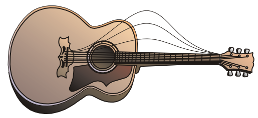
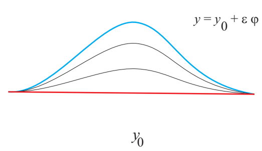
VARIAČNÍ POČET

Budeme hledat nejkratší spojnici dvou bodů na kytaře pomocí struny. Bude to úsečka. Proč? Protože při nepatrném nedodržení linearity se struna po utažení brání.



Funkce $\varepsilon \mapsto F(y_0 + \varepsilon\varphi)$ musí mít v bodě $\varepsilon = 0$ extrém (zde y_0 je správná pozice struny a F je funkce odpovídající tahu struny).



Místo uvažování všech možných funkcí v okolí správného řešení uvažujeme takzvanou variaci φ (ta je zpravidla malá).

A tak se v prostoru všech fukncí pohybujeme pomocí drobných lineárních segmentů.

A použijeme klasickou analýzu. Jde o funkci závisející na reálném ε.

A díky úžasným trikům lze úlohu řešit najednou pro všechny možné variace najednou.

Euler. Byl to on. On byl prostě číslo.

ZÁKLADY

V praxi se často hledají křivky nebo plochy, které minimalizují nebo maximalizují jisté hodnoty.

Např. se hledá nejkratší spojnice dvou bodů na dané ploše, nebo tvar zavěšeného lana (má minimální potenciální energii), nebo tvar tělesa, které má v pohybujícím se prostředí minimální odpor, atd.

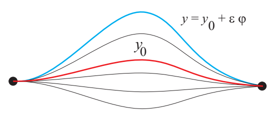
Nejdříve je nutné vyjádřit uvedené hodnoty matematickým výrazem a pro ten se pak hledá minimum nebo maximum.

V uvedených příkladech se dostávají postupně výrazy

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\ \mathrm{d}x \qquad \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\ \mathrm{d}x \qquad \int_a^b y'^3\ \mathrm{d}x$$

kde y je hledanou funkcí proměnné x.

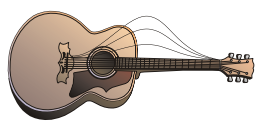
Ověřování, zda daná (nalezená) funkce opravdu např. minimalizuje uvedené hodnoty se provádí její malou změnou, variací. Po těchto změnách musí uvedené hodnoty vzrůst.



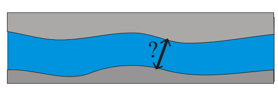
Variace na toto téma tvoří základ takzvaného variačního počtu.

Úlohy popsaného typu se rozdělují na několik základních typů.

První uvedený příklad hledání nejkratší spojnice dvou bodů v rovině je tzv. úloha s pevnými konci (hledané křivky začínají a končí v daných bodech).



Pokud se hledá nejkratší spojnice dvou křivek, jedná se o úlohu s volnými konci (začáteční a koncové body hledané křivky nejsou pevně dány).



Jestliže místo roviny hledáme nejkratší cestu mezi dvěma body nebo křivkami na dané ploše, mluví se o úlohách s podmínkou; hledá se funkce y splňující další podmínky – např. splňuje rovnici plochy nebo u příkladu zavěšeného lana má danou délku.

Pomocí variačního počtu lze řešit např. diferenciální nebo integrální rovnice – řešení rovnice minimalizuje určitý funkcionál.

A teď se naučíme, jak si ten funkcionál vymyslet.

Ve výše uvedených příkladech se hledala funkce y proměnné x pro kterou je výraz

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, \mathrm{d}x$$

minimální nebo maximální (při vhodné volbě F).

Zobrazení F se nazývá *funkcionál*, který je definován přinejmenším pro $x \in [a, b]$ a pro funkce y na $[a, b]$ mající derivaci, které mohou dále splňovat další podmínky – množina takovýchto funkcí y se označí $\mathcal{C}$.

Stejně jako u extrémů reálných funkcí jedné nebo více proměnných se i u extrémů uvedených funkcionálů rozlišuje *absolutní extrém* a lokální extrém, který se ve variačním počtu častěji nazývá *relativní extrém*. Jejich definice jsou zcela přirozené:

DEFINICE. Funkcionál F nabývá absolutního maxima na množině $\mathcal{C}$ pro křivku y_0, jestliže $y_0 \in \mathcal{C}$ a $F(y) \leq F(y_0)$ pro všechna $y \in \mathcal{C}$.

Funkcionál F nabývá relativního maxima na množině $\mathcal{C}$ pro křivku y_0, jestliže $y_0 \in \mathcal{C}$ a $F(y) \leq F(y_0)$ pro všechna $y \in U \cap \mathcal{C}$, kde U je nějaké okolí funkce y.

Co to je okolí funkce? Na množinách funkcí lze definovat okolí mnoha neekvivalentními způsoby a dostávají se neekvivalentní pojmy relativních extrémů.

Pro další postupy stačí použít jednak okolí popsané stejnoměrnou konvergencí funkcí a jednak okolí popsané stejnoměrnou konvergencí funkcí a jejich derivací:

Tady je hlavní moment k rozhodování. V jakém prostoru hledáme řešení? Použijeme suprémovou metriku u funkce (a někdy zároveň i její derivace).

DEFINICE. Nechť y je funkce definovaná na množině M. Okolí (0. řádu) funkce y je taková množina U funkcí g na M, pro níž existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{g; |g(x) - y(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x \in M\} \subset U\,.$$

Nechť y je funkce definovaná na množině M mající na M derivaci. Okolí (1. řádu) funkce y je taková množina U funkcí g majících na M derivaci, pro níž existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{g; |g(x) - y(x)| < \varepsilon, |g'(x) - y'(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x \in M\} \subset U\,.$$

Relativní extrémy pro okolí nultého řádu se nazývají *silné relativní extrémy*, pro okolí prvního řádu *slabé relativní extrémy*.

Zřejmě je každý absolutní extrém silným relativním extrémem a každý silný relativní extrém slabým relativním extrémem. Opaky těchto implikací neplatí.

Je třeba říci, že možných typů úloh, které jdou řešit pomocí variačního počtu je spousta.

Podíváme se jenom na některé typy.

ANO. Jenom to množné číslo mě děsí.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

ÚLOHY S PEVNÝMI KONCI

Za funkce, mezi kterými se hledá extrém funkcionálu, se v tomto případě berou části množiny $\mathcal{C} = \{y; y(a) = A, y(b) = B,\ \text{existuje spojitá } y''\}$.

Následuje nutná podmínka pro to, aby nějaká funkce byla slabým relativním extrémem funkcionálu.

VĚTA. Nechť funkce $f(x, y, y')$ má spojité parciální derivace 2.řádu na intervalu $[a, b]$. Jestliže funkcionál $F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ nabývá slabého relativního extrému pro funkci y_0 na množině $\mathcal{C}$, je y_0 řešením rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0\,.$$

Uvedená rovnice se nazývá *Eulerova rovnice*.

