

BANACHOVY PROSTORY



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

BANACHOVY PROSTORY



V podstatě se budeme zabývat prostory funkcí. Například to bude prostor (množina) spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$.

LEKCE39-BAN

lineární prostor	
lineární zobrazení	
lineární funkcionál	
algebraický duál	
zobrazení e_X do $X^{##}$	
normovaný prostor	
Minkovského	
norma	
norma zobrazení	
Hahn-Banach	
Banachův prostor	
Otevřené zobrazení	
Uzavřený graf	
Stejnoměrná omezenost	
Duální prostor	
druhý duál	
reflexivní prostor	
vnitřní součin	
Schwartzova nerovnost	
Hilbertův prostor	
ortonormalita	
ortonormalita	
Besselova	
nerovnost	
Fourierova řada	
Parsevalova rovnost	
úplná množina	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

BANACHOVY PROSTORY



V podstatě se budeme zabývat prostory funkcí. Například to bude prostor (množina) spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$.



Ukáže se, že řada vlastností platí pro řadu podobných prostorů.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





To se poznalo tak, že se důkazy jistých tvrzení v různých situacích podobaly navzájem jako vejce vejci.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



To se poznalo tak, že se důkazy jistých tvrzení v různých situacích podobaly navzájem jako vejce vejci.



Aha, bude následovat nudná kapitola o triviálních vlastnostech skoro všech prostorů.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Není tomu tak. Prostory, které budeme zkoumat jsou v podstatě nekonečně-rozměrným zobecněním \mathbb{R} .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Není tomu tak. Prostory, které budeme zkoumat jsou v podstatě nekonečně-rozměrným zobecněním \mathbb{R} .



Budeme zkoumat nekonečně-rozměrné koule a dokonce dostaneme obdobu Pythagorovy věty.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Není tomu tak. Prostory, které budeme zkoumat jsou v podstatě nekonečně-rozměrným zobecněním \mathbb{R} .



Budeme zkoumat nekonečně-rozměrné koule a dokonce dostaneme obdobu Pythagorovy věty.



Ještě bych podotkl, že v takových prostorech nefunguje selský rozum.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Budeme zkoumat prostory s určitou zásobou obecných vlastností. Nebude však existovat nějaký typický, který bychom si při důkazech kreslili.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Budeme zkoumat prostory s určitou zásobou obecných vlastností. Nebude však existovat nějaký typický, který bychom si při důkazech kreslili.



Nicméně řada tvrzení zde dokazovaných platí i v \mathbb{R}^n . Tedy nutná podmínka pro to, aby tvrzení platilo, je nekolidování se známými vlastnostmi v \mathbb{R}^n .

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Zapomněla jsem dodat, že takové prostory jsou velmi užitečné. Zpravidla jsou to prostory řešení jistých diferenciálních rovnic.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Zapomněla jsem dodat, že takové prostory jsou velmi užitečné. Zpravidla jsou to prostory řešení jistých diferenciálních rovnic.



Proto nás bude zajímat spojitost, konvergence, úplnost.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Zapomněla jsem dodat, že takové prostory jsou velmi užitečné. Zpravidla jsou to prostory řešení jistých diferenciálních rovnic.



Proto nás bude zajímat spojitost, konvergence, úplnost.



Takže to budou nejčastěji prostory funkcí. U některých navíc dostaneme kolmost.

LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ZÁKLADY



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ZÁKLADY



Již víme dost na první představu. Tak jdeme na to.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z algebry znáte tzv. diskrétní struktury, jako grupy, lineární prostoty, apod.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z algebry znáte tzv. diskrétní struktury, jako grupy, lineární prostoty, apod.



V analýze se probíraly tzv. spojité struktury, kde byla definována konvergence nebo okolí bodů a mohla se definovat spojitost zobrazení (reálná přímka, komplexní rovina, obecněji euklidovské prostory, nebo ještě obecněji metrické prostory).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z algebry znáte tzv. diskrétní struktury, jako grupy, lineární prostoty, apod.



V analýze se probíraly tzv. spojité struktury, kde byla definována konvergence nebo okolí bodů a mohla se definovat spojitost zobrazení (reálná přímka, komplexní rovina, obecněji euklidovské prostory, nebo ještě obecněji metrické prostory).



Souvislost těchto dvou přístupů byla vidět už v první kapitole o reálných číslech, kde se dokázalo, že sčítání, násobení a dělení reálných čísel jsou spojitá zobrazení. To mělo pozdější důsledky, např. možnost záměny pořadí limity a součtu (resp. součinu nebo podílu) posloupností nebo funkcí, záměny pořadí derivace a součtu, nebo integrálu a součtu.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův protor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U posledních dvou příkladů není uveden součin a podíl, lze uvést jen záměnu pořadí derivace a integrace s násobením konstantou. Jiné algebraické operace nejsou v analýze obecně vhodné.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U posledních dvou příkladů není uveden součin a podíl, lze uvést jen záměnu pořadí derivace a integrace s násobením konstantou. Jiné algebraické operace nejsou v analýze obecně vhodné.



Algebraické struktury, které mají za operace součet svých prvků a násobení prvku číslem, jsou lineární prostory.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

U posledních dvou příkladů není uveden součin a podíl, lze uvést jen záměnu pořadí derivace a integrace s násobením konstantou. Jiné algebraické operace nejsou v analýze obecně vhodné.



Algebraické struktury, které mají za operace součet svých prvků a násobení prvku číslem, jsou lineární prostory.



Pokud je na těchto prostorech ještě definována např. metrika, dá se očekávat, že se dostane vhodná struktura pro analýzu. Metrika a lineární struktura ale musí být vhodně skloubeny.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U posledních dvou příkladů není uveden součin a podíl, lze uvést jen záměnu pořadí derivace a integrace s násobením konstantou. Jiné algebraické operace nejsou v analýze obecně vhodné.



Algebraické struktury, které mají za operace součet svých prvků a násobení prvku číslem, jsou lineární prostory.



Pokud je na těchto prostorech ještě definována např. metrika, dá se očekávat, že se dostane vhodná struktura pro analýzu. Metrika a lineární struktura ale musí být vhodně skloubeny.



Metrika a linearita. Takže se nejen bude konvergovat, ale i sčítat. Nic jiného.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vzhledem k různé terminologii a definicím bude vhodné zopakovat z algebry některé pojmy.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vzhledem k různé terminologii a definicím bude vhodné zopakovat z algebry některé pojmy.



Základním pojmem bude lineární prostor nad reálnými čísly. Většina dále uváděných tvrzení platí i pro lineární prostory nad komplexními čísly.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vzhledem k různé terminologii a definicím bude vhodné zopakovat z algebry některé pojmy.



Základním pojmem bude lineární prostor nad reálnými čísly. Většina dále uváděných tvrzení platí i pro lineární prostory nad komplexními čísly.



DEFINICE. **Lineární prostor** je neprázdná množina X , na které je definováno sčítání $x + y$ prvků X a násobení rx prvků $x \in X$ reálnými čísly r . Tyto operace splňují následující podmínky:

1. Operace sčítání je komutativní a asociativní, existuje nulový prvek $0 \in X$ a inverzní prvky $-x$ (tj. $x + 0 = x$ a $x + (-x) = 0$ pro každé $x \in X$); "
2. Operace násobení reálnými čísly je distributivní v obou proměnných vzhledem ke sčítání a v první proměnné vzhledem existence k násobení, platí $1x = x$ pro každé $x \in X$.



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
 - lineární zobrazení
 - lineární funkcionál
 - algebraický duál
 - zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
 - Minkovského norma
 - norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
 - Otevřené zobrazení
 - Uzavřený graf
 - Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
 - druhý duál
- reflexivní prostor
 - vnitřní součin
 - Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
 - ortogonalita
 - ortonormalita
 - Besselova nerovnost
 - Fourierova řada
 - Parsevalova rovnost
 - úplná množina
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li X lineární prostor, pak $Y \subset X$ se nazývá *lineární podprostor* X , jestliže s operacemi zúženými z X na Y tvoří Y lineární prostor (tj. součet prvků z Y a násobek prvku z Y reálným číslem opět náležejí do Y).

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li X lineární prostor, pak $Y \subset X$ se nazývá *lineární podprostor* X , jestliže s operacemi zúženými z X na Y tvoří Y lineární prostor (tj. součet prvků z Y a násobek prvku z Y reálným číslem opět náležejí do Y).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li X lineární prostor, pak $Y \subset X$ se nazývá *lineární podprostor* X , jestliže s operacemi zúženými z X na Y tvoří Y lineární prostor (tj. součet prvků z Y a násobek prvku z Y reálným číslem opět náležejí do Y).



Nejmenší lineární podprostor v X množiny $A \subset X$ se nazývá *lineární obal* A .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li X lineární prostor, pak $Y \subset X$ se nazývá *lineární podprostor* X , jestliže s operacemi zúženými z X na Y tvoří Y lineární prostor (tj. součet prvků z Y a násobek prvku z Y reálným číslem opět náležejí do Y).



Nejmenší lineární podprostor v X množiny $A \subset X$ se nazývá *lineární obal* A .



Podmnožina A lineárního prostoru X se nazývá *symetrická*, jestliže $x \in A$ implikuje $-x \in A$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcional

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li X lineární prostor, pak $Y \subset X$ se nazývá *lineární podprostor* X , jestliže s operacemi zúženými z X na Y tvoří Y lineární prostor (tj. součet prvků z Y a násobek prvku z Y reálným číslem opět náležejí do Y).



Nejmenší lineární podprostor v X množiny $A \subset X$ se nazývá *lineární obal* A .



Podmnožina A lineárního prostoru X se nazývá *symetrická*, jestliže $x \in A$ implikuje $-x \in A$.



