VARIAČNÍ POČET

ZÁKLADY

V praxi se často hledají křivky nebo plochy, které minimalizují nebo maximalizují jisté hodnoty.

Např. se hledá nejkratší spojnice dvou bodů na dané ploše, nebo tvar zavěšeného lana (má minimální potenciální energii), nebo tvar tělesa, které má v pohybujícím se prostředí minimální odpor, atd.

Nejdříve je nutné vyjádřit uvedené hodnoty matematickým výrazem a pro ten se pak hledá minimum nebo maximum.

V uvedených příkladech se dostávají postupně výrazy

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int_a^b y'^3\,\mathrm{d}x$$

kde y je hledanou funkcí proměnné x.

Ověřování, zda daná (nalezená) funkce opravdu např. minimalizuje uvedené hodnoty se provádí její malou změnou, variací. Po těchto změnách musí uvedené hodnoty vzrůst.

Úlohy popsaného typu se rozdělují na několik základních typů.

První uvedený příklad hledání nejkratší spojnice dvou bodů v rovině je tzv. úloha s pevnými konci (hledané křivky začínají a končí v daných bodech).

Pokud se hledá nejkratší spojnice dvou křivek, jedná se o úlohu s volnými konci (začáteční a koncové body hledané křivky nejsou pevně dány).

Jestliže místo roviny hledáme nejkratší cestu mezi dvěma body nebo křivkami na dané ploše, mluví se o úlohách s podmínkou; hledá se funkce y splňující další podmínky – např. splňuje rovnici plochy nebo u příkladu zavěšeného lana má danou délku.

Pomocí variačního počtu lze řešit např. diferenciální nebo integrální rovnice – řešení rovnice minimalizuje určitý funkcionál.

Ve výše uvedených příkladech se hledala funkce y proměnné x pro kterou je výraz

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

minimální nebo maximální (při vhodné volbě F).

Zobrazení F se nazývá *funkcionál*, který je definován přinejmenším pro $x \in [a, b]$ a pro funkce y na $[a, b]$ mající derivaci, které mohou dále splňovat další podmínky – množina takovýchto funkcí y se označí $\mathcal{C}$.

Stejně jako u extrémů reálných funkcí jedné nebo více proměnných se i u extrémů uvedených funkcionálů rozlišuje *absolutní extrém* a lokální extrém, který se ve variačním počtu častěji nazývá *relativní extrém*. Jejich definice jsou zcela přirozené:

DEFINICE. Funkcionál F nabývá absolutního maxima na množině $\mathcal{C}$ pro křivku y_0, jestliže $y_0 \in \mathcal{C}$ a $F(y) \le F(y_0)$ pro všechna $y \in \mathcal{C}$.

Funkcionál F nabývá relativního maxima na množině $\mathcal{C}$ pro křivku y_0, jestliže $y_0 \in \mathcal{C}$ a $F(y) \le F(y_0)$ pro všechna $y \in U \cap \mathcal{C}$, kde U je nějaké okolí funkce y.

Co to je okolí funkce? Na množinách funkcí lze definovat okolí mnoha neekvivalentními způsoby a dostávají se neekvivalentní pojmy relativních extrémů.

Pro další postupy stačí použít jednak okolí popsané stejnoměrnou konvergencí funkcí a jednak okolí popsané stejnoměrnou konvergencí funkcí a jejich derivací:

DEFINICE. Nechť y je funkce definovaná na množině M. Okolí (0. řádu) funkce y je taková množina U funkcí g na M, pro níž existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{g; |g(x) - y(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x \in M\} \subset U \,.$$

Nechť y je funkce definovaná na množině M mající na M derivaci. Okolí (1. řádu) funkce y je taková množina U funkcí g majících na M derivaci, pro níž existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{g; |g(x) - y(x)| < \varepsilon, |g'(x) - y'(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x \in M\} \subset U \,.$$

Relativní extrémy pro okolí nultého řádu se nazývají *silné relativní extrémy*, pro okolí prvního řádu *slabé relativní extrémy*.