Když na to Euler přišel, neříkal tomu slabé řešení, ale dokonalé řešení.

Důkaz. Nechť např. y_0 je slabým relativním minimem, tj. absolutním minimem na nějakém ε-okolí U 1.řádu funkce y_0. Položíme $y = y_0 + \alpha v$, kde v je libovolná funkce na $[a, b]$ mající spojitou první derivaci, splňující $v(a) = v(b) = 0$ a taková, že $|v(x)| < \varepsilon, |v'(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in [a, b]$. Potom reálná funkce reálné proměnné

$$g(\alpha) = \int_a^b f(x, y_0(x) + \alpha v(x), y_0'(x) + \alpha v'(x))\,\mathrm{d}x$$

má na intervalu $[-1,1]$ minimum v 0 a tedy $g'(0)=0$, pokud derivace $g'(0)$ existuje. Ta se spočítá přehozením derivace a integrálu (což lze, protože se jedná o spojité funkce na omezeném uzavřeném intervalu):

$$g'(\alpha)=\int_a^b \Big(v(x)f_y(x,y_0+\alpha v,y_0'+\alpha v')+v'(x)f_{y'}(x,y_0+\alpha v,y_0'+\alpha v')\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Na integrál posledního sčítance v integrované funkci se použije integrace po částech:

$$\int_a^b v'(x)f_{y'}(x,y_0+\alpha v,y_0'+\alpha v')\,\mathrm{d}x=\Big[v(x)f_{y'}\Big]_{x=a}^b-\int_a^b v(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big)\,\mathrm{d}x=$$

$$=-\int_a^b v(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

protože $v(a)=v(b)=0$. Příslušné derivace funkce f v předchozích integrálech jsou v bodě $(x,y_0(x)+\alpha v(x),y_0'(x)+\alpha v'(x))$.

Pro $\alpha=0$ se dostává rovnost

$$\int_a^b v(x)\Big(f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x=0$$

pro všechny uvažované funkce v, kde nyní jsou příslušné derivace funkce f v bodě $(x,y_0(x),y_0'(x))$. Odtud lze již odvodit ze spojitosti funkcí, že

$$f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big)=0\,.$$

◇

Vilně vyhlížející v vypadlo ven velmi vesele.

Rozumím tomu správně: každé v je vilné?

Řešení Eulerovy rovnice se nazývají *extremály* a jsou to obdoby kritických bodů pro extrémy reálných funkcí reálných proměnných.

V extremálách může ale nemusí funkcionál dosahovat extrému.

Jde o podezření. Úloha se musí dořešit klasicky a to není snadné.

Jestliže se v Eulerově rovnici provede derivace podle x, dostává se diferenciální rovnice 2.řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0\,.$$

Teď jsme teprve dostali opravdu něco, co jde řešit.

Eulerova rovnice se obecně nevyřeší.

Existují však speciální případy, kdy lze tuto rovnici zjednodušit nebo vyřešit.

Proberte sami případ, kdy funkce f nezávisí na y'.

Funkce f nezávisí na x, y

Eulerova rovnice má potom tvar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0\,.$$

Případ $f_{y'y'} = 0$ dává pro každé y stejnou hodnotu funkcionálu F a je tedy nezajímavý. Případ $y'' = 0$ dává řešení $y(x) = C_1 x + C_2$, konstanty C_1 a C_2 se určí z okrajových podmínek (přímka musí procházet body (a, A), (b, B)).

Funkce f nezávisí na y

Eulerova rovnice má v tomto případě tvar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0\,,$$

takže výsledkem je diferenciální rovnice 1.řádu s konstantou C

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C\,.$$

Funkce f nezávisí na x

Eulerova rovnice má po vynásobení y' tvar

$$y' \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0\,.$$

Levá strana je derivací podle x funkce $y' f_{y'} - f$, takže výsledkem je diferenciální rovnice 1.řádu s konstantou C

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C \, .$$

I s těmito jednoduchými tvary spočítáme spoustu příkladů.

Tedy, pokud dovedeme řešit jednoduché diferenciální rovnice.

První a druhá variace

Pro funkcionál

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') \, \mathrm{d}x$$

jsme při odvozování Eulerovy rovnice sestrojili pomocnou funkci

$$g(\alpha) = F(y_0 + \alpha v) = \int_a^b f(x, y_0(x) + \alpha v(x), y_0'(x) + \alpha v'(x)) \, \mathrm{d}x$$

parametru α.

Eulerova rovnice odpovídala podmínce $g'(0) = 0$.

Obecně lze zkoumat Taylorův rozvoj ve tvaru

$$g(\alpha) = F(y_0) + \alpha V_1(y_0, v) + \frac{1}{2}\alpha^2 V_2(y_0, v) + \cdots \, ,$$

kde $V_1(y_0, v)$ nazýváme první variace funkcionálu F a značíme δF. Podobně $V_2(y_0, v)$ nazýváme druhá variace funkcionálu F a značíme $\delta^2 F$.

Nulovost první variace odpovídá Eulerově rovnici, pozitivní definitností druhé variace můžeme zjišťovat skutečné nabývání extrému v extremále (jde o nutnou podmínku pro minimalizaci).

Po spočtení vyjde

$$g''(\alpha) = \int_a^b f_{yy} v^2(x) + 2 f_{yy'} v(x) v'(x) + f_{y'y'} (v'(x))^2 \, \mathrm{d}x \, .$$

Tedy jde o definitnost matice tvořené druhými parciálními derivacemi f podle y a y'.

Postačující podmínka pro extrém

Eulerova rovnice je nutnou podmínkou pro nabývání extrému funkcionálu

$$F(y) = \int_a^b f(x,y,y')\,\mathrm{d}x\,.$$

Pokud je navíc funkce $f(x,y,y')$ konvexní ve svých proměnných y a y' současně, je extremála absolutním minimem funkcionálu F.

Konvexita se chápe současně pro obě proměnné, tedy jde o konvexní řezy funkce dvou proměnných ve všech směrech.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 2

ÚLOHY S VOLNÝMI KONCI

V předchozí části byly okrajové podmínky pro nalezené extremály v jistém smyslu pevné, extremály musely „začínat"v jednom pevně daném bodě a „končit"v jiném pevně zvoleném bodě.

Vyskytují se úlohy, kde se chce, aby extremály začínaly na dané křivce C_1 a končily na jiné křivce C_2 (nebo pro více proměnných na plochách).

To je např. úloha o nejkratší vzdálenosti mezi křivkami nebo plochami. Úlohy tohoto typu se nazývají úlohy s volnými konci:

Definují-li φ, ψ dvě hladké křivky v rovině, za funkce, mezi kterými se hledá extrém funkcionálu, se v tomto případě berou části množiny $\mathcal{C} = \{y; y(x_1) = \varphi(x_1), y(x_2) = \psi(x_2),$ existuje spojitá y'' na $[x_1,x_2]\}$ – body x_1, x_2 závisí na y, tj. pro různé funkce y mohou být různé i tyto body.