Nazývá se *pohlující*, jestliže pro každé $x \in X$ existuje $s > 0$ tak, že $rx \in A$ pro každé $r \in [0, s)$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li X lineární prostor, pak $Y \subset X$ se nazývá *lineární podprostor* X , jestliže s operacemi zúženými z X na Y tvoří Y lineární prostor (tj. součet prvků z Y a násobek prvku z Y reálným číslem opět náležejí do Y).



Nejmenší lineární podprostor v X množiny $A \subset X$ se nazývá *lineární obal* A .



Podmnožina A lineárního prostoru X se nazývá *symetrická*, jestliže $x \in A$ implikuje $-x \in A$.



Nazývá se *pohlcující*, jestliže pro každé $x \in X$ existuje $s > 0$ tak, že $rx \in A$ pro každé $r \in [0, s)$.



Množina A je *konvexní*, jestliže s dvěma svými body x, y obsahuje i úsečku mezi x, y , tj. množinu $\{rx + (1-r)y; r \in [0, 1]\}$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak jsem řekla, všechno si jde kreslit v konečně-rozměrném případě. Ale myslet se musí nekonečně-rozměrně (pro jistotu).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak jsem řekla, všechno si jde kreslit v konečně-rozměrném případě. Ale myslet se musí nekonečně-rozměrně (pro jistotu).



Chce se tím říct, že to není obecně jednoduché.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Zobrazení vhodná pro lineární prostory musí zachovávat obě operace (linearita):



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zobrazení vhodná pro lineární prostory musí zachovávat obě operace (linearita):



DEFINICE. Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ mezi lineárními prostory se nazývá **lineární zobrazení**, jestliže splňuje následující dvě podmínky:

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ pro všechna $x_1, x_2 \in X$;
2. $f(rx) = rf(x)$ pro všechna $r \in \mathbb{R}, x \in X$.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcional

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zobrazení vhodná pro lineární prostory musí zachovávat obě operace (linearita):



DEFINICE. Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ mezi lineárními prostory se nazývá **lineární zobrazení**, jestliže splňuje následující dvě podmínky:

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ pro všechna $x_1, x_2 \in X$;
2. $f(rx) = rf(x)$ pro všechna $r \in \mathbb{R}, x \in X$.

Lineární zobrazení $X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **lineární funkcionál**.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dva lineární prostory se nazývají *isomorfní*, pokud mezi existuje prosté lineární zobrazení jednoho z nich na druhý (toto zobrazení se pak nazývá *isomorfismus*).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dva lineární prostory se nazývají *isomorfní*, pokud mezi existuje prosté lineární zobrazení jednoho z nich na druhý (toto zobrazení se pak nazývá *isomorfismus*).



To je klíčová záležitost.
Které prostory jsou stejné?
To se teprve uvidí.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dva lineární prostory se nazývají *isomorfní*, pokud mezi existuje prosté lineární zobrazení jednoho z nich na druhý (toto zobrazení se pak nazývá *isomorfismus*).



To je klíčová záležitost.
Které prostory jsou stejné?
To se teprve uvidí.



Konečně-rozměrné prostory
jsou si podobné jako vejce
vejci, vejš to neplatí.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Některé další důležité operace s lineárními prostory:



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Některé další důležité operace s lineárními prostory:



Je-li X neprázdná množina, je množina \mathbb{R}^X všech zobrazení $X \rightarrow \mathbb{R}$ lineární prostor při bodově definovaných operacích, tj. $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, $(rf)(a) = rf(a)$.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Některé další důležité operace s lineárními prostory:



Je-li X neprázdná množina, je množina \mathbb{R}^X všech zobrazení $X \rightarrow \mathbb{R}$ lineární prostor při bodově definovaných operacích, tj. $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, $(rf)(a) = rf(a)$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Některé další důležité operace s lineárními prostory:



Je-li X neprázdná množina, je množina \mathbb{R}^X všech zobrazení $X \rightarrow \mathbb{R}$ lineární prostor při bodově definovaných operacích, tj. $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, $(rf)(a) = rf(a)$.



Je-li X lineární prostor, pak podmnožina $X^\# \subset \mathbb{R}^X$ všech lineárních funkcionalů na X je lineární podprostor \mathbb{R}^X , který se nazývá it algebraický duál (nebo algebraicky duální prostor k) prostoru X .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcional

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^\#$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Některé další důležité operace s lineárními prostory:



Je-li X neprázdná množina, je množina \mathbb{R}^X všech zobrazení $X \rightarrow \mathbb{R}$ lineární prostor při bodově definovaných operacích, tj. $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, $(rf)(a) = rf(a)$.



Je-li X lineární prostor, pak podmnožina $X^\# \subset \mathbb{R}^X$ všech lineárních funkcionalů na X je lineární podprostor \mathbb{R}^X , který se nazývá it algebraický duál (nebo algebraicky duální prostor k) prostoru X .



Zobrazení e_X z X do druhého duálu $(X^\#)^\#$ definované jako $e_X(x)(f) = f(x)$, pro $x \in X$, $f \in X^\#$ je prosté lineární zobrazení.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcional

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův protor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Některé další důležité operace s lineárními prostory:



Je-li X neprázdná množina, je množina \mathbb{R}^X všech zobrazení $X \rightarrow \mathbb{R}$ lineární prostor při bodově definovaných operacích, tj. $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, $(rf)(a) = rf(a)$.



Je-li X lineární prostor, pak podmnožina $X^\# \subset \mathbb{R}^X$ všech lineárních funkcionalů na X je lineární podprostor \mathbb{R}^X , který se nazývá it algebraický duál (nebo algebraicky duální prostor k) prostoru X .



Zobrazení e_X z X do druhého duálu $(X^\#)^\#$ definované jako $e_X(x)(f) = f(x)$, pro $x \in X$, $f \in X^\#$ je prosté lineární zobrazení.



Ted' se nad (snad) naším prostorem někdo povyšuje. Je to jeho duál. A to není poslední potíž.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^\#$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův protor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



V duálu sedí například integrály, míry a podobná ha-
vět'.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



V duálu sedí například integrály, míry a podobná ha-
vět'.



Kdo pro daný prostor zná
jeho duál, má zbraň, se kte-
rou se neztratí.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův protor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

NORMOVANÉ PROSTORY



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

NORMOVANÉ PROSTORY



Jak bylo naznačeno v úvodu, „spojité“ lineární prostory jsou lineární prostory spolu s nějakou spojitou strukturou (např. metrikou) takovou, že obě algebraické operace jsou spojité, V metrických prostorech existuje i jiný přístup, který je speciálnější a přináší vhodnější teorii.

LEKCE39-BAN

- lineární prostor
 - lineární zobrazení
 - lineární funkcionál
 - algebraický duál
 - zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
 - Minkovského
 - norma
 - norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
 - Otevřené zobrazení
 - Uzavřený graf
 - Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
 - druhý duál
- reflexivní prostor
 - vnitřní součin
 - Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
 - ortonormalita
 - Besselova
 - nerovnost
 - Fourierova řada
 - Parsevalova rovnost
 - úplná množina
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

NORMOVANÉ PROSTORY



Jak bylo naznačeno v úvodu, „spojité“ lineární prostory jsou lineární prostory spolu s nějakou spojitou strukturou (např. metrikou) takovou, že obě algebraické operace jsou spojité, V metrických prostorech existuje i jiný přístup, který je speciálnější a přináší vhodnější teorii.



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
 - lineární zobrazení
 - lineární funkcionál
 - algebraický duál
 - zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
 - Minkovského
 - norma
 - norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
 - Otevřené zobrazení
 - Uzavřený graf
 - Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
 - druhý duál
- reflexivní prostor
 - vnitřní součin
 - Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
 - ortonormalita
 - Besselova
 - nerovnost
 - Fourierova řada
 - Parsevalova rovnost
 - úplná množina
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

NORMOVANÉ PROSTORY



Jak bylo naznačeno v úvodu, „spojité“ lineární prostory jsou lineární prostory spolu s nějakou spojitou strukturou (např. metrikou) takovou, že obě algebraické operace jsou spojité, V metrických prostorech existuje i jiný přístup, který je speciálnější a přináší vhodnější teorii.



Jak lze tedy vhodněji spojit lineární a metrickou strukturu?



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
 - lineární zobrazení
 - lineární funkcionál
 - algebraický duál
 - zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
 - Minkovského
 - norma
 - norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
 - Otevřené zobrazení
 - Uzavřený graf
 - Stejněměrná omezenost
- Duální prostor
 - druhý duál
- reflexivní prostor
 - vnitřní součin
 - Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
 - ortonormalita
 - Besselova
 - nerovnost
 - Fourierova řada
 - Parsevalova rovnost
 - úplná množina
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

NORMOVANÉ PROSTORY



Jak bylo naznačeno v úvodu, „spojité“ lineární prostory jsou lineární prostory spolu s nějakou spojitou strukturou (např. metrikou) takovou, že obě algebraické operace jsou spojité, V metrických prostorech existuje i jiný přístup, který je speciálnější a přináší vhodnější teorii.



Jak lze tedy vhodněji spojit lineární a metrickou strukturu?



Nedýchám. Už raději ani to.

LEKCE39-BAN

- lineární prostor
 - lineární zobrazení
 - lineární funkcionál
 - algebraický duál
 - zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
 - Minkovského norma
 - norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
 - Otevřené zobrazení
 - Uzavřený graf
 - Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
 - druhý duál
- reflexivní prostor
 - vnitřní součin
 - Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
 - ortonormalita
 - Besselova nerovnost
 - Fourierova řada
 - Parsevalova rovnost
 - úplná množina
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na přímce a v rovině (i v libovolném euklidovském prostoru) je obvyklá metrika invariantní vůči posunutí, tj. $d(x + a, y + a) = d(x, y)$. Žádná další významná souvislost mezi sčítáním a metrikou není.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na přímce a v rovině (i v libovolném euklidovském prostoru) je obvyklá metrika invariantní vůči posunutí, tj. $d(x + a, y + a) = d(x, y)$. Žádná další významná souvislost mezi sčítáním a metrikou není.