Zřejmě je každý absolutní extrém silným relativním extrémem a každý silný relativní extrém slabým relativním extrémem. Opaky těchto implikací neplatí.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

ÚLOHY S PEVNÝMI KONCI

Za funkce, mezi kterými se hledá extrém funkcionálu, se v tomto případě berou části množiny $\mathcal{C} = \{y; y(a) = A, y(b) = B, \text{ existuje spojitá } y''\}$.

Následuje nutná podmínka pro to, aby nějaká funkce byla slabým relativním extrémem funkcionálu.

VĚTA. Nechť funkce $f(x, y, y')$ má spojité parciální derivace 2.řádu na intervalu $[a, b]$. Jestliže funkcionál $F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, \mathrm{d}x$ nabývá slabého relativního extrému pro funkci y_0 na množině $\mathcal{C}$, je y_0 řešením rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big) = 0 \,.$$

Uvedená rovnice se nazývá *Eulerova rovnice*.

Řešení Eulerovy rovnice se nazývají *extremály* a jsou to obdoby kritických bodů pro extrémy reálných funkcí reálných proměnných.

V extremálách může ale nemusí funkcionál dosahovat extrému.

Jestliže se v Eulerově rovnici provede derivace podle x, dostává se diferenciální rovnice 2.řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' + \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0 \,.$$

Eulerova rovnice se obecně nevyřeší.

Existují však speciální případy, kdy lze tuto rovnici zjednodušit nebo vyřešit.

Proberte sami případ, kdy funkce f nezávisí na y'.

Funkce f nezávisí na x, y

Eulerova rovnice má potom tvar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0 \,.$$

Případ $f_{y'y'} = 0$ dává pro každé y stejnou hodnotu funkcionálu F a je tedy nezajímavý. Případ $y'' = 0$ dává řešení $y(x) = C_1 x + C_2$, konstanty C_1 a C_2 se určí z okrajových podmínek (přímka musí procházet body $(a, A), (b, B)$).

Funkce f nezávisí na y

Eulerova rovnice má v tomto případě tvar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'} \Big) = 0 \,,$$

takže výsledkem je diferenciální rovnice 1.řádu s konstantou C

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C \,.$$

Funkce f nezávisí na x

Eulerova rovnice má po vynásobení y' tvar

$$y' \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial f}{\partial y} \Big) = 0 \,.$$

Levá strana je derivací podle x funkce $y' f_{y'} - f$, takže výsledkem je diferenciální rovnice 1.řádu s konstantou C

$$y' \, \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C \,.$$

První a druhá variace

Pro funkcionál

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') \, \mathrm{d}x$$

jsme při odvozování Eulerovy rovnice sestrojili pomocnou funkci

$$g(\alpha) = F(y_0 + \alpha v) = \int_a^b f(x, y_0(x) + \alpha v(x), y_0'(x) + \alpha v'(x)) \, \mathrm{d}x$$

parametru α.

Eulerova rovnice odpovídala podmínce $g'(0) = 0$.

Obecně lze zkoumat Taylorův rozvoj ve tvaru

$$g(\alpha) = F(y_0) + \alpha V_1(y_0, v) + \frac{1}{2} \alpha^2 V_2(y_0, v) + \cdots \,,$$

kde $V_1(y_0, v)$ nazýváme první variace funkcionálu F a značíme δF. Podobně $V_2(y_0, v)$ nazýváme druhá variace funkcionálu F a značíme $\delta^2 F$.

Nulovost první variace odpovídá Eulerově rovnici, pozitivní definitností druhé variace můžeme zjišťovat skutečné nabývání extrému v extremále (jde o nutnou podmínku pro minimalizaci).

Po spočtení vyjde

$$g''(\alpha) = \int_a^b f_{yy} v^2(x) + 2 f_{yy'} v(x) v'(x) + f_{y'y'} (v'(x))^2 \, \mathrm{d}x \,.$$

Tedy jde o definitnost matice tvořené druhými parciálními derivacemi f podle y a y'.

