varphi)) &= \mathcal{F}^s_{-1}(\mathcal{F}^s(\varphi)) = \widehat{\varphi}\,.\end{aligned}$$

VLASTNOSTI FOURIEROVY TRANSFORMACE

Derivace

$$\mathcal{F}(f'(t))(s) = \mathrm{i}s\mathcal{F}(f(t))(s)$$

Konvoluce

DEFINICE. Konvoluce na $\mathbb{R}$ dvou funkcí f, g je funkce

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Platí

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)\,.$$

KOMPLEXNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

VĚTA. Nechť f je po částech hladká a $|f(t)| \leq ke^{-at}$ pro $t > 0$ a $|f(t)| \leq ke^{-bt}$ pro $t < 0$ a pro nějakou konstantu k. Potom $\mathcal{F}(f)(z)$ je holomorfní v pásu $b < \Im(z) < a$.

VĚTA. Nechť f je po částech hladká a $|f(t)| \leq ke^{-at}$ pro $t > 0$ a $|f(t)| \leq ke^{-bt}$ pro $t < 0$ a pro nějakou konstantu k. Potom pro libovolné $c \in (b, a)$ je

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\mathrm{i}c}^{+\infty+\mathrm{i}c} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}ts} \, \mathrm{d}t \Big) e^{\mathrm{i}st} \, \mathrm{d}s \, ,$$

APLIKACE FOURIEROVY TRANSFORMACE

Při Fourierově transformaci přecházíme z prostoru (signál) do frekvencí.

Klíčové kroky zajímavých aplikací

1. Transformace signálu.
2. Potřebné úpravy ve frekvencích.
3. Inverzní transformace.

Diskrétní Fourierova transformace

Nahradíme spojitý signál f za diskrétní posloupnost:

$$\{f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}\} \, .$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) z této konečné posloupnosti vytvoří diskrétní posloupnost jejich obrazů

$$\{F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}\}$$

pomocí vzorečku

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \left(e^{-2\pi i n/N} \right)^k \, .$$

Inverzní DFT je pak inverzní proces pomocí vzorečku

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \left(e^{-2\pi i n/N} \right)^k \, .$$

Rychlá Fourierova transformace

Vzoreček pro diskrétní Fourierovu transformaci

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \left(e^{-2\pi i n/N}\right)^k$$

je ve skutečnosti počítáním hodnoty polynomu $P(x) = \sum f_k x^k$ s koeficienty f_k v bodech

$$x = \omega_N^0\,, \omega_N^1, \ldots, \omega_n^{N-1}\,,$$

kde

$$\omega_N = e^{-2\pi i/N}$$

je N-tá odmocnina z jedničky.

Na to se používá Rychlá Fourierova transformace.

Rychlá Fourierova transformace (FFT) počítá hodnoty DFT pomocí následujícího triku.

Všimneme si, že výpočet hodnoty polynomu N-tého stupně potřebuje řádově N operací:

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-2} + x a_{n-1}) \cdots))\,.$$

To je takzvané Hornerovo schéma.

Nechť je N sudé. Pro DFT máme počítat N hodnot polynomu $P(x) = \sum f_k x^k$ stupně $(N-1)$. Tedy lze očekávat řádově N^2 operací.

Trik spočívá v tom, že místo toho budeme počítat dva polynomy stupně nejvýše $N/2$

$$S(y) = f_0 + f_2 y + f_4 y^2 + \cdots$$

$$L(y) = f_1 + f_3 y + f_5 y^2 + \cdots$$

v $N/2$ bodech

$$(\omega_N^0)^2,\ (\omega_N^1)^2,\ \ldots,\ (\omega_N^{N-1})^2\,,$$

(je jich sice N, ale některé jsou v seznamu dvakrát, TRIK!!!), protože

$$P(x) = S(x^2) + x L(x^2)\,.$$

Tedy místo N^2 operací na jeden problém velikosti N s kvadratickou náročností dostaneme zhruba polovinu, protože zjednodušení vede na dva problémy poloviční velikosti, tedy $(N/2)^2 + (N/2)^2$ operací.

Když se to spočítá pro rekurzivní použití tohoto triku, dostane se náročnost $n \log n$.

Rychlá DFT je základem pro spoustu numerických výpočtů a my víme proč.

Podobně se použije FFT pro inverzní DFT:

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \left(e^{-2\pi i n/N}\right)^k .$$