Vezme-li se $a = -y$, dostane se $d(x - y, 0) = d(x, y)$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na přímce a v rovině (i v libovolném euklidovském prostoru) je obvyklá metrika invariantní vůči posunutí, tj. $d(x + a, y + a) = d(x, y)$. Žádná další významná souvislost mezi sčítáním a metrikou není.



Vezme-li se $a = -y$, dostane se $d(x - y, 0) = d(x, y)$.



Naopak, jsou-li dány vzdálenosti od 0, lze je rozšířit stejnou rovností na vzdálenosti mezi libovolnými prvky, a tyto vzdálenosti jsou invariantní vůči posunutí.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na přímce a v rovině (i v libovolném euklidovském prostoru) je obvyklá metrika invariantní vůči posunutí, tj. $d(x + a, y + a) = d(x, y)$. Žádná další významná souvislost mezi sčítáním a metrikou není.



Vezme-li se $a = -y$, dostane se $d(x - y, 0) = d(x, y)$.



Naopak, jsou-li dány vzdálenosti od 0, lze je rozšířit stejnou rovností na vzdálenosti mezi libovolnými prvky, a tyto vzdálenosti jsou invariantní vůči posunutí.



Stačí tedy definovat vzdálenosti k 0 s vlastnostmi, které po výše uvedeném rozšíření na vzdálenosti mezi libovolnými body dávají metriku:



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Už zase dýchám, O nic nejde. Díky linearitě stačí umístit pásmo do počátku napevno a měřit vzdálenosti odtamtad’.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Už zase dýchám, O nic nejde. Díky linearitě stačí umístit pásmo do počátku napevno a měřit vzdálenosti odtamtad'.



DEFINICE. Lineární prostor X se nazývá **normovaný prostor**, jestliže je na X dána reálná funkce p s vlastnostmi (pro libovolná $r \in \mathbb{R}, x, y \in X$)

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
2. $p(rx) = |r|p(x)$;
3. $p(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$;



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Už zase dýchám, O nic nejde. Díky linearitě stačí umístit pásmo do počátku napevno a měřit vzdálenosti odtamtad'.



DEFINICE. Lineární prostor X se nazývá **normovaný prostor**, jestliže je na X dána reálná funkce p s vlastnostmi (pro libovolná $r \in \mathbb{R}, x, y \in X$)

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
2. $p(rx) = |r|p(x)$;
3. $p(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$;



Norma prvku x se většinou značí $\|x\|$.

LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Snadno se ukáže, že $p(0) = 0, p(x) \geq 0$ (ukážte to).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Snadno se ukáže, že $p(0) = 0, p(x) \geq 0$ (ukážte to).



A jsme zase ve hře.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní je nutné uvést souvislost se spojitostí algebraických operací, uvedenou v úvodu.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní je nutné uvést souvislost se spojitostí algebraických operací, uvedenou v úvodu.



VĚTA. V normovaném prostoru X jsou operace sčítání $+$: $X \times X \rightarrow X$ a násobení číslem \cdot : $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$ spojité.



LEKCE39-BAN

lineární prostor	
lineární zobrazení	
lineární funkcionál	
algebraický duál	
zobrazení e_X do $X^{##}$	
normovaný prostor	
Minkovského	
norma	
norma zobrazení	
Hahn-Banach	
Banachův prostor	
Otevřené zobrazení	
Uzavřený graf	
Stejnoměrná omezenost	
Duální prostor	
druhý duál	
reflexivní prostor	
vnitřní součin	
Schwartzova nerovnost	
Hilbertův prostor	
ortonormalita	
ortonormalita	
Besselova	
nerovnost	
Fourierova řada	
Parsevalova rovnost	
úplná množina	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní je nutné uvést souvislost se spojitostí algebraických operací, uvedenou v úvodu.



VĚTA. V normovaném prostoru X jsou operace sčítání $+$: $X \times X \rightarrow X$ a násobení číslem \cdot : $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$ spojité.



Opak neplatí. V *Příkladech* je uveden metrický lineární prostor se spojitými operacemi, který není normovaný.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní je nutné uvést souvislost se spojitostí algebraických operací, uvedenou v úvodu.



VĚTA. V normovaném prostoru X jsou operace sčítání $+$: $X \times X \rightarrow X$ a násobení číslem \cdot : $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$ spojité.



Opak neplatí. V *Příkladech* je uveden metrický lineární prostor se spojitými operacemi, který není normovaný.



Normovaný je víc než metrický.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcional

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Má se dokázat, že pokud $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ v X a $r_n \rightarrow r$ v \mathbb{R} , pak $x_n + y_n \rightarrow x + y, r_n x_n \rightarrow rx$, neboli $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \rightarrow 0, \|r_n x_n - rx\| \rightarrow 0$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Má se dokázat, že pokud $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ v X a $r_n \rightarrow r$ v \mathbb{R} , pak $x_n + y_n \rightarrow x + y, r_n x_n \rightarrow r x$, neboli $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \rightarrow 0, \|r_n x_n - r x\| \rightarrow 0$.



Platí

$$\begin{aligned}\|(x_n + y_n) - (x + y)\| &\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0, \\ \|r_n x_n - r x\| &\leq \|r_n(x_n - x)\| + \|(r_n - r)x\| \rightarrow 0.\end{aligned}$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zajímavá je souvislost normy s jednotkovou koulí $B_1 = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$. Ta totiž určuje jednoznačně normu.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zajímavá je souvislost normy s jednotkovou koulí $B_1 = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$. Ta totiž určuje jednoznačně normu.



S koulemi toho ještě zažijeme spousta legračního.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zajímavá je souvislost normy s jednotkovou koulí $B_1 = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$. Ta totiž určuje jednoznačně normu.



S koulemi toho ještě zažijeme spousta legračního.



VĚTA. Necht' B je uzavřená, konvexní, pohlcující a symetrická množina v lineárním prostoru X , která neobsahuje žádnou přímku $\{rx_0; r \in \mathbb{R}\}$ pro $x_0 \neq 0$. Pak existuje jediná norma na X , která má za jednotkovou kouli množinu B .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zajímavá je souvislost normy s jednotkovou koulí $B_1 = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$. Ta totiž určuje jednoznačně normu.



S koulemi toho ještě zažijeme spousta legračního.



VĚTA. Necht' B je uzavřená, konvexní, pohlcující a symetrická množina v lineárním prostoru X , která neobsahuje žádnou přímku $\{rx_0; r \in \mathbb{R}\}$ pro $x_0 \neq 0$. Pak existuje jediná norma na X , která má za jednotkovou kouli množinu B .



Uvědomte si, že jednotková koule v normovaném prostoru má uvedené vlastnosti množiny B .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Pro $x \in X$ se definuje $p(x) = \inf\{r \in (0, +\infty); \frac{1}{r}x \in B\}$ a dokáže se, že p je norma. Protože B je pohlcující množina, je každé číslo $p(x)$ konečné.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Pro $x \in X$ se definuje $p(x) = \inf\{r \in (0, +\infty); \frac{1}{r}x \in B\}$ a dokáže se, že p je norma. Protože B je pohlcující množina, je každé číslo $p(x)$ konečné.



Protože $0 \in B$, je $p(0) = 0$. Je-li $x \neq 0$, existuje podle poslední vlastnosti množiny B číslo $s > 0$ takové, že $sx \notin B$ a tedy $p(x) > 0$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Pro $x \in X$ se definuje $p(x) = \inf\{r \in (0, +\infty); \frac{1}{r}x \in B\}$ a dokáže se, že p je norma. Protože B je pohlcující množina, je každé číslo $p(x)$ konečné.



Protože $0 \in B$, je $p(0) = 0$. Je-li $x \neq 0$, existuje podle poslední vlastnosti množiny B číslo $s > 0$ takové, že $sx \notin B$ a tedy $p(x) > 0$.



Subaditivitu $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, stačí dokazovat pro nenulová x, y . Protože B je uzavřená, je $x/p(x) \in B, y/p(y) \in B$. Z konvexity B se dostane pro $r = \frac{p(x)}{p(x)+p(y)}$ vztah $rx/p(x) + (1 - r)y/p(y) = (x + y)/(p(x) + p(y)) \in B$, odkud již vyplývá dokazovaná nerovnost.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Pro $x \in X$ se definuje $p(x) = \inf\{r \in (0, +\infty); \frac{1}{r}x \in B\}$ a dokáže se, že p je norma. Protože B je pohlcující množina, je každé číslo $p(x)$ konečné.



Protože $0 \in B$, je $p(0) = 0$. Je-li $x \neq 0$, existuje podle poslední vlastnosti množiny B číslo $s > 0$ takové, že $sx \notin B$ a tedy $p(x) > 0$.



Subaditivitu $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, stačí dokazovat pro nenulová x, y . Protože B je uzavřená, je $x/p(x) \in B, y/p(y) \in B$. Z konvexity B se dostane pro $r = \frac{p(x)}{p(x)+p(y)}$ vztah $rx/p(x) + (1 - r)y/p(y) = (x + y)/(p(x) + p(y)) \in B$, odkud již vyplývá dokazovaná nerovnost.



Rovnost $p(tx) = |t|p(x)$ zřejmě platí pro $t = 0$ (protože $p(0) = 0$) a pro $t = -1$ (protože B je symetrická). Zbývá uvedenou rovnost dokázat pro $t > 0$:

$$p(tx) = \inf\{r > 0; \frac{1}{r}(tx) \in B\} = \inf\{t\frac{r}{t}; r > 0, \frac{1}{r/t}x \in B\} = t \inf\{s > 0; \frac{1}{s}x \in B\}.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojité lineární zobrazení jsou velice specifická.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita

- ortonormalita

- Besselova

- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojité lineární zobrazení jsou velice specifická.