Postačující podmínka pro extrém

Eulerova rovnice je nutnou podmínkou pro nabývání extrému funkcionálu

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') \, \mathrm{d}x \,.$$

Pokud je navíc funkce $f(x,y,y')$ konvexní ve svých proměnných y a y' současně, je extremála absolutním minimem funkcionálu F.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 2

ÚLOHY S VOLNÝMI KONCI

V předchozí části byly okrajové podmínky pro nalezené extremály v jistém smyslu pevné, extremály musely „začínat"v jednom pevně daném bodě a „končit"v jiném pevně zvoleném bodě.

Vyskytují se úlohy, kde se chce, aby extremály začínaly na dané křivce C_1 a končily na jiné křivce C_2 (nebo pro více proměnných na plochách).

To je např. úloha o nejkratší vzdálenosti mezi křivkami nebo plochami. Úlohy tohoto typu se nazývají úlohy s volnými konci:

Definují-li φ, ψ dvě hladké křivky v rovině, za funkce, mezi kterými se hledá extrém funkcionálu, se v tomto případě berou části množiny $\mathcal{C} = \{y; y(x_1) = \varphi(x_1), y(x_2) = \psi(x_2),$ existuje spojitá y'' na $[x_1,x_2]\}$ – body x_1, x_2 závisí na y, tj. pro různé funkce y mohou být různé i tyto body.

Přesněji by se tyto body měly značit $x_{1,y}, x_{2,y}$ a funkcionál má pak tvar

$$F(y) = \int_{x_{1,y}}^{x_{2,y}} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x\,.$$

Postup při hledání nutné podmínky je podobný jako u úlohu s pevnými konci.

VĚTA. Nechť funkce φ, ψ na $[p,q]$ mají spojité první derivace. Nechť funkce $f(x,y,y')$ má spojité parciální derivace 2.řádu na intervalu $[a,b]$. Jestliže funkcionál $F(y) = \int_{x_{1,y}}^{x_{2,y}} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$ nabývá slabého relativního extrému pro funkci y_0 (s konci $(a,A),(b,B)$) na množině $\mathcal{C}$, je y_0 řešením rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big) = 0\,,$$

a platí

$$\begin{aligned} f(x,y_0,y_0') + (\varphi'(x) - y_0'(x)) f_{y'} x, y_0, y_0') &= 0 \text{ pro } x = a\,,\\ f(x,y_0,y_0') + (\psi'(x) - y_0'(x)) f_{y'} x, y_0, y_0') &= 0 \text{ pro } x = b\,. \end{aligned}$$

Obě poslední podmínky se nazývají *podmínky transversality*.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

ÚLOHY S PODMÍNKOU

Často se stává, že množina $\mathcal{C}$ funkcí y, mezi kterými se hledá funkce minimalizující daný funkcionál $\int_a^b f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$, je zúžena další podmínkou, která je vyjádřena integrálem $\int_a^b g(x,y,y')\,\mathrm{d}x = C$, pro nějakou funkci g. Následující dva příklady jsou typické:

Jaký tvar bude mít lano zavěšené na svých koncích v daných bodech?

Lano zaujme takovou polohu, aby jeho potenciální energie byla minimální.

Hledá se tedy funkce y, která splňuje okrajové podmínky (jako v úlohách s pevnými konci), minimalizuje funkcionál $\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ a navíc splňuje podmínku dané délky, tj. $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = d$, kde d je předem dané číslo.

Jaký tvar má jednoduchá uzavřená křivka dané délky s maximálním obsahem svého vnitřku?

Řešením je křivka y, která maximalizuje funkcionál vyjadřující obsah vnitřku uzavřené jednoduché křivky (a splňuje okrajové podmínky - jaké jsou?) a opět navíc splňuje podmínku dané délky $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = d$.

Poslední příklad je historicky nejdůležitější a podle něj se tyto úlohy nazývají *isoperimetrické úlohy*.

Lze dospět k následující nutné podmínce pro relativní extrémy těchto úloh.

VĚTA. Nechť f, g jsou funkce tří proměnných x, y, y', kde y je funkcí x na intervalu $[a, b]$ a obě funkce f, g mají spojité parciální derivace 2.řádu. Pro čísla A, B, C buď $\mathcal{C} = \{y; y$ má spojitou derivaci na $[a, b], y(a) = A, y(b) = B\}$ a $C' = \{y \in \mathcal{C}; \int_a^b g(x, y, y')\,\mathrm{d}x = C\}$.