Přesněji by se tyto body měly značit $x_{1,y}, x_{2,y}$ a funkcionál má pak tvar

$$F(y) = \int_{x_{1,y}}^{x_{2,y}} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x\,.$$

Postup při hledání nutné podmínky je podobný jako u úlohu s pevnými konci.

VĚTA. Nechť funkce φ, ψ na $[p,q]$ mají spojité první derivace. Nechť funkce $f(x,y,y')$ má spojité parciální derivace 2.řádu na intervalu $[a,b]$. Jestliže funkcionál $F(y) = \int_{x_{1,y}}^{x_{2,y}} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$ nabývá slabého relativního extrému pro funkci y_0 (s konci $(a,A),(b,B)$) na množině $\mathcal{C}$, je y_0 řešením rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0\,,$$

a platí

$$\begin{aligned} f(x,y_0,y_0') + (\varphi'(x) - y_0'(x)) f_{y'} x, y_0, y_0') &= 0 \text{ pro } x = a\,,\\ f(x,y_0,y_0') + (\psi'(x) - y_0'(x)) f_{y'} x, y_0, y_0') &= 0 \text{ pro } x = b\,. \end{aligned}$$

Obě poslední podmínky se nazývají *podmínky transversality*.

Důkaz. Protože mezi funkcemi y, které jsou blízko y_0, jsou i funkce se stejnými konci $(a, A), (b, B)$, musí y_0 splňovat Eulerovu rovnici podle věty z předchozí části.

Zvolí se opět $y = y_0 + \alpha v$ začínající v bodě (a, A) a končící v bodě (b_α, B_α) na křivce ψ, kde v je funkce taková, že $|v(x)| < \varepsilon, |v'(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in [a, b]$. Potom reálná funkce reálné proměnné

$$g(\alpha) = \int_a^{b_\alpha} f(x, y_0(x) + \alpha v(x), y_0'(x) + \alpha v'(x))\, \mathrm{d}x$$

má na intervalu $[-1, 1]$ minimum v 0 a tedy $g'(0) = 0$. V tomto případě je nutné derivovat uvedený integrál i podle horní meze, takže

$$g'(\alpha) = f \frac{\mathrm{d}b_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} + \int_a^b \left(v f_y + v' f_{y'} \right)\, \mathrm{d}x\,.$$

Na integrál poslední funkce se opět použije integraci po částech:

$$\int_a^b v' f_{y'}\, \mathrm{d}x = \Big[v f_{y'} \Big]_{x=a}^{b_\alpha} - \int_a^b v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \mathrm{d}x = v(b_\alpha) f_{y'}(b_\alpha) - \int_a^b v(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \mathrm{d}x\,.$$

Na rozdíl od předchozí sekce nemusí být $v(b_\alpha) = 0$, takže kromě části odpovídající Eulerově rovnici je tu navíc výraz

$$f \frac{\mathrm{d}b_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} + v(b_\alpha) f_{y'}(b_\alpha)\,.$$

Pro malá α lze bod b_α odhadnout pomocí tečny na křivce ψ v bodě b:

$$B + (b_\alpha - b)\psi'(b) = y_0(b_\alpha) + \alpha v(b_\alpha)\,.$$

Tuto rovnost se zderivuje podle α:

$$\psi'(b) \frac{\mathrm{d}b_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = y_0'(b_\alpha) \frac{\mathrm{d}b_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} + v(b_\alpha)\,.$$

Z poslední rovnosti se vypočte derivace $\frac{\mathrm{d}b_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}$ pro $\alpha = 0$ a dosadí se do předchozí rovnosti $g(\alpha) = 0$. Výraz odpovídající Eulerově rovnici je roven 0, takže lze usoudit, že bude roven nule i výraz $f + (y' - \psi') f_{y'}$ v bodě b.

Podobným způsobem se odvodí příslušná rovnost v bodě a. $\diamond$

Klasika. Nakonec jde asi dokázat všechno.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

ÚLOHY S PODMÍNKOU

Často se stává, že množina $\mathcal{C}$ funkcí y, mezi kterými se hledá funkce minimalizující daný funkcionál $\int_a^b f(x, y, y')\, \mathrm{d}x$, je zúžena další podmínkou, která je vyjádřena integrálem $\int_a^b g(x, y, y')\, \mathrm{d}x = C$, pro nějakou funkci g. Následující dva příklady jsou typické:

Jaký tvar bude mít lano zavěšené na svých koncích v daných bodech?

Lano zaujme takovou polohu, aby jeho potenciální energie byla minimální.

Hledá se tedy funkce y, která splňuje okrajové podmínky (jako v úlohách s pevnými konci), minimalizuje funkcionál $\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\ \mathrm{d}x$ a navíc splňuje podmínku dané délky, tj. $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\ \mathrm{d}x = d$, kde d je předem dané číslo.

Řetězovka.

Jaký tvar má jednoduchá uzavřená křivka dané délky s maximálním obsahem svého vnitřku?

Řešením je křivka y, která maximalizuje funkcionál vyjadřující obsah vnitřku uzavřené jednoduché křivky (a splňuje okrajové podmínky - jaké jsou?) a opět navíc splňuje podmínku dané délky $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\ \mathrm{d}x = d$.

Kruh.

Poslední příklad je historicky nejdůležitější a podle něj se tyto úlohy nazývají *isoperimetrické úlohy*.

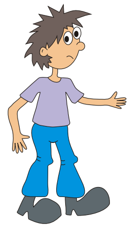
Lze dospět k následující nutné podmínce pro relativní extrémy těchto úloh.

VĚTA. Nechť f, g jsou funkce tří proměnných x, y, y', kde y je funkcí x na intervalu $[a, b]$ a obě funkce f, g mají spojité parciální derivace 2.řádu. Pro čísla A, B, C buď $\mathcal{C} = \{y; y$ má spojitou derivaci na $[a, b], y(a) = A, y(b) = B\}$ a $C' = \{y \in \mathcal{C}; \int_a^b g(x, y, y')\ \mathrm{d}x = C\}$.

Je-li y_0 slabý relativní extrém funkcionálu $\int_a^b f(x, y, y')\ \mathrm{d}x$ na množině $\mathcal{C}'$ a není extremálou funkcionálu $\int_a^b g(x, y, y')\ \mathrm{d}x$, pak existuje reálné číslo λ takové, že y_0 je slabý relativní extrém na množině $\mathcal{C}$ funkcionálu

$$\int_a^b \left(f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')\right)\ \mathrm{d}x\,.$$

Stejně jako u hledání extrémů funkcí více reálných proměnných se tu pomocí Lagrangeových multiplikátorů úloha s vázaným extrémem převede na úlohu s volným extrémem.



Tak se nám vlastně hodí kdeco. Nemám z toho radost.