Nejdříve však jedno označení.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitá lineární zobrazení jsou velice specifická.



Nejdříve však jedno označení.



DEFINICE. Necht' f je lineární zobrazení normovaného prostoru X do normovaného prostoru Y . Pak se definuje

$$\|f\| = \inf\{r > 0; \|f(x)\| \leq r\|x\| \text{ pro každé } x \in X\} = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}; x \neq 0\right\} = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}; \|x\| = 1\right\}.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-

nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-

nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitá lineární zobrazení jsou velice specifická.



Nejdříve však jedno označení.



DEFINICE. Necht' f je lineární zobrazení normovaného prostoru X do normovaného prostoru Y . Pak se definuje

$$\|f\| = \inf\{r > 0; \|f(x)\| \leq r\|x\| \text{ pro každé } x \in X\} = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}; x \neq 0\right\} = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}; \|x\| = 1\right\}.$$



Je-li číslo $\|f\|$ konečné, nazývá se **norma zobrazení** f .



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
- Minkovského norma
- norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost
- Duální prostor
- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
- ortonormalita
- Bessellova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující tvrzení je myšleno vážně.

VĚTA. Následující podmínky jsou pro lineární zobrazení $f : X \rightarrow Y$ normovaných prostorů X, Y ekvivalentní:

1. f je spojité;
2. f je spojité v jednom bodě;
3. $\|f\|$ je konečné číslo.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Zřejmě $1 \rightarrow 2$, opačná implikace vyplývá z linearity f a z toho, že $x_n \rightarrow x$ právě když $x_n - x \rightarrow 0$, takže je-li f spojitá v 0, je spojitá v každém jiném bodě.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Zřejmě $1 \rightarrow 2$, opačná implikace vyplývá z linearity f a z toho, že $x_n \rightarrow x$ právě když $x_n - x \rightarrow 0$, takže je-li f spojitá v 0, je spojitá v každém jiném bodě.



Platí $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$ a pokud je $\|f\|$ konečné číslo, implikuje tato nerovnost spojitost f v 0. Zbývá dokázat opak.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Zřejmě $1 \rightarrow 2$, opačná implikace vyplývá z linearity f a z toho, že $x_n \rightarrow x$ právě když $x_n - x \rightarrow 0$, takže je-li f spojitá v 0 , je spojitá v každém jiném bodě.



Platí $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$ a pokud je $\|f\|$ konečné číslo, implikuje tato nerovnost spojitost f v 0 . Zbývá dokázat opak.



Nechť je f spojitá v 0 . Protože jednotková koule B_1 v Y je okolím 0 , existuje koule K_r v X o středu 0 a poloměru $r > 0$ taková, že $f(K_r) \subset B_1$. Odtud plyne $\|f(\frac{r}{\|x\|}x)\| \leq 1$ a tedy $\|f(x)\| \leq \frac{1}{r}\|x\|$ a $\|f\|$ je konečné číslo. \diamond



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Zřejmě $1 \rightarrow 2$, opačná implikace vyplývá z linearity f a z toho, že $x_n \rightarrow x$ právě když $x_n - x \rightarrow 0$, takže je-li f spojitá v 0 , je spojitá v každém jiném bodě.



Platí $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$ a pokud je $\|f\|$ konečné číslo, implikuje tato nerovnost spojitost f v 0 . Zbývá dokázat opak.



Nechť je f spojitá v 0 . Protože jednotková koule B_1 v Y je okolím 0 , existuje koule K_r v X o středu 0 a poloměru $r > 0$ taková, že $f(K_r) \subset B_1$. Odtud plyne $\|f(\frac{r}{\|x\|}x)\| \leq 1$ a tedy $\|f(x)\| \leq \frac{1}{r}\|x\|$ a $\|f\|$ je konečné číslo. \diamond



Spojitost sedí v počátku. Asi tam drží to pásmo. A asi to spolu souvisí.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcional

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



V kapitole o metrických prostorech byla uvedena Tietzova věta o rozšíření spojitých reálných funkcí z uzavřeného podprostoru Y metrického prostoru X na celý prostor X se zachováním suprema a infima funkce.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V kapitole o metrických prostorech byla uvedena Tietzova věta o rozšíření spojitých reálných funkcí z uzavřeného podprostoru Y metrického prostoru X na celý prostor X se zachováním suprema a infima funkce.



V případě, že X je normovaný prostor, Y lineární podprostor a f je lineární, je možné požadovat, aby rozšíření bylo také lineární (navíc se zachováním normy)?



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V kapitole o metrických prostorech byla uvedena Tietzova věta o rozšíření spojitých reálných funkcí z uzavřeného podprostoru Y metrického prostoru X na celý prostor X se zachováním suprema a infima funkce.



V případě, že X je normovaný prostor, Y lineární podprostor a f je lineární, je možné požadovat, aby rozšíření bylo také lineární (navíc se zachováním normy)?



Na to odpovídá kladně následující věta.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V kapitole o metrických prostorech byla uvedena Tietzova věta o rozšíření spojitých reálných funkcí z uzavřeného podprostoru Y metrického prostoru X na celý prostor X se zachováním suprema a infima funkce.



V případě, že X je normovaný prostor, Y lineární podprostor a f je lineární, je možné požadovat, aby rozšíření bylo také lineární (navíc se zachováním normy)?



Na to odpovídá kladně následující věta.



VĚTA. (Hahnova-Banachova věta) Necht' Y je lineární podprostor normovaného prostoru X a f je spojitý lineární funkcionál na Y . Pak existuje spojitý lineární funkcionál F na X , který je rozšířením f a takový, že $\|F\| = \|f\|$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Označí se $\mathcal{P} = \{(g, G); Y \subset G \subset X, g \text{ je spojitý lineární funkcionál na } G, g \text{ rozšiřuje } f, \|g\| = \|f\|\}$. \mathcal{P} je uspořádáno relací: $(g, G) < (h, H)$ jestliže $G \subset H, h$ rozšiřuje g . Je-li $\{(g_i, G_i)\}$ monotónní systém v \mathcal{P} , náleží $(\bigcup g_i, \bigcup G_i)$ do \mathcal{P} , takže podle Zornova lemmatu má \mathcal{P} maximální prvek (F, A) .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Označí se $\mathcal{P} = \{(g, G); Y \subset G \subset X, g \text{ je spojitý lineární funkcionál na } G, g \text{ rozšiřuje } f, \|g\| = \|f\|\}$. \mathcal{P} je uspořádáno relací: $(g, G) < (h, H)$ jestliže $G \subset H, h$ rozšiřuje g . Je-li $\{(g_i, G_i)\}$ monotónní systém v \mathcal{P} , náleží $(\bigcup g_i, \bigcup G_i)$ do \mathcal{P} , takže podle Zornova lematu má \mathcal{P} maximální prvek (F, A) .



Zbývá dokázat, že $A = X$. Necht' tomu tak není a existuje $b \in X \setminus A$. Nyní stačí rozšířit F jako spojitý lineární funkcionál na lineární obal množiny $A \cup \{b\}$, tj. na množinu $\{a + rb; a \in A, r \in \mathbb{R}\}$ se zachováním normy. Snadno se ukáže, že $\sup\{F(a) - \|F\|\|a + b\|; a \in A\} \leq \inf\{F(a) + \|F\|\|a + b\|; a \in A\}$ (dokažte to např. sporem), takže existuje s mezi uvedeným supremem a infimem. Položte $g(a + rb) = F(a) - rs$. Funkcionál g je zřejmě spojitý, lineární a rozšiřuje F . Stačí ukázat, že má stejnou normu jako F .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Označí se $\mathcal{P} = \{(g, G); Y \subset G \subset X, g \text{ je spojitý lineární funkcionál na } G, g \text{ rozšiřuje } f, \|g\| = \|f\|\}$. \mathcal{P} je uspořádáno relací: $(g, G) < (h, H)$ jestliže $G \subset H, h$ rozšiřuje g . Je-li $\{(g_i, G_i)\}$ monotónní systém v \mathcal{P} , náleží $(\bigcup g_i, \bigcup G_i)$ do \mathcal{P} , takže podle Zornova lemmatu má \mathcal{P} maximální prvek (F, A) .



Zbývá dokázat, že $A = X$. Necht' tomu tak není a existuje $b \in X \setminus A$. Nyní stačí rozšířit F jako spojitý lineární funkcionál na lineární obal množiny $A \cup \{b\}$, tj. na množinu $\{a + rb; a \in A, r \in \mathbb{R}\}$ se zachováním normy. Snadno se ukáže, že $\sup\{F(a) - \|F\|\|a + b\|; a \in A\} \leq \inf\{F(a) + \|F\|\|a + b\|; a \in A\}$ (dokažte to např. sporem), takže existuje s mezi uvedeným supremem a infimem. Položte $g(a + rb) = F(a) - rs$. Funkcionál g je zřejmě spojitý, lineární a rozšiřuje F . Stačí ukázat, že má stejnou normu jako F .



Zřejmě g nemůže mít menší normu než F a proto stačí ukázat, že $\|F(a) - rs\| \leq \|F\|\|a + rb\|$ pro $a \in A, r \in \mathbb{R}$, což je zřejmé pro $r = 0$. Je-li $r > 0$, pak

$$\|F(a) - rs\| = r\|F\left(\frac{a}{r}\right) - s\| \leq r(\|F\|\|\frac{a}{r} + b\|) = \|F\|\|a + rb\|,$$

kde prostřední nerovnost vyplývá z volby dolní meze čísla s : $F(x) - s \leq \|F\|\|x + b\|$ pro libovolné $x \in A$. Pro $r < 0$ je postup obdobný, jen se použije horní hranice pro volbu čísla s . \diamond



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
- Minkovského norma
- norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je poučné, jak jsme museli být v předchozím důkazu opatrní, abychom použili pouze axiomy normovaného prostoru a nic jiného.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je poučné, jak jsme museli být v předchozím důkazu opatrní, abychom použili pouze axiomy normovaného prostoru a nic jiného.