Je-li y_0 slabý relativní extrém funkcionálu $\int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ na množině $\mathcal{C}'$ a není extremálou funkcionálu $\int_a^b g(x, y, y')\,\mathrm{d}x$, pak existuje reálné číslo λ takové, že y_0 je slabý relativní extrém na množině $\mathcal{C}$ funkcionálu

$$\int_a^b \left(f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')\right)\,\mathrm{d}x\,.$$

Stejně jako u hledání extrémů funkcí více reálných proměnných se tu pomocí Lagrangeových multiplikátorů úloha s vázaným extrémem převede na úlohu s volným extrémem.

Z předchozí věty lze usoudit tzv. *reciproční pravidlo*:

VĚTA. Nechť y_0 je extrémem popsaným v předchozí větě. Pak y_0 je i extrémem funkcionálu $\int_a^b g(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ na množině $\mathcal{C}$ za podmínky $\int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x = C\}$.

Jestliže tedy víte, že řešením druhého uvedeného příkladu je kružnice, tj. mezi všemi rovinnými obrazci s daným obvodem má kruh největší obsah, pak víte, že mezi všemi rovinnými obrazci s daným obsahem má kruh nejmenší obvod.

Poznámky 4 Příklady 4 4 5 6

STANDARDY z kapitoly

VARIAČNÍ POČET

Ověřování, zda daná (nalezená) funkce opravdu např. minimalizuje hodnoty zadanho funkcionálu se provádí její malou změnou, variací. Po těchto změnách musí hodnoty funkcionálu vzrůst.

V příkladech se hledá funkce y proměnné x pro kterou je výraz

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

minimální nebo maximální.

Zobrazení F se nazývá *funkcionál*, který je definován přinejmenším pro $x \in [a, b]$ a pro funkce y na $[a, b]$ mající derivaci, které mohou dále splňovat další podmínky – množina takovýchto funkcí y se označí $\mathcal{C}$.

Stejně jako u extrémů reálných funkcí jedné nebo více proměnných se i u extrémů uvedených funkcionálů rozlišuje *absolutní extrém* a lokální extrém, který se ve variačním počtu častěji nazývá *relativní extrém*. Jejich definice jsou zcela přirozené:

DEFINICE. Funkcionál F nabývá absolutního maxima na množině $\mathcal{C}$ pro křivku y_0, jestliže $y_0 \in \mathcal{C}$ a $F(y) \leq F(y_0)$ pro všechna $y \in \mathcal{C}$.

Funkcionál F nabývá relativního maxima na množině $\mathcal{C}$ pro křivku y_0, jestliže $y_0 \in \mathcal{C}$ a $F(y) \leq F(y_0)$ pro všechna $y \in U \cap \mathcal{C}$, kde U je nějaké okolí funkce y.

DEFINICE. Nechť y je funkce definovaná na množině M. Okolí (0. řádu) funkce y je taková množina U funkcí g na M, pro níž existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{g; |g(x) - y(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x \in M\} \subset U\,.$$

Nechť y je funkce definovaná na množině M mající na M derivaci. Okolí (1. řádu) funkce y je taková množina U funkcí g majících na M derivaci, pro níž existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{g; |g(x) - y(x)| < \varepsilon, |g'(x) - y'(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x \in M\} \subset U\,.$$

Relativní extrémy pro okolí nultého řádu se nazývají *silné relativní extrémy*, pro okolí prvního řádu *slabé relativní extrémy*.

Zřejmě je každý absolutní extrém silným relativním extrémem a každý silný relativní extrém slabým relativním extrémem. Opaky těchto implikací neplatí.

ÚLOHY S PEVNÝMI KONCI

Za funkce, mezi kterými se hledá extrém funkcionálu, se v tomto případě berou části množiny $\mathcal{C} = \{y; y(a) = A, y(b) = B,$ existuje spojitá $y''\}$.

Následuje nutná podmínka pro to, aby nějaká funkce byla slabým relativním extrémem funkcionálu.