Z předchozí věty lze usoudit tzv. *reciproční pravidlo*:

VĚTA. Nechť y_0 je extrémem popsaným v předchozí větě. Pak y_0 je i extrémem funkcionálu $\int_a^b g(x, y, y')\ \mathrm{d}x$ na množině $\mathcal{C}$ za podmínky $\int_a^b f(x, y, y')\ \mathrm{d}x = C\}$.

Jestliže tedy víte, že řešením druhého uvedeného příkladu je kružnice, tj. mezi všemi rovinnými obrazci s daným obvodem má kruh největší obsah, pak víte, že mezi všemi rovinnými obrazci s daným obsahem má kruh nejmenší obvod.

Řešení izoperimetrické úlohy odhalilo naplno možnosti matematické analýzy.

Pokud už řešíte nějakou variační úlohu typu extrém něčeho, zkuste najít smysluplnou interpertaci toho funkcionálu.

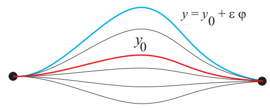
BTW, některé úlohy žádný smysl nemají. Těch smysluplných bylo málo.

Poznámky 4 Příklady 4 4 5 6

STANDARDY z kapitoly

VARIAČNÍ POČET

Ověřování, zda daná (nalezená) funkce opravdu např. minimalizuje hodnoty zadanho funkcionálu se provádí její malou změnou, variací. Po těchto změnách musí hodnoty funkcionálu vzrůst.



Variace na toto téma tvoří základ takzvaného variačního počtu.

V příkladech se hledá funkce y proměnné x pro kterou je výraz

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

minimální nebo maximální.

Zobrazení F se nazývá *funkcionál*, který je definován přinejmenším pro $x \in [a, b]$ a pro funkce y na $[a, b]$ mající derivaci, které mohou dále splňovat další podmínky – množina takovýchto funkcí y se označí $\mathcal{C}$.

Stejně jako u extrémů reálných funkcí jedné nebo více proměnných se i u extrémů uvedených funkcionálů rozlišuje *absolutní extrém* a lokální extrém, který se ve variačním počtu častěji nazývá *relativní extrém*. Jejich definice jsou zcela přirozené:

DEFINICE. Funkcionál F nabývá absolutního maxima na množině $\mathcal{C}$ pro křivku y_0, jestliže $y_0 \in \mathcal{C}$ a $F(y) \leq F(y_0)$ pro všechna $y \in \mathcal{C}$.

Funkcionál F nabývá relativního maxima na množině $\mathcal{C}$ pro křivku y_0, jestliže $y_0 \in \mathcal{C}$ a $F(y) \leq F(y_0)$ pro všechna $y \in U \cap \mathcal{C}$, kde U je nějaké okolí funkce y.

DEFINICE. Nechť y je funkce definovaná na množině M. Okolí (0. řádu) funkce y je taková množina U funkcí g na M, pro níž existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{g; |g(x) - y(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x \in M\} \subset U\,.$$

Nechť y je funkce definovaná na množině M mající na M derivaci. Okolí (1. řádu) funkce y je taková množina U funkcí g majících na M derivaci, pro níž existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{g; |g(x) - y(x)| < \varepsilon, |g'(x) - y'(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x \in M\} \subset U\,.$$

Relativní extrémy pro okolí nultého řádu se nazývají *silné relativní extrémy*, pro okolí prvního řádu *slabé relativní extrémy*.

Zřejmě je každý absolutní extrém silným relativním extrémem a každý silný relativní extrém slabým relativním extrémem. Opaky těchto implikací neplatí.

ÚLOHY S PEVNÝMI KONCI

Za funkce, mezi kterými se hledá extrém funkcionálu, se v tomto případě berou části množiny $\mathcal{C} = \{y; y(a) = A, y(b) = B,\ \text{existuje spojitá } y''\}$.

Následuje nutná podmínka pro to, aby nějaká funkce byla slabým relativním extrémem funkcionálu.

VĚTA. Nechť funkce $f(x,y,y')$ má spojité parciální derivace 2.řádu na intervalu $[a,b]$. Jestliže funkcionál $F(y) = \int_a^b f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$ nabývá slabého relativního extrému pro funkci y_0 na množině $\mathcal{C}$, je y_0 řešením rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big) = 0\,.$$

Uvedená rovnice se nazývá *Eulerova rovnice*.

Důkaz. Nechť např. y_0 je slabým relativním minimem, tj. absolutním minimem na nějakém ε-okolí U 1.řádu funkce y_0. Položíme $y = y_0 + \alpha v$, kde v je libovolná funkce na $[a,b]$ mající spojitou první derivaci, splňující $v(a) = v(b) = 0$ a taková, že $|v(x)| < \varepsilon, |v'(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in [a,b]$. Potom reálná funkce reálné proměnné

$$g(\alpha) = \int_a^b f(x, y_0(x) + \alpha v(x), y_0'(x) + \alpha v'(x))\,\mathrm{d}x$$

má na intervalu $[-1,1]$ minimum v 0 a tedy $g'(0) = 0$, pokud derivace $g'(0)$ existuje. Ta se spočítá přehozením derivace a integrálu (což lze, protože se jedná o spojité funkce na omezeném uzavřeném intervalu):

$$g'(\alpha) = \int_a^b \Big(v(x) f_y(x, y_0 + \alpha v, y_0' + \alpha v') + v'(x) f_{y'}(x, y_0 + \alpha v, y_0' + \alpha v')\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Na integrál posledního sčítance v integrované funkci se použije integrace po částech:

$$\int_a^b v'(x) f_{y'}(x, y_0 + \alpha v, y_0' + \alpha v')\,\mathrm{d}x = \Big[v(x) f_{y'}\Big]_{x=a}^b - \int_a^b v(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_a^b v(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

protože $v(a) = v(b) = 0$. Příslušné derivace funkce f v předchozích integrálech jsou v bodě $(x, y_0(x) + \alpha v(x), y_0'(x) + \alpha v'(x))$.

Pro $\alpha = 0$ se dostává rovnost

$$\int_a^b v(x)\Big(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x = 0$$

pro všechny uvažované funkce v, kde nyní jsou příslušné derivace funkce f v bodě $(x, y_0(x), y_0'(x))$. Odtud lze již odvodit ze spojitosti funkcí, že

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big) = 0\,.$$

$\diamond$

Idea důkazu je vyjádření nulovosti derivace ve směru v nezávisle na v.

Řešení Eulerovy rovnice se nazývají *extremály* a jsou to obdoby kritických bodů pro extrémy reálných funkcí reálných proměnných.

V extremálách může ale nemusí funkcionál dosahovat extrému.

Jde o podezření. Úloha se musí dořešit klasicky a to není snadné.

Jestliže se v Eulerově rovnici provede derivace podle x, dostává se diferenciální rovnice 2.řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y}y' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0\,.$$

Teď jsme dostali diferenciální rovnici druhého řádu, kterou musíme zkoumat.