Někdy jsem si tam připadal jako slon v porcelánu. A přitom šlo vlastně o to, jak z přímky procházející počátkem rozšířit jedno umrněný lineární zobrazení. To byla v podstatě trivialita.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hahnova-Banachova věta má hodně důležitých důsledků, např.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hahnova-Banachova věta má hodně důležitých důsledků, např.



DŮSLEDEK. Necht' L je uzavřený lineární podprostor normovaného prostoru X a $a \in X \setminus L$. Pak existuje spojitý lineární funkcionál s normou 1 na X , který se anuluje na L a jeho hodnota v a se rovná vzdálenosti a od L .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hahnova-Banachova věta má hodně důležitých důsledků, např.



DŮSLEDEK. Necht' L je uzavřený lineární podprostor normovaného prostoru X a $a \in X \setminus L$. Pak existuje spojitý lineární funkcionál s normou 1 na X , který se anuluje na L a jeho hodnota v a se rovná vzdálenosti a od L .



Speciálně pro $Y = \{0\}$ je $f(a) = \|a\|$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hahnova-Banachova věta má hodně důležitých důsledků, např.



DŮSLEDEK. Necht' L je uzavřený lineární podprostor normovaného prostoru X a $a \in X \setminus L$. Pak existuje spojitý lineární funkcionál s normou 1 na X , který se anuluje na L a jeho hodnota v a se rovná vzdálenosti a od L .



Speciálně pro $L = \{0\}$ je $f(a) = \|a\|$.



Každý netriviální normovaný prostor tedy má nenulové spojitě lineární funkcionály a množina těchto funkcí rozlišuje body prostoru.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. V Hahnově-Banachově větě se za Y vezme lineární obal množiny $L \cup \{a\}$ a $f(x + ra) = rd$, kde d je vzdálenost a od L .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. V Hahnově-Banachově větě se za Y vezme lineární obal množiny $L \cup \{a\}$ a $f(x + ra) = rd$, kde d je vzdálenost a od L .



Důsledek nyní plyne z Hahnovy-Banachovy věty, pokud $\|f\| = 1$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. V Hahnově-Banachově větě se za Y vezme lineární obal množiny $L \cup \{a\}$ a $f(x + ra) = rd$, kde d je vzdálenost a od L .



Důsledek nyní plyne z Hahnovy-Banachovy věty, pokud $\|f\| = 1$.



Tato rovnost plyne z následujících dvou nerovností:

$$\|f(x + ra)\| = |r|d = |r| \inf\{\|a - y\|; y \in L\} \leq \|x + ra\| \quad \text{a tedy } \|f\| \leq 1,$$

$$d = f(a - x) \leq \|f\| \|a - x\| \quad \text{takže } d \leq \|f\| \inf_{x \in Y} \|a - x\| = \|f\| d \quad \text{a tedy } \|f\| \geq 1,$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



V Hahnově–Banachově větě (v jejím důkazu) se rozšiřovalo tak nějak postupně. Tak je tomu dobré i v aplikacích rozumět.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



V Hahnově–Banachově větě (v jejím důkazu) se rozšiřovalo tak nějak postupně. Tak je tomu dobré i v aplikacích rozumět.



Říká se, že se ta HB věta má používat každý všední den alespoň jednou. A ve svátek raději dvakrát.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



V Hahnově–Banachově větě (v jejím důkazu) se rozšiřovalo tak nějak postupně. Tak je tomu dobré i v aplikacích rozumět.



Říká se, že se ta HB věta má používat každý všední den alespoň jednou. A ve svátek raději dvakrát.



Já jsem byl odkojený s HB větou a mám na to imunitu.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

BANACHOVY PROSTORY



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

BANACHOVY PROSTORY



Tak aby bylo jasno. Chyběla nám metrika, nadělili jsme si ji. Máme konvergenci? Jenom někdy ...



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

BANACHOVY PROSTORY



Tak aby bylo jasno. Chyběla nám metrika, nadělili jsme si ji. Máme konvergenci? Jenom někdy ...



A to se musí změnit. Teď hned.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tak jako tvoří úplné prostory důležitou třídu metrických prostorů, tak tvoří úplné normované prostory snad ještě důležitější třídu normovaných (i obecněji, topologických lineárních) prostorů. Tak důležitou, že tyto prostory dostaly jméno po význačném polském matematikovi S.Banachovi, který je ve 20.-30.letech 20.století nejvíce prozkoumal.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tak jako tvoří úplné prostory důležitou třídu metrických prostorů, tak tvoří úplné normované prostory snad ještě důležitější třídu normovaných (i obecněji, topologických lineárních) prostorů. Tak důležitou, že tyto prostory dostaly jméno po význačném polském matematikovi S.Banachovi, který je ve 20.-30.letech 20.století nejvíce prozkoumal.



DEFINICE. Úplný normovaný prostor se nazývá **Banachův prostor**.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ta úplnost nám opravdu
chyběla.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ta úplnost nám opravdu
chyběla.



Úplně mi to stačilo i bez té
úplnosti.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ta úplnost nám opravdu
chyběla.



Úplně mi to stačilo i bez té
úplnosti.



BTW, budou se hledat cau-
chyovské posloupnosti, cí-
tím to v kostech.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Metrické neúplné prostory lze zúplnit.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Metrické neúplné prostory lze zúplnit.



tázkou je, zda lze zúplnit normovaný neúplný prostor na Banachův prostor a zda lze při tomto procesu použít metrické zúplnění nebo je nutné zkonstruovat nové.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Metrické neúplné prostory lze zúplnit.



tázkou je, zda lze zúplnit normovaný neúplný prostor na Banachův prostor a zda lze při tomto procesu použít metrické zúplnění nebo je nutné zkonstruovat nové.



Platí první případ.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Metrické neúplné prostory lze zúplnit.



tázkou je, zda lze zúplnit normovaný neúplný prostor na Banachův prostor a zda lze při tomto procesu použít metrické zúplnění nebo je nutné zkonstruovat nové.



Platí první případ.



VĚTA. Úplný obal normovaného prostoru (chápaného jako metrický prostor) je Banachův prostor.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' X je neúplný normovaný prostor a Z je úplný obal X chápaného jako metrický prostor. Je nutné dokázat dvě věci. Jednak to, že lineární struktura prostoru X lze rozšířit na Z a jednak to, že metrika prostoru Z je invariantní vůči posunutí.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' X je neúplný normovaný prostor a Z je úplný obal X chápaného jako metrický prostor. Je nutné dokázat dvě věci. Jednak to, že lineární struktura prostoru X lze rozšířit na Z a jednak to, že metrika prostoru Z je invariantní vůči posunutí.



Každý bod $z \in Z$ je limitou posloupnosti $\{z_n\} \subset X$. Snadno se ukáže, že potom posloupnosti $\{z_n + z'_n\}$, $\{rz_n\}$ jsou cauchyovské a tedy konvergují v Z – jejich limity se označí $z + z'$, rz . Stejně snadno se dokáže, že tyto limity nezávisí na výběru posloupností $\{z_n\}$. Je-li $z \in X$, je možné vzít za $\{z_n\}$ konstantní posloupnost, odkud plyne, že definované operace rozšiřují původní operace na X . To, že tyto nové operace splňují požadované axiomy, bude ukázáno na komutativitě: protože $\{z_n + z'_n\} = \{z'_n + z_n\}$, je $z + z' = z' + z$. Z je tedy lineární prostor obsahující X jako lineární podprostor.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' X je neúplný normovaný prostor a Z je úplný obal X chápaného jako metrický prostor. Je nutné dokázat dvě věci. Jednak to, že lineární struktura prostoru X lze rozšířit na Z a jednak to, že metrika prostoru Z je invariantní vůči posunutí.



Každý bod $z \in Z$ je limitou posloupnosti $\{z_n\} \subset X$. Snadno se ukáže, že potom posloupnosti $\{z_n + z'_n\}$, $\{rz_n\}$ jsou cauchyovské a tedy konvergují v Z – jejich limity se označí $z + z'$, rz . Stejně snadno se dokáže, že tyto limity nezávisí na výběru posloupností $\{z_n\}$. Je-li $z \in X$, je možné vzít za $\{z_n\}$ konstantní posloupnost, odkud plyne, že definované operace rozšiřují původní operace na X . To, že tyto nové operace splňují požadované axiomy, bude ukázáno na komutativitě: protože $\{z_n + z'_n\} = \{z'_n + z_n\}$, je $z + z' = z' + z$. Z je tedy lineární prostor obsahující X jako lineární podprostor.



Při zachování značení z předešlého odstavce, pro metriku d na Z platí $d(z, z') = \lim \|z_n - z'_n\|$. Pro $a \in X$ tedy platí $d(z, z') = d(z + a, z' + a)$. Je-li $a \in Z$ limitou posloupnosti $\{a_n\} \subset X$, je $d(z, z') = d(z + a_n, z' + a_n)$ pro každé n a ze spojitosti metriky vyplývá rovnost $d(z, z') = d(z + a, z' + a)$. Důkaz je hotov. \diamond



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Bessellova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojením úplnosti a linearity se dostane velmi silný pojem. V Banachových prostorech platí mnoho důležitých tvrzení, která bez úplnosti nebo bez linearity neplatí. Uvedeme tři takové důležité věty.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojením úplnosti a linearity se dostane velmi silný pojem. V Banachových prostorech platí mnoho důležitých tvrzení, která bez úplnosti nebo bez linearity neplatí. Uvedeme tři takové důležité věty.



Je to jako tři oříšky, které dostala Popelka. Jsem zde a čekám.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojením úplnosti a linearity se dostane velmi silný pojem. V Banachových prostorech platí mnoho důležitých tvrzení, která bez úplnosti nebo bez linearity neplatí. Uvedeme tři takové důležité věty.