VĚTA. Nechť funkce $f(x,y,y')$ má spojité parciální derivace 2.řádu na intervalu $[a,b]$. Jestliže funkcionál $F(y) = \int_a^b f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$ nabývá slabého relativního extrému pro funkci y_0 na množině $\mathcal{C}$, je y_0 řešením rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big) = 0\,.$$

Uvedená rovnice se nazývá *Eulerova rovnice*.

Řešení Eulerovy rovnice se nazývají *extremály* a jsou to obdoby kritických bodů pro extrémy reálných funkcí reálných proměnných.

V extremálách může ale nemusí funkcionál dosahovat extrému.

Jestliže se v Eulerově rovnici provede derivace podle x, dostává se diferenciální rovnice 2.řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial y}y' + \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0\,.$$

Funkce f nezávisí na x, y

Eulerova rovnice má potom tvar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' = 0\,.$$

Případ $f_{y'y'} = 0$ dává pro každé y stejnou hodnotu funkcionálu F a je tedy nezajímavý. Případ $y'' = 0$ dává řešení $y(x) = C_1x + C_2$, konstanty C_1 a C_2 se určí z okrajových podmínek (přímka musí procházet body (a,A), (b,B)).

Funkce f nezávisí na y

Eulerova rovnice má v tomto případě tvar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big) = 0\,,$$

takže výsledkem je diferenciální rovnice 1.řádu s konstantou C

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C\,.$$

Funkce f nezávisí na x

Eulerova rovnice má po vynásobení y' tvar

$$y'\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial y}y' - \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0\,.$$

Levá strana je derivací podle x funkce $y' f_{y'} - f$, takže výsledkem je diferenciální rovnice 1.řádu s konstantou C

$$y'\,\frac{\partial f}{\partial y'} - f = C\,.$$

První a druhá variace

Pro funkcionál

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\ \mathrm{d}x$$

jsme při odvozování Eulerovy rovnice sestrojili pomocnou funkci

$$g(\alpha) = F(y_0 + \alpha v) = \int_a^b f(x, y_0(x) + \alpha v(x), y_0'(x) + \alpha v'(x))\ \mathrm{d}x$$

parametru α.

Eulerova rovnice odpovídala podmínce $g'(0) = 0$.

Obecně lze zkoumat Taylorův rozvoj ve tvaru

$$g(\alpha) = F(y_0) + \alpha V_1(y_0, v) + \frac{1}{2}\alpha^2 V_2(y_0, v) + \cdots\,,$$

kde $V_1(y_0, v)$ nazýváme první variace funkcionálu F a značíme δF. Podobně $V_2(y_0, v)$ nazýváme druhá variace funkcionálu F a značíme $\delta^2 F$.

Nulovost první variace odpovídá Eulerově rovnici, pozitivní definitností druhé variace můžeme zjišťovat skutečné nabývání extrému v extremále (jde o nutnou podmínku pro minimalizaci).

Po spočtení vyjde

$$g''(\alpha) = \int_a^b f_{yy} v^2(x) + 2 f_{yy'} v(x) v'(x) + f_{y'y'} (v'(x))^2\ \mathrm{d}x\,.$$

Tedy jde o definitnost matice tvořené druhými parciálními derivacemi f podle y a y'.

Postačující podmínka pro extrém

Eulerova rovnice je nutnou podmínkou pro nabývání extrému funkcionálu

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\ \mathrm{d}x\,.$$

Pokud je navíc funkce $f(x, y, y')$ konvexní ve svých proměnných y a y' současně, je extremála absolutním minimem funkcionálu F.

ÚLOHY S VOLNÝMI KONCI

Vyskytují se úlohy, kde se chce, aby extremály začínaly na dané křivce C_1 a končily na jiné křivce C_2 (nebo pro více proměnných na plochách).

To je např. úloha o nejkratší vzdálenosti mezi křivkami nebo plochami. Úlohy tohoto typu se nazývají úlohy s volnými konci.