Funkce f nezávisí na x, y

Eulerova rovnice má potom tvar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' = 0\,.$$

Případ $f_{y'y'} = 0$ dává pro každé y stejnou hodnotu funkcionálu F a je tedy nezajímavý. Případ $y'' = 0$ dává řešení $y(x) = C_1 x + C_2$, konstanty C_1 a C_2 se určí z okrajových podmínek (přímka musí procházet body (a, A), (b, B)).

Funkce f nezávisí na y

Eulerova rovnice má v tomto případě tvar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0\,,$$

takže výsledkem je diferenciální rovnice 1.řádu s konstantou C

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C\,.$$

Funkce f nezávisí na x

Eulerova rovnice má po vynásobení y' tvar

$$y'\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y}y' - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0\,.$$

Levá strana je derivací podle x funkce $y' f_{y'} - f$, takže výsledkem je diferenciální rovnice 1.řádu s konstantou C

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C\,.$$

První a druhá variace

Pro funkcionál

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

jsme při odvozování Eulerovy rovnice sestrojili pomocnou funkci

$$g(\alpha) = F(y_0 + \alpha v) = \int_a^b f(x, y_0(x) + \alpha v(x), y_0'(x) + \alpha v'(x))\,\mathrm{d}x$$

parametru α.

Eulerova rovnice odpovídala podmínce $g'(0) = 0$.

Obecně lze zkoumat Taylorův rozvoj ve tvaru

$$g(\alpha) = F(y_0) + \alpha V_1(y_0, v) + \frac{1}{2}\alpha^2 V_2(y_0, v) + \cdots\,,$$

kde $V_1(y_0, v)$ nazýváme první variace funkcionálu F a značíme δF. Podobně $V_2(y_0, v)$ nazýváme druhá variace funkcionálu F a značíme $\delta^2 F$.

Nulovost první variace odpovídá Eulerově rovnici, pozitivní definitností druhé variace můžeme zjišťovat skutečné nabývání extrému v extremále (jde o nutnou podmínku pro minimalizaci).

Po spočtení vyjde

$$g''(\alpha) = \int_a^b f_{yy} v^2(x) + 2 f_{yy'} v(x) v'(x) + f_{y'y'} (v'(x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Tedy jde o definitnost matice tvořené druhými parciálními derivacemi f podle y a y'.

Postačující podmínka pro extrém

Eulerova rovnice je nutnou podmínkou pro nabývání extrému funkcionálu

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x\,.$$

Pokud je navíc funkce $f(x, y, y')$ konvexní ve svých proměnných y a y' současně, je extremála absolutním minimem funkcionálu F.

Konvexita se chápe současně pro obě proměnné, tedy jde o konvexní řezy funkce dvou proměnných ve všech směrech.

ÚLOHY S VOLNÝMI KONCI

Vyskytují se úlohy, kde se chce, aby extremály začínaly na dané křivce C_1 a končily na jiné křivce C_2 (nebo pro více proměnných na plochách).

To je např. úloha o nejkratší vzdálenosti mezi křivkami nebo plochami. Úlohy tohoto typu se nazývají úlohy s volnými konci.

Definují-li φ, ψ dvě hladké křivky v rovině, za funkce, mezi kterými se hledá extrém funkcionálu, se v tomto případě berou části množiny $\mathcal{C} = \{y; y(x_1) = \varphi(x_1), y(x_2) = \psi(x_2),$ existuje spojitá y'' na $[x_1, x_2]\}$ – body x_1, x_2 závisí na y, tj. pro různé funkce y mohou být různé i tyto body.

Přesněji by se tyto body měly značit $x_{1,y}, x_{2,y}$ a funkcionál má pak tvar

$$F(y) = \int_{x_{1,y}}^{x_{2,y}} f(x, y, y')\ \mathrm{d}x\,.$$

Řešení musí automaticky splňovat Eulerovu rovnici. Navíc u úlohy s volnými konci dostaneme navíc v každém volném konci další rovnici.

Tyto rovnice se nazývají *podmínky transversality*.

ÚLOHY S PODMÍNKOU

Často se stává, že množina $\mathcal{C}$ funkcí y, mezi kterými se hledá funkce minimalizující daný funkcionál $\int_a^b f(x, y, y')\ \mathrm{d}x$, je zúžena další podmínkou, která je vyjádřena integrálem $\int_a^b g(x, y, y')\ \mathrm{d}x = C$, pro nějakou funkci g. Následující dva příklady jsou typické:

Jaký tvar bude mít lano zavěšené na svých koncích v daných bodech?

Lano zaujme takovou polohu, aby jeho potenciální energie byla minimální.

Hledá se tedy funkce y, která splňuje okrajové podmínky (jako v úlohách s pevnými konci), minimalizuje funkcionál $\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\ \mathrm{d}x$ a navíc splňuje podmínku dané délky, tj. $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\ \mathrm{d}x = d$, kde d je předem dané číslo.

Řetězovka.

Jaký tvar má jednoduchá uzavřená křivka dané délky s maximálním obsahem svého vnitřku?

Řešením je křivka y, která maximalizuje funkcionál vyjadřující obsah vnitřku uzavřené jednoduché křivky (a splňuje okrajové podmínky - jaké jsou?) a opět navíc splňuje podmínku dané délky $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\ \mathrm{d}x = d$.

Kruh.

Poslední příklad je historicky nejdůležitější a podle něj se podobné úlohy nazývají *isoperimetrické úlohy*.

Lze dospět k následující nutné podmínce pro relativní extrémy těchto úloh.

VĚTA. Nechť f, g jsou funkce tří proměnných x, y, y', kde y je funkcí x na intervalu $[a, b]$ a obě funkce f, g mají spojité parciální derivace 2.řádu. Pro čísla A, B, C buď $\mathcal{C} = \{y; y$ má spojitou derivaci na $[a, b], y(a) = A, y(b) = B\}$ a $C' = \{y \in \mathcal{C}; \int_a^b g(x, y, y')\ \mathrm{d}x = C\}$.

Je-li y_0 slabý relativní extrém funkcionálu $\int_a^b f(x, y, y')\ \mathrm{d}x$ na množině $\mathcal{C}'$ a není extremálou funkcionálu $\int_a^b g(x, y, y')\ \mathrm{d}x$, pak existuje reálné číslo λ takové, že y_0 je slabý relativní extrém na množině $\mathcal{C}$ funkcionálu

$$\int_a^b \left(f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')\right)\ \mathrm{d}x\,.$$

Stejně jako u hledání extrémů funkcí více reálných proměnných se tu pomocí Lagrangeových multiplikátorů úloha s vázaným extrémem převede na úlohu s volným extrémem.

Z předchozí věty lze usoudit tzv. *recipročni pravidlo*:

VĚTA. Nechť y_0 je extrémem popsaným v předchozí větě. Pak y_0 je i extrémem funkcionálu $\int_a^b g(x, y, y')\ \mathrm{d}x$ na množině $\mathcal{C}$ za podmínky $\int_a^b f(x, y, y')\ \mathrm{d}x = C\}$.