Je to jako tři oříšky, které dostala Popelka. Jsem zde a čekám.



Taky to mohly být tři zlaté vlasy děda Vševěda.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Na to zapomeň.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor
druhý duál

reflexivní prostor
vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojité zobrazení obecně nezachovává otevřené nebo uzavřené množiny.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojité zobrazení obecně nezachovává otevřené nebo uzavřené množiny.



Třída těch zobrazení, která zachovávají otevřené množiny bývá důležitá (třeba proto, že pokud je takové zobrazení prosté, má spojitou inverzi).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojité zobrazení obecně nezachovává otevřené nebo uzavřené množiny.



Třída těch zobrazení, která zachovávají otevřené množiny bývá důležitá (třeba proto, že pokud je takové zobrazení prosté, má spojitou inverzi).



Jsou to např. projekce z kartézského součinu metrických prostorů na souřadnicové prostory nebo podsoučiny, setkali jste se s regulárními zobrazeními a v tomto semestru i s holomorfními funkcemi.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojité zobrazení obecně nezachovává otevřené nebo uzavřené množiny.



Třída těch zobrazení, která zachovávají otevřené množiny bývá důležitá (třeba proto, že pokud je takové zobrazení prosté, má spojitou inverzi).



Jsou to např. projekce z kartézského součinu metrických prostorů na souřadnicové prostory nebo podsoučiny, setkali jste se s regulárními zobrazeními a v tomto semestru i s holomorfními funkcemi.



Protože zachovávání otevřených množin může mít více významů, nejdříve přesná definice:



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojité zobrazení obecně nezachovává otevřené nebo uzavřené množiny.



Třída těch zobrazení, která zachovávají otevřené množiny bývá důležitá (třeba proto, že pokud je takové zobrazení prosté, má spojitou inverzi).



Jsou to např. projekce z kartézského součinu metrických prostorů na souřadnicové prostory nebo podsoučiny, setkali jste se s regulárními zobrazeními a v tomto semestru i s holomorfními funkcemi.



Protože zachovávání otevřených množin může mít více významů, nejdříve přesná definice:



DEFINICE. Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ mezi metrickými prostory se nazývá **otevřené**, jestliže pro každou otevřenou množinu G v X je $f(G)$ otevřená množina v $f(X)$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení neplatí bez předpokladu úplnosti:



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení neplatí bez předpokladu úplnosti:



VĚTA. (Věta o otevřeném zobrazení) Spojité lineární zobrazení Banachova prostoru na Banachův prostor je otevřené.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení neplatí bez předpokladu úplnosti:



VĚTA. (Věta o otevřeném zobrazení) Spojité lineární zobrazení Banachova prostoru na Banachův prostor je otevřené.



A je tu první ohlášené potěšení.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcional

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' $f : X \rightarrow Y$, X, Y jsou Banachovy prostory a $f(X) = Y$. Uvědomte si nejdříve, že f je otevřené právě když zobrazuje okolí 0 v X na okolí 0 v Y (je-li G otevřená v X a $y \in f(G)$, $y = f(x)$, $x \in G$, je $G - x$ okolí 0 v X a $f(G - x) = f(G) - y$). Navíc stačí požadovat, aby obraz jednoho okolí 0 byl okolí 0.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Bessellova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' $f : X \rightarrow Y$, X, Y jsou Banachovy prostory a $f(X) = Y$. Uvědomte si nejdříve, že f je otevřené právě když zobrazuje okolí 0 v X na okolí 0 v Y (je-li G otevřená v X a $y \in f(G)$, $y = f(x)$, $x \in G$, je $G - x$ okolí 0 v X a $f(G - x) = f(G) - y$). Navíc stačí požadovat, aby obraz jednoho okolí 0 byl okolí 0.



Necht' U_r je koule v X o středu 0 a poloměru r . Pak $f(U_r)$ je pohlcující v Y a tedy $Y = \bigcup_n f(U_r)$. Podle Baireovy věty (Y je úplný) musí mít některá množina $\overline{nf(U_r)} = \overline{nf(U_r)}$ neprázdný vnitřek, a tedy i množina $\overline{f(U_r)}$ (proč?). To znamená, že existuje okolí V bodu 0 v Y a bod y tak, že $y + V \subset \overline{f(U_r)}$, takže $f(U_{2r}) \supset \overline{f(U_r)} - \overline{f(U_r)} \supset \overline{f(U_r)} - y$ a poslední množina je okolí 0. Takže existuje posloupnost čísel $\{r_n\}$ klesající k 0 taková, že $\overline{f(U_{2^{-n}})}$ obsahuje kouli v Y o středu 0 a poloměru r_n .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' $f : X \rightarrow Y$, X, Y jsou Banachovy prostory a $f(X) = Y$. Uvědomte si nejdříve, že f je otevřené právě když zobrazuje okolí 0 v X na okolí 0 v Y (je-li G otevřená v X a $y \in f(G)$, $y = f(x)$, $x \in G$, je $G - x$ okolí 0 v X a $f(G - x) = f(G) - y$). Navíc stačí požadovat, aby obraz jednoho okolí 0 byl okolí 0.



Necht' U_r je koule v X o středu 0 a poloměru r . Pak $f(U_r)$ je pohlcující v Y a tedy $Y = \bigcup_n f(U_r)$. Podle Baireovy věty (Y je úplný) musí mít některá množina $\overline{nf(U_r)} = \overline{nf(U_r)}$ neprázdný vnitřek, a tedy i množina $\overline{f(U_r)}$ (proč?). To znamená, že existuje okolí V bodu 0 v Y a bod y tak, že $y + V \subset \overline{f(U_r)}$, takže $f(U_{2r}) \supset \overline{f(U_r)} - \overline{f(U_r)} \supset \overline{f(U_r)} - y$ a poslední množina je okolí 0. Takže existuje posloupnost čísel $\{r_n\}$ klesající k 0 taková, že $\overline{f(U_{2^{-n}})}$ obsahuje kouli v Y o středu 0 a poloměru r_n .



Nyní stačí ukázat, že $f(U_2) \supset \overline{f(U_1)}$. Necht' $y \in \overline{f(U_1)}$. Existuje tedy bod $x_1 \in f(U_1)$ tak, že $\|y - f(x_1)\| < r_1$. To znamená, že $y - f(x_1) \in \overline{f(U_{2^{-1}})}$ a tedy existuje bod $x_2 \in f(U_{2^{-1}})$ tak, že $\|(y - f(x_1)) - f(x_2)\| < r_2$. Opakováním tohoto procesu se získá posloupnost $\{x_n\}$ s vlastnostmi: $x_n \in f(U_{2^{1-n}})$, $\|y - \sum_{k=1}^n f(x_k)\| < r_n$. To znamená, že $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) = y$ a dále, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ je Cauchyovská a tedy konverguje k nějakému $x \in X$. Vzhledem ke spojitosti f musí být $f(x) = y$. Je zřejmé, že $x \in U_2$. Důkaz je hotov. \diamond



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Věta o otevřeném zobrazení má zajímavé důsledky:



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Věta o otevřeném zobrazení má zajímavé důsledky:



DŮSLEDEK.

1. Každé spojitě lineární zobrazení mezi Banachovými prostory, které je prosté a na, je homeomorfismus.
2. Dva Banachovy prostory se srovnatelnými topologiemi jsou totožné.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor
druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Úplnost obou prostorů ve větě o otevřením zobrazení je nutná.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Úplnost obou prostorů ve větě o otevřením zobrazení je nutná.



Platí také následující tvrzení, které lze do jisté míry chápat jako částečné obrácení věty o otevřeném zobrazení.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Úplnost obou prostorů ve větě o otevřením zobrazení je nutná.



Platí také následující tvrzení, které lze do jisté míry chápat jako částečné obrácení věty o otevřeném zobrazení.



VĚTA. Necht' $f : X \rightarrow Y$ je spojitě lineární a otevřené zobrazení Banachova prostoru na normovaný prostor. Pak Y je Banachův prostor.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita

- ortonormalita

- Besselova

- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' B_r, C_r jsou uzavřené koule o poloměru r a středu v 0 v prostoru X , resp, Y . Protože f je otevřené, existuje klesající posloupnost čísel $s_n \leq 2^{-n}$ tak, že $f(B_{2^{-n}}) \supset C_{s_n}$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' B_r, C_r jsou uzavřené koule o poloměru r a středu v 0 v prostoru X , resp, Y . Protože f je otevřené, existuje klesající posloupnost čísel $s_n \leq 2^{-n}$ tak, že $f(B_{2^{-n}}) \supset C_{s_n}$.



Necht' $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost v Y – lze předpokládat, že $\|y_n - y_{n+1}\| < s_n$. Zvolí se libovolný bod x_1 z $f^{-1}(y_1)$. Protože $\|y_1 - y_2\| < s_1$, existuje $x_2 \in f^{-1}(y_2)$ tak, že $\|x_1 - x_2\| \leq 2^{-1}$. Protože $\|y_2 - y_3\| < s_2$, existuje $x_3 \in f^{-1}(y_3)$ tak, že $\|x_2 - x_3\| \leq 2^{-2}$. Tímto postupem se získá posloupnost bodů $x_n \in f^{-1}(y_n)$, která je cauchyovská. Tedy konverguje k nějakému x , což implikuje konvergenci obrazů y_n (k $f(x)$). \diamond



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se předchozí věta dá dohromady s větou o otevřeném zobrazení, získá se následující důsledek:



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se předchozí věta dá dohromady s větou o otevřeném zobrazení, získá se následující důsledek:



DŮSLEDEK. Necht' f je spojitě lineární zobrazení Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y . Pak nastane právě jedna z následujících možností:

1. $f(X)$ je Banachův prostor;
2. $f(X)$ je 1.kategorie v sobě.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se předchozí věta dá dohromady s větou o otevřeném zobrazení, získá se následující důsledek:



DŮSLEDEK. Necht' f je spojitě lineární zobrazení Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y . Pak nastane právě jedna z následujících možností:

1. $f(X)$ je Banachův prostor;
2. $f(X)$ je 1.kategorie v sobě.