Definují-li φ, ψ dvě hladké křivky v rovině, za funkce, mezi kterými se hledá extrém funkcionálu, se v tomto případě berou části množiny $\mathcal{C} = \{y; y(x_1) = \varphi(x_1), y(x_2) = \psi(x_2),$ existuje spojitá y'' na $[x_1, x_2]\}$ – body x_1, x_2 závisí na y, tj. pro různé funkce y mohou být různé i tyto body.

Přesněji by se tyto body měly značit $x_{1,y}, x_{2,y}$ a funkcionál má pak tvar

$$F(y) = \int_{x_{1,y}}^{x_{2,y}} f(x, y, y')\ \mathrm{d}x\,.$$

Řešení musí automaticky splňovat Eulerovu rovnici. Navíc u úlohy s volnými konci dostaneme navíc v každém volném konci další rovnici.

Tyto rovnice se nazývají *podmínky transversality*.

ÚLOHY S PODMÍNKOU

Často se stává, že množina $\mathcal{C}$ funkcí y, mezi kterými se hledá funkce minimalizující daný funkcionál $\int_a^b f(x, y, y')\ \mathrm{d}x$, je zúžena další podmínkou, která je vyjádřena integrálem $\int_a^b g(x, y, y')\ \mathrm{d}x = C$, pro nějakou funkci g. Následující dva příklady jsou typické:

Jaký tvar bude mít lano zavěšené na svých koncích v daných bodech?

Lano zaujme takovou polohu, aby jeho potenciální energie byla minimální.

Hledá se tedy funkce y, která splňuje okrajové podmínky (jako v úlohách s pevnými konci), minimalizuje funkcionál $\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\ \mathrm{d}x$ a navíc splňuje podmínku dané délky, tj. $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ \mathrm{d}x = d$, kde d je předem dané číslo.

Jaký tvar má jednoduchá uzavřená křivka dané délky s maximálním obsahem svého vnitřku?

Řešením je křivka y, která maximalizuje funkcionál vyjadřující obsah vnitřku uzavřené jednoduché křivky (a splňuje okrajové podmínky - jaké jsou?) a opět navíc splňuje podmínku dané délky $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ \mathrm{d}x = d$.

Poslední příklad je historicky nejdůležitější a podle něj se podobné úlohy nazývají *isoperimetrické úlohy*.

Lze dospět k následující nutné podmínce pro relativní extrémy těchto úloh.

VĚTA. Nechť f, g jsou funkce tří proměnných x, y, y', kde y je funkcí x na intervalu $[a, b]$ a obě funkce f, g mají spojité parciální derivace 2.řádu. Pro čísla A, B, C buď $\mathcal{C} = \{y; y$ má spojitou derivaci na $[a, b], y(a) = A, y(b) = B\}$ a $C' = \{y \in \mathcal{C}; \int_a^b g(x, y, y')\ \mathrm{d}x = C\}$.

Je-li y_0 slabý relativní extrém funkcionálu $\int_a^b f(x, y, y')\ \mathrm{d}x$ na množině $\mathcal{C}'$ a není extremálou funkcionálu $\int_a^b g(x, y, y')\ \mathrm{d}x$, pak existuje reálné číslo λ takové, že y_0 je slabý relativní extrém na množině $\mathcal{C}$ funkcionálu

$$\int_a^b \big(f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')\big)\ \mathrm{d}x\,.$$

Stejně jako u hledání extrémů funkcí více reálných proměnných se tu pomocí Lagrangeových multiplikátorů úloha s vázaným extrémem převede na úlohu s volným extrémem.

Z předchozí věty lze usoudit tzv. *reciproční pravidlo*:

VĚTA. Nechť y_0 je extrémem popsaným v předchozí větě. Pak y_0 je i extrémem funkcionálu $\int_a^b g(x, y, y')\ \mathrm{d}x$ na množině $\mathcal{C}$ za podmínky $\int_a^b f(x, y, y')\ \mathrm{d}x = C\}$.

Jestliže tedy víte, že řešením druhého uvedeného příkladu je kružnice, tj. mezi všemi rovinnými obrazci s daným obvodem má kruh největší obsah, pak víte, že mezi všemi rovinnými obrazci s daným obsahem má kruh nejmenší obvod.