Jestliže tedy víte, že řešením druhého uvedeného příkladu je kružnice, tj. mezi všemi rovinnými obrazci s daným obvodem má kruh největší obsah, pak víte, že mezi všemi rovinnými obrazci s daným obsahem má kruh nejmenší obvod.

POZNÁMKY

Poznámky 1:

Termín *funkcionál* se používá v obecnějším smyslu, než je uvedeno v textu.

Je to zobrazení s reálnými (někdy komplexními) hodnotami definované na nějaké množině funkcí. Např. zobrazení, které všem reálným funkcím reálné proměnné, které mají derivaci v 0, přiřazuje právě hodnotu derivace v 0, je funkcionál.

V poslední kapitole o Banachových prostorech je uveden ještě obecnější pojem funkcionálu.

Uvedená okolí 0.řádu a 1.řádu pro omezené funkce mající omezené derivace na M odpovídají okolí v metrických prostorech definovaných metrikami

$$d(y, g) = \sup\{|g(x) - y(x)|; x \in M\}\,,\ \text{resp. } d(y, g) = \sup\{|g(x) - y(x)| + |g'(x) - y'(x)|; x \in M\}\,.$$

Zřejmým způsobem lze definovat okolí n-tého řádu. Tyto metriky se nazývají metriky (vzdálenosti) n-tého řádu.

Uvědomte si, že i spojitost funkcionálu F je 0.řádu nebo 1.řádu, podle toho, jaká okolí funkcí y se vezmou.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

Postačující podmínky pro extrémy jsou složité.

V některých případech je možné zjistit, zda pro určitou extremálu nastává extrém, použitím variace extremály nebo z povahy úlohy.

Pokud je známo, že pro funkci y_0 nabývá funkcionál F relativní extrém, lze někdy zjistit, o jaký extrém se jedná: *Je-li* $f_{y'y'} > 0$*, je v* y_0 *relativní slabé minimum, je-li* $f_{y'y'} < 0$*, je v* y_0 *relativní silné maximum.*

Uvedená úloha s pevnými konci má tři základní zobecnění.

To první nastává v případě, že se ve vytvořující funkci f vyskytují i vyšší derivace než jen první. Takovým případem je např. zjišťování prohnutí nosníku upevněného oběma konci. Postup získání nutné podmínky je podobný, jako v případě uvedeného v textu. řešení musí vyhovovat tzv. Eulerově-Poissonově rovnici, ze které je dobře vidět speciální případ, který byl odvozen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) - \ldots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right) = 0\,.$$

Tato rovnice lze psát jedonodušeji jako

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\Big(\frac{\partial f}{\partial y(i)}\Big)\,.$$

Výsledkem je funkce závisící kromě na x i na $2n$ konstantách, které se určí z počátečních podmínek.

Druhým zobecněním je případ, kdy f závisí kromě y i na jiné funkci z a její derivaci. To nastane např., pokud se řešení hledá ve tvaru parametrickém. Extremála pak vyhovuje dvěma Eulerovým rovnicím, jedné pro y (f se derivuje podle y a y') a druhé pro z (f se derivuje podle z a z').

Třetí zobecnění nastává při hledání řešení v prostoru vyšší dimenze, než jsou dvě.

Pak je extremála y funkcí více proměnných, např. proměnných (u,v); funkcionál má pak tvar $\int_P f(u,v,y,\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v})\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$, kde P je zadaná oblast.

Řešení musí splňovat tzv. Eulerovu-Ostrogradského rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}f_{y'} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}f_{y'}\Big) = 0\,.$$

Uvedené postupy lze modifikovat pro případ, kdy se hledá *po částech hladká křivka* minimalizující nebo maximalizující daný funkcionál.

Existují postupy, které zjistí, ve kterých bodech nemusí být extremála hladká. Tyto body rozdělí daný interval na menší intervaly, ve kterých řešení bude hladké.

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

Jednou ze základních úloh s volnými konci je hledání křivky ležící na dané ploše, spojující dva dané body a mající nejkratší délku.

Této křivce se říká *geodetická křivka*. V *Příkladech 2* bylo dokázáno, že geodetickými křivkami na kulové ploše jsou oblouky hlavních kružnic. Geodetické křivky v rovině jsou úsečky.

Úlohou s jedním volným koncem je modifikace úlohy o brachistochroně, kdy bod, z kterého se pouští částice, je pevný a konec cesty částice leží na svislé přímce neprocházející výchozím bodem.

Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

Příklad 2 se někdy nazývá problém Dido.

Dido byla fénická princezna, která s několika věrnými uprchla ze země před jistým nebezpečím a požádala panovníka jedné země v severní Africe o kousek země, který obepne kusem bůvolí kůže. Kůži rozstříhala na tenký pásek, oba konce položila k pobřeží a pásek rozložila do půlkružnice.

Studenti jedné univerzity zkusili, jak velký kus země mohla získat a podařilo se jim snadno obepnout fotbalové hřiště.

Příklad 3 má praktické zobecnění, kdy je dán obecný oblouk C na tenké desce variabilní hustoty $h(x,y)$ a má se doplnit obloukem dané délky na jednoduchou uzavřenou křivku takovou, že její vnitřek má největší hmotnost.

Konec poznámek 4.

PŘÍKLADY

Příklady 1:

1. Najděte vzdálenost 0.řádu a 1.řádu mezi funkcemi x^3 a x^5.

2. Ukažte, že funkcionál $F(y) = y'(0)$, definovaný na reálných funkcích reálné proměnné definovaných na $\mathbb{R}$ a majících derivaci všude, je spojitý 1.řádu a nespojitý 0.řádu na libovolné funkci.

3. Ukažte, že funkcionál $F(y) = \int_0^{\pi} y'^2\ \mathrm{d}x$, definovaný na reálných funkcích reálné proměnné definovaných na $[0,\pi]$ a majících derivaci všude, je spojitý 1.řádu a nespojitý 0.řádu v konstantní funkci 0.

Konec příkladů 1.

Příklady 2:

1. Ověřte vyřešením Eulerovy rovnice pro $f(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$, že nejkratší spojnicí dvou bodů A, B v rovině je úsečka s koncovými body A, B.

2. Nechť $a, b \geq 0$. Vezměte hladké křivky y spojující body $(0,a), (1,b)$ v 1.kvadrantu a najděte mezi nimi takovou, že rotací této křivky okolo osy x získáte těleso s nejmenším povrchem. Prozkoumejte, zda má tato úloha vždy řešení. [Vyjde $y = C\cosh\frac{x-k}{C}$.]

3. Spojte body $(0,0), /x_1, y_1)$, kde $y_1 < 0$, hladkou křivkou, po níž se bod co nejrychleji dostane (jen za pomoci gravitace) z počátku do bodu (x_1, y_1).

Tato křivka se nazývá *brachystochrona*. [Ukažte, že funkcionál pro tuto úlohu je daný funkcí $f(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{-2gy}}$.

Řešením je cykloida $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.]