První případ nastane, je-li f otevřené, druhý pokud f není otevřené zobrazení.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se předchozí věta dá dohromady s větou o otevřeném zobrazení, získá se následující důsledek:



DŮSLEDEK. Necht' f je spojitě lineární zobrazení Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y . Pak nastane právě jedna z následujících možností:

1. $f(X)$ je Banachův prostor;
2. $f(X)$ je 1.kategorie v sobě.



První případ nastane, je-li f otevřené, druhý pokud f není otevřené zobrazení.



Chodíme tu pořád okolo horké kaše. Všem je snad jasné, že ty prostory jsou každéj jinéj. Některý jsou menší než jiný, a v tom případě jsou menší opravdu krutě.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Bessellova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojité zobrazení $f : X \rightarrow Y$ mezi metrickými prostory má vždy uzavřený graf v $X \times Y$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojité zobrazení $f : X \rightarrow Y$ mezi metrickými prostory má vždy uzavřený graf v $X \times Y$.



Zobrazení s uzavřeným grafem však nemusí být spojitě ani v případě, že X, Y jsou normované prostory a f je lineární (viz *Otázky*).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojité zobrazení $f : X \rightarrow Y$ mezi metrickými prostory má vždy uzavřený graf v $X \times Y$.



Zobrazení s uzavřeným grafem však nemusí být spojitě ani v případě, že X, Y jsou normované prostory a f je lineární (viz *Otázky*).



VĚTA. (Věta o uzavřeném grafu) Necht' $f : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení mezi Banachovými prostory, které má uzavřený graf. Pak je f spojitě.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcional

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojité zobrazení $f : X \rightarrow Y$ mezi metrickými prostory má vždy uzavřený graf v $X \times Y$.



Zobrazení s uzavřeným grafem však nemusí být spojitě ani v případě, že X, Y jsou normované prostory a f je lineární (viz *Otázky*).



VĚTA. (Věta o uzavřeném grafu) Necht' $f : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení mezi Banachovými prostory, které má uzavřený graf. Pak je f spojitě.



A už je tu druhý kousek.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcional

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' $T \subset X \times Y$ je graf zobrazení f (uvědomte si, že to je lineární podprostor součinu Banachových prostorů a tedy Banachův prostor).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' $T \subset X \times Y$ je graf zobrazení f (uvědomte si, že to je lineární podprostor součinu Banachových prostorů a tedy Banachův prostor).

↓
Projekce $p : T \rightarrow X$ je spojitě a prostě zobrazení na X .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' $T \subset X \times Y$ je graf zobrazení f (uvědomte si, že to je lineární podprostor součinu Banachových prostorů a tedy Banachův prostor).

↓
Projekce $p : T \rightarrow X$ je spojitá a prosté zobrazení na X .

↓
Podle prvního důsledku věty o otevřeném zobrazení má p spojitou inverzi.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' $T \subset X \times Y$ je graf zobrazení f (uvědomte si, že to je lineární podprostor součinu Banachových prostorů a tedy Banachův prostor).

↓
Projekce $p : T \rightarrow X$ je spojitě a prostě zobrazení na X .

↓
Podle prvního důsledku věty o otevřeném zobrazení má p spojitou inverzi.

↓
Ale $f = q \circ p^{-1}$, kde q je druhá projekce $T \rightarrow Y$, takže je f spojitě. ◇



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Poslední kousek je trochu komplikovanější. BUde se však používat často a snadno.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Poslední kousek je trochu komplikovanější. BUde se však používat často a snadno.



Poslední tvrzení v této části se bude týkat vztahu bodové a stejnoměrné omezení funkcionalů na Banachově prostoru.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Poslední kousek je trochu komplikovanější. BUde se však používat často a snadno.



Poslední tvrzení v této části se bude týkat vztahu bodové a stejnoměrné omezení funkcionálů na Banachově prostoru.



VĚTA. (Věta o stejnoměrné omezení) Necht' $f_n : X \rightarrow Y$ je posloupnost spojitých lineárních zobrazení z Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y , která je bodově omezená (tj. $\{f_n(x)\}_n$ je omezená pro každé $x \in X$). Pak je i posloupnost norem $\{\|f_n\|\}$ omezená.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezení
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortonormalita
Bessellova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' posloupnost norem $\{\|f_n\|\}$ není omezená. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ je množina $S_k = \{x \in X; \sup_n \|f_n(x)\| > k\}$ hustá v X .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' posloupnost norem $\{\|f_n\|\}$ není omezená. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ je množina $S_k = \{x \in X; \sup_n \|f_n(x)\| > k\}$ hustá v X .



Jinak by existovala koule $B_{a,r}$ s vlastností $\sup\{\|f_n(x)\|; n \in \mathbb{N}, x \in B_{a,r}\} \leq k$, takže pro libovolné $x \in X$ s normou nejvýše 1 by $\|f_n(x)\| = \frac{1}{r}\|f_n((a + rx) - a)\| \leq \frac{k}{r} + \frac{k}{r}$, protože jak a , tak $a + rx$ náleží do $B_{a,r}$. To je spor s předpokladem neomezenosti.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' posloupnost norem $\{\|f_n\|\}$ není omezená. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ je množina $S_k = \{x \in X; \sup_n \|f_n(x)\| > k\}$ hustá v X .



Jinak by existovala koule $B_{a,r}$ s vlastností $\sup\{\|f_n(x)\|; n \in \mathbb{N}, x \in B_{a,r}\} \leq k$, takže pro libovolné $x \in X$ s normou nejvýše 1 by $\|f_n(x)\| = \frac{1}{r}\|f_n((a + rx) - a)\| \leq \frac{k}{r} + \frac{k}{r}$, protože jak a , tak $a + rx$ náleží do $B_{a,r}$. To je spor s předpokladem neomezenosti.



Množiny S_k jsou otevřené a podle Baireovy věty je jejich průnik neprázdný, např. obsahuje bod z . To ale znamená, že $\sup_n \|f_n(z)\| = +\infty$, což je spor s předpokladem bodové omezenosti. \diamond



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' $f_n : X \rightarrow Y$ je posloupnost spojitých lineárních zobrazení z Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y .

1. Jestliže pro každé $x \in X$ existuje $\lim f_n(x)$, označte ji $f(x)$, je zobrazení f spojitě a lineární.
2. Je-li Y Banachův a pro každé $x \in X$ je posloupnost $\{f_n(x)\}$ cauchyovská, pak f_n konverguje bodově ke spojitě lineární funkci $X \rightarrow Y$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' $f_n : X \rightarrow Y$ je posloupnost spojitých lineárních zobrazení z Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y .

1. Jestliže pro každé $x \in X$ existuje $\lim f_n(x)$, označte ji $f(x)$, je zobrazení f spojitě a lineární.
2. Je-li Y Banachův a pro každé $x \in X$ je posloupnost $\{f_n(x)\}$ Cauchyovská, pak f_n konverguje bodově ke spojitě lineární funkci $X \rightarrow Y$.



Stejněměrná omezenost se dostane snadno z bodové. Ony ty Banachovy prostory tu nejsou pro nic za nic.



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
 - lineární zobrazení
 - lineární funkcionál
 - algebraický duál
 - zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
 - Minkovského norma
 - norma zobrazení
- Hahn-Banach Banachův prostor
 - Otevřené zobrazení
 - Uzavřený graf
 - Stejněměrná omezenost
- Duální prostor
 - druhý duál
- reflexivní prostor
 - vnitřní součin
 - Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
 - ortonormalita
 - Besselova nerovnost
 - Fourierova řada
 - Parsevalova rovnost
 - úplná množina
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DUÁLNÍ PROSTORY



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DUÁLNI PROSTORY



Pro každé spojitě lineární zobrazení f mezi normovanými prostory $X \rightarrow Y$ byla zavedena norma $\|f\|$ a snadno se ukáže, že lineární prostor $B(X, Y)$ všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y (jako podprostor Y^X) spolu s $\|f\|$ je normovaný (viz též *Příklady*).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DUÁLNÍ PROSTORY



Pro každé spojitě lineární zobrazení f mezi normovanými prostory $X \rightarrow Y$ byla zavedena norma $\|f\|$ a snadno se ukáže, že lineární prostor $B(X, Y)$ všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y (jako podprostor Y^X) spolu s $\|f\|$ je normovaný (viz též *Příklady*).



V další části se však omezíme jen na případ $Y = \mathbb{R}$, tj. na lineární podprostor algebraického duálu $X^\#$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita

- ortonormalita

- Bessellova

- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

DUÁLNÍ PROSTORY



Pro každé spojitě lineární zobrazení f mezi normovanými prostory $X \rightarrow Y$ byla zavedena norma $\|f\|$ a snadno se ukáže, že lineární prostor $B(X, Y)$ všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y (jako podprostor Y^X) spolu s $\|f\|$ je normovaný (viz též *Příklady*).



V další části se však omezíme jen na případ $Y = \mathbb{R}$, tj. na lineární podprostor algebraického duálu $X^\#$.



DEFINICE. Pro normovaný prostor X se normovaný prostor $B(X, \mathbb{R})$ značí X' a nazývá **duální prostor** prostoru X .



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{\#\#}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si, že důsledkem Hahnovy-Banachovy věty je $X' \neq 0$ pro $X \neq 0$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si, že důsledkem Hahnovy-Banachovy věty je $X' \neq 0$ pro $X \neq 0$.



Následující tvrzení plyne přímo z obecnějšího tvrzení pro úplný obor hodnot (viz *Příklady*).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si, že důsledkem Hahnovy-Banachovy věty je $X' \neq 0$ pro $X \neq 0$.



Následující tvrzení plyne přímo z obecnějšího tvrzení pro úplný obor hodnot (viz *Příklady*).



VĚTA. Duální prostor je úplný.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Například X jsou spojité funkce na $[0, 1]$. V duálu sedí například Riemannův integrál.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V první části této kapitoly byl lineární prostor vnořen do svého druhého algebraického duálu pomocí zobrazení e_X definovaného rovností $(e_X(x))(f) = f(x)$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V první části této kapitoly byl lineární prostor vnořen do svého druhého algebraického duálu pomocí zobrazení e_X definovaného rovností $(e_X(x))(f) = f(x)$.



Otázkou je, zda pro normovaný prostor X je každé $e_X(x)$ spojitě na X' , tj. zda leží v druhém duálu $(X')'$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V první části této kapitoly byl lineární prostor vnořen do svého druhého algebraického duálu pomocí zobrazení e_X definovaného rovností $(e_X(x))(f) = f(x)$.



Otázkou je, zda pro normovaný prostor X je každé $e_X(x)$ spojitě na X' , tj. zda leží v druhém duálu $(X')'$.



Pro jednoduchost se značí druhý duál $(X')'$ jako X'' .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcional

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Je-li X normovaný prostor, je e_X prosté spojitě lineární zobrazení, které zachovává normu (tj. $\|e_X(x)\| = \|x\|$).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita

- Besselova

- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Je-li X normovaný prostor, je e_X prosté spojité lineární zobrazení, které zachovává normu (tj. $\|e_X(x)\| = \|x\|$).



Důkaz. Spojitost plyne z omezenosti normy: $\|e_X\| \leq 1$, protože $|e_X(x)(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \|f\|$ pro $\|f\| = 1$. Z právě uvedeného plyne $\|e_X(x)\| \leq \|x\|$ a zbývá dokázat opačnou nerovnost. Ta plyne z Hahnovy-Banachovy věty, neboť pro $x \neq 0$ existuje $f \in X'$ s hodnotou $\|x\|$ v x . Tato poslední úvaha dává i prostotu zobrazení e_X . \diamond



- LEKCE39-BAN**
- lineární prostor
 - lineární zobrazení
 - lineární funkcionál
 - algebraický duál
 - zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
 - Minkovského norma
 - norma zobrazení
- Hahn-Banach Banachův prostor
 - Otevřené zobrazení
 - Uzavřený graf
 - Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
 - druhý duál
- reflexivní prostor
 - vnitřní součin
 - Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
 - ortonormalita
 - Besselova nerovnost
 - Fourierova řada
 - Parsevalova rovnost
 - úplná množina
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zobrazení e_X se nazývá *přirozené vložení* X do X'' .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zobrazení e_X se nazývá *přirozené vložení* X do X'' .



V další části bude často X ztotožňován se svým obrazem $e_X(X)$ v X'' a tedy chápán jako podprostor X'' .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zobrazení e_X se nazývá *přirozené vložení* X do X'' .



V další části bude často X ztotožňován se svým obrazem $e_X(X)$ v X'' a tedy chápán jako podprostor X'' .



Případy, kdy e_X je zobrazení na celý prostor X'' jsou velmi důležité (pak X je isomorfní X'').



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zobrazení e_X se nazývá *přirozené vložení* X do X'' .



V další části bude často X ztotožňován se svým obrazem $e_X(X)$ v X'' a tedy chápán jako podprostor X'' .



Případy, kdy e_X je zobrazení na celý prostor X'' jsou velmi důležité (pak X je isomorfní X'').



Protože duální prostory jsou vždy úplné, může tato situace nastat jen pro Banachovy prostory X :



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Banachův prostor X se nazývá **reflexivní**, jestliže přirozené vložení $e_X : X \rightarrow X''$ je zobrazení na.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Banachův prostor X se nazývá **reflexivní**, jestliže přirozené vložení $e_X : X \rightarrow X''$ je zobrazení na.



Reflexivita znamená, že pro každý spojitý lineární funkcionál F na X' existuje $x \in X$ tak, že $F(f) = f(x)$ pro každé $f \in X'$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Banachův prostor X se nazývá **reflexivní**, jestliže přirozené vložení $e_X : X \rightarrow X''$ je zobrazení na.



Reflexivita znamená, že pro každý spojitý lineární funkcionál F na X' existuje $x \in X$ tak, že $F(f) = f(x)$ pro každé $f \in X'$.



Reflexivita je znak dobrého prostoru.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní bude uvedeno několik vět z mnoha tvrzení o duálních a reflexivních prostorech, které pomáhají při zjišťování reflexivity.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní bude uvedeno několik vět z mnoha tvrzení o duálních a reflexivních prostorech, které pomáhají při zjišťování reflexivity.



VĚTA. Jestliže X není separabilní, není ani X' separabilní.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita

- ortonormalita

- Besselova

- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní bude uvedeno několik vět z mnoha tvrzení o duálních a reflexivních prostorech, které pomáhají při zjišťování reflexivity.



VĚTA. Jestliže X není separabilní, není ani X' separabilní.



Důkaz. Protože X není separabilní, existuje nespočetná lineárně nezávislá podmnožina A sféry $\|x\| = 1$ v X jejíž body mají navzájem vzdálenost alespoň nějaké $r > 0$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcional

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní bude uvedeno několik vět z mnoha tvrzení o duálních a reflexivních prostorech, které pomáhají při zjišťování reflexivity.



VĚTA. Jestliže X není separabilní, není ani X' separabilní.



Důkaz. Protože X není separabilní, existuje nespočetná lineárně nezávislá podmnožina A sféry $\|x\| = 1$ v X jejíž body mají navzájem vzdálenost alespoň nějaké $r > 0$.



Pro $a \in A$ existuje $f_a \in X'$ s hodnotou alespoň r v bodě a a anulující se na ostatních bodech množiny A (podle Hahnovy-Banachovy věty). Pro $a, b \in A, a \neq b$, je $\|f_a - f_b\| \geq r$ a tedy X' není separabilní. \diamond



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Banachův prostor X je reflexivní právě když X' je reflexivní.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Banachův prostor X je reflexivní právě když X' je reflexivní.



Důkaz. Necht' X je reflexivní a \mathcal{F} je spojitý lineární funkcionál na X'' , tedy na X , takže existuje $f \in X'$ tak, že $\mathcal{F}(F) = F(f)$ pro každé $F \in X''$. To znamená, že X' je reflexivní.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Banachův prostor X je reflexivní právě když X' je reflexivní.



Důkaz. Necht' X je reflexivní a \mathcal{F} je spojitý lineární funkcionál na X'' , tedy na X , takže existuje $f \in X'$ tak, že $\mathcal{F}(F) = F(f)$ pro každé $F \in X''$. To znamená, že X' je reflexivní.



Necht' nyní X' je reflexivní a X není reflexivní. Podle Hahnovy-Banachovy věty existuje nenulový $\mathcal{F} \in X'''$, který se anuluje na X . Ale $\mathcal{F} = f \in X'$. Nulové hodnoty \mathcal{F} na X znamenají, že $f = 0$ a tedy $\mathcal{F} = 0$, což je spor. \diamond



LEKCE39-BAN
lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortonormalita
Besselova nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Je-li X je reflexivní, je i každý jeho uzavřený lineární podprostor reflexivní.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Je-li X je reflexivní, je i každý jeho uzavřený lineární podprostor reflexivní.



Důkaz. Necht' Y je uzavřený lineární podprostor X a $G \in Y''$. Zdefinujte $F \in X''$ rovností $F(f) = G(f_1)$, kde f_1 je zúžení f na Y . Existuje tedy $x \in X$ tak, že $F = e_X(x)$. Snadno se ukáže, že $x \in Y$ a tedy $G = e_Y(x)$ (jinak by existoval $f \in X'$ nenulový v x a nulový na Y , takže $0 = G(f_1) = F(f) = f(x) \neq 0$). \diamond



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Reflexivita je klíčem ke zkoumání duálu. Sekvence X, X', X'', \dots je periodická.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Reflexivita je klíčem ke zkoumání duálu. Sekvence X, X', X'', \dots je periodická.



Někdy je to konstantní posloupnost. To je špatná konstelace, protože se nás nebude nikdo ptát na šedesátý šestý duál.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HILBERTOVY PROSTORY



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HILBERTOVY PROSTORY



V euklidovských prostorech je ze všech uvedených norem nejpřirozenější norma v $l_2(n)$, která odpovídá běžně užívané geometrické vzdálenosti.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita

- ortonormalita

- Besselova

- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HILBERTOVY PROSTORY



V euklidovských prostorech je ze všech uvedených norem nejpřirozenější norma v $l_2(n)$, která odpovídá běžně užívané geometrické vzdálenosti.



Tato norma $\|\{x_i\}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ je vlastně odmocnina ze skalárního součinu vektoru x se sebou.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HILBERTOVY PROSTORY



V euklidovských prostorech je ze všech uvedených norem nejpřirozenější norma v $l_2(n)$, která odpovídá běžně užívané geometrické vzdálenosti.



Tato norma $\|\{x_i\}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ je vlastně odmocnina ze skalárního součinu vektoru x se sebou.



Podobně lze nahlížet na normu v l_2 a v L_2 (viz dále).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HILBERTOVY PROSTORY



V euklidovských prostorech je ze všech uvedených norem nejpřirozenější norma v $l_2(n)$, která odpovídá běžně užívané geometrické vzdálenosti.



Tato norma $\|\{x_i\}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ je vlastně odmocnina ze skalárního součinu vektoru x se sebou.



Podobně lze nahlížet na normu v l_2 a v L_2 (viz dále).



Skalární součin umožňuje definovat i kolmost vektorů, což byla důležitá vlastnost souboru funkcí $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ v kapitole