4. Najděte tvar rotačního tělesa s osou symetrie totožnou s osou x, které klade nejmenší odpor plynu pohybujícímu se ve směru osy x. Lze zjistit, že křivka vytvářející rotační těleso minimalizuje funkcionál $\pi\rho v^2 \int_0^d yy'^3\,\mathrm{d}x$, kde ρ je hustota plynu a v je jeho ryclost (křivka spojuje počátek s bodem $(d,r), d,r > 0$.

5. Použijte funkcionál z *Otázky 2* pro $v(x,y) = y$ a (x,y) jsou body horní poloroviny. Řešením jsou polokružnice se středy na ose x (dokažte). Bod pohybující se po těchto polokružnicích nikdy nedojde na osu x (proč?).

Pokud definujete model geometrie, kde body jsou body horní poloroviny a přímky uvedené polokružnice, pak rovnoběžky jsou ty „přímky", které mají společný jeden bod na ose x (v „nekonečnu").

Ukažte, že je možné vést bodem, neležícím na dané „přímce", dvě rovnoběžky. Tento model je Poincarého model neeuklidovské geometrie.

6. Ukažte, že nehladká funkce $y = |x|$ minimalizuje funkcionál $\int_{-1}^1 (y'^2 - 1)^2\,\mathrm{d}x$ pro $y(-1) = y(1) = 0$. Existuje nějaký hladký relativní extrém?

7. Najděte extrémy následujících funkcionálů a určete o jaké extrémy se jedná:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{y'^2}\,\mathrm{d}x, y(2) = 4, y(3) = 9\,,$$

$$\int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3)\,\mathrm{d}x, y(1) = 0, y(2) = 1\,,$$

$$\int_0^a (1 - \mathrm{e}^{-y'^2})\,\mathrm{d}x, y(0) = 0, y(a) = b\,.$$

V posledním příkladu závisí výsledek (zda jde o minimum nebo maximum) na vztahu a, b.

8. Ukažte, že nejkratší křivka spojující dva body na kulové ploše je obloukem hlavní kružnice (tj., mající střed ve středu koule). [Stačí zvolit kouli danou parametricky $x = \sin u \cos v, y = \sin u \sin v, z = \cos u$ a body $P = (1,0,0), Q = (a, \sqrt{1-a^2}, 0)$. Hledanou křivku lze zapsat ve tvaru $v = g(u)$. Má se dokázat, že $g = 0$. Délka křivky je $\int_P^Q \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \int_P^Q \sqrt{1 + g'^2 \sin^2 u}$. Protože se v integrované funkci nevyskytuje g, je g řešením rovnice $g'^2 \sin^2 u = C\sqrt{1 + g'^2 \sin^2 u}$. Konstanta C musí být 0 (umocněním rovnosti by se jinak dostal spor pro malá u), takže $g = 0$.]

Konec příkladů 2.

Příklady 3:

1. Najděte vzdálenost bodu $(0,1)$ od elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$.

2. Vypočtěte vzdálenost mezi parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = x - 5$.

3. Hledá se hladká křivka jdoucí z bodu (x_0, y_0) a končící na křivce ψ, která minimalizuje funkcionál $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{e}^{\operatorname{arctg} y'} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$. Ukažte, že úhel mezi výslednou křivkou a křivkou ψ je $\pi/4$.

4. Ukažte, že řešením modifikované úlohy o brachistochroně zmíněné v *Poznámkách* je opět cykloida, která dosedá na svislou přímku kolmo.

Konec příkladů 3.

Příklady 4:

1. Najděte tvar lana zavěšeného mezi dvěma body. [Lano zaujímá polohu s nejmenší potenciální energií, a to vede k hledání minima funkcionálu

$$\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{při podmínkách} \quad \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = d > x_2 - x_1 y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2\,.$$

Řeší se tedy Eulerova rovnice pro funkci $\sqrt{1+y'^2}(y+\lambda)$. Výsledkem je hyperbolický kosinus.]

2. Najděte na intervalu $[a,b]$ funkci $y \geq 0$, jejíž graf má danou délku d a takovou, že $y(a)=0, y(b)=0$ a plocha mezi grafem y a osou x má největší obsah. [Pozor na případ, kdy se nedostane funkce.]

Praktická modifikace úlohy spočívá v druhém volném konci (tj. bod b na ose x není dán).

3. Najděte jednoduchou hladkou uzavřenou křivku dané délky, jejíž vnitřek má největší obsah. [Použijte parametrický popis křivky $(x(t),y(t))$, obsah vnitřku je pak $\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(xy'-x'y)\,\mathrm{d}t$.]

4. Najděte minimum funkcionálu $\int_0^\pi y'^2\,\mathrm{d}x$ za podmínek $\int_0^\pi y^2\,\mathrm{d}x = 1, y(0)=y(\pi)=0$.

5. Sestavte příslušný funkcionál a podmínku pro nalezení nejkratší spojnice bodu $(1,1,0)$ s bodem $(4,0,2)$ ležící na rotační ploše vytvořené rotací grafu funkce $\sqrt{x}$ na intervalu $[0,4]$ kolem osy x.

Konec příkladů 4.

OTÁZKY

Otázky 1:

1. Ukažte, že každý absolutní extrém je silným relativním extrémem a každý silný relativní extrém slabým relativním extrémem (vzhledem ke stejným množinám funkcí).

2. Ukažte, že je-li funkcionál spojitý v y_0 0.řádu, je spojitý i 1.řádu (mají-li tyto spojitosti smysl). Opak neplatí (viz *Příklady*).

Konec otázek 1.

Otázky 2:

1. Ukažte, že pokud má f tvar $\varphi(x,y)+\psi(x,y)y'$ a (x,y) náleží do jednoduše souvislé množiny, vyplývá z Eulerovy rovnice potenciálnost pole φ,ψ).

Odvoďte odtud, že pak je funkcionál pro dané koncové body konstantní.

2. Odvoďte stejným způsobem jako u brachystochrony, že má-li částice v bodě (x,y) rychlost $v(x,y)$, pak čas potřebný k tomu, aby se částice dostala z bodu (x_0,y_0) do bodu (x_1,y_1), je roven $\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\,\mathrm{d}x$.

Podle Fermatova principu si světlo nachází časově nejkratší spojnice bodů. To znamená, že křivka, podle které putuje světlo v nějakém prostředí z bodu (x_0,y_0) do bodu (x_1,y_1) minimalizuje uvedený funkcionál. V *Příkladech* je uvedena jiná zajímavá aplikace.

Konec otázek 2.

Otázky 3:

1. Ukažte, že pokud je funkce f tvaru $g(x,y)\sqrt{1+y'^2}$, dávají podmínky transversality rovnosti

$$\varphi'(a) = -\frac{1}{y'(a)}\,, \quad \psi'(b) = -\frac{1}{y'(b)}\,,$$

což znamená, že výsledná křivka je kolmá v koncových bodech na zadané křivky.

Speciálně to je případ hledání vzdálenosti dvou křivek v rovině: úsečka spojující dva nejbližší body na obou křivkách, je na tyto křivky v těchto bodech kolmá.

Konec otázek 3.

CVIČENÍ

Cvičení 1: Příklad. Určete křivky, na kterých může funkcionál

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \left((y')^2 - y^2 \right) \, \mathrm{d}x$$

nabývat extrémů při podmínce

$$y(0) = 0, \; y(\pi/2) = 1?$$

Příklad. Eulerova rovnice bude mít tvar

$$y'' + y = 0.$$

To může být pravda i nemusí. Raději to zkontrolujte.

BTW, pokud je to správně, tak je po starostech.

Je to lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty, jejíž řešení snadno najdete:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Konstanty $C_1, \; C_2$ určíme z okrajových podmínek jako $C_1 = 0, \; C_2 = 1$.

Z toho plyne, že extrému se může nabývat pouze na $y = y(x) = \sin x$.

Konec cvičení 1.

Cvičení 2: Příklad. Určete křivky, na kterých může funkcionál

$$F(y) = \int_0^{1} \left((y')^2 + 12xy \right) \, \mathrm{d}x$$

nabývat extrémů při podmínce

$$y(0) = 0, \; y(1) = 1?$$

Řešení. Eulerova rovnice bude mít tvar

$$y'' - 6x = 0.$$

Dvojím integrováním dostaneme řešení:

$$y(x) = x^3 + C_1 x + C_2..$$

Konstanty $C_1,\ C_2$ určíme z okrajových podmínek jako $C_1 = 0,\ C_2 = 0$.
Z toho plyne, že extrému se může nabývat pouze na $y = y(x) = x^3$.

Tedy ještě jednou pro méně chápavé: zadávané příklady jsou snadné ...

Konec cvičení 2.

Cvičení 3: Příklad. Určete podmínku transversality pro funkcionály typu

$$F(y) = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y)\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Lehce zjistíme, že podmínka transversality je

$$A(x,y)\sqrt{1+(y')^2} + \frac{A(x,y)y'}{\sqrt{1+(y')^2}}(\varphi' - y') = 0,$$

což po úpravě dává

$$\frac{A(x,y)(1+\varphi' y')}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0.$$

Za předpokladu, že v koncovém bodě je $A(x,y) \neq 0$, dostaneme $1 + \varphi' y' = 0$, neboli $y' = -\frac{1}{\varphi'}$.
Konec cvičení 3.

Cvičení 4: Příklad. Najděte minimum funkcionálu

$$F(y) = \int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$$

na množině

$$C = \{y \in C^1[1,2],\ y(1) = 0,\ y(2) = 1\}.$$

Řešení. Jelikož integrand (označme jej f) závisí pouze na x a y', má Eulerova rovnice tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'}(x,y') = 0,$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = konst. = c,$$

$$(y')^2(1-c^2x^2) = c^2x^2,$$

$$y' = \frac{cx}{\sqrt{1-c^2x^2}}, \qquad 4c^2 \leq 1,\ |c| \leq \frac{1}{2}.$$

Kdyby bylo $c = 0$, pak by funkce y byla konstantní a nesplňovala okrajové podmínky. Pro $c \neq 0$ máme

$$y = \int \frac{cx\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-c^2x^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{1-c^2x^2} + c_1,$$

tedy

$$y - c_1 = \frac{1}{c}\sqrt{1-c^2x^2}, \quad (y-c_1)^2 + x^2 = \frac{1}{c^2},$$

což je kus kružnice se středem $(0, c_1)$ a poloměrem $1/|c|$.
Z okrajových podmínek pak dostaneme

$$c_1^2 + 1 = \frac{1}{c^2}, \quad (1-c_1)^2 + 4 = \frac{1}{c^2}, \quad , c_1 = 2, c = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

S jídlem roste chuť. Příští příklad spočítám sám.

Chápete, jakou dalo práci najít příklad, který jde snadno spočítat?

Zkuste to taky. Je to adrenalin.

Konec cvičení 4.

Cvičení 5: Příklad. Najděte extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_{-1}^{1} (xy')^2 \, \mathrm{d}x$$

na množině

$$C = \Big\{ y \in C^1[-1,1] : \; y(-1) = -1, \; y(1) = 1 \Big\}.$$

Řešení. Eulerova rovnice bude mít tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 y') = 0.$$

Tedy,

$$x^2 y' = konst. = C.$$

Kdyby $C = 0$, pak by bylo $y' = 0$, a tudíž y konstantní, což nelze kvůli okrajovým podmínkám. Pro $C \neq 0$, máme

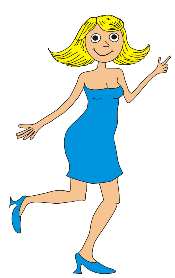
$$y' = \frac{C}{x^2}, \qquad x \neq 0.$$

Tato diferenciální rovnice má řešení

$$y = -\frac{C}{x} + C_1,$$

které ale neleží v množině C.

Takže nás vlastně nezajímá.



Funkcionál F proto na množině C nemá žádný lokální extrém.

Snadno ale zjistíme, že posloupnost funkcí

$$y_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{\arctan n}$$

splňuje okrajové podmínky, $y_n \to \operatorname{sign}$ a

$$\begin{aligned} f(y_n) &= \int_{-1}^{1} x^2 \left(\frac{n}{(1+n^2x^2)\arctan n} \right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2(\arctan n)^2} \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{(\arctan n)^2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+n^2x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n} \frac{1}{\arctan n} \to 0. \end{aligned}$$

Protože je funkcionál F nezáporný, je $\inf F = 0$, ale na množině C se nenabývá.

To bylo opravdu COOL.

To byli super Minimalizátoři.

BTW, mám rád, když úloha nemá řešení.

Konec cvičení 5.

Cvičení 6: Příklad. Najděte extremály funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 (y^2 + x^2 y') \, \mathrm{d}x$$

s podmínkami

$$y(0) = 0, \;\; y(1) = a.$$

Řešení. Eulerova rovnice má tvar

$$\frac{\partial y^2}{\partial y} - \frac{\partial x^2}{\partial x} = y - x = 0.$$

Integrand v předpisu funkcionálu závisí lineárně na y'.

Z Eulerovy rovnice vidíme, že první okrajová podmínka $y(0) = 0$ je splněna, ale druhá okrajová podmínka je splněna jen pro $a = 1$. Pro $a \neq 1$ neexistuje extremála vyhovující okrajovým podmínkám.

Taky vás zajímá, co jsme vlastně spočítali.

Zkuste si tu úlohu interpretovat jako stavbu sjezdovky z bodu $(1, 0)$ dolů do $(0, 0)$. Přitom chce stavitel platit za množství sněhu, jeho dopravu do výšky a ještě navíc za zvláštní prachy za sklon. Na první pohled vypadá, že nejlevnější bude žádná sjezdovka . . .

. . . což jsem tušil.

Konec cvičení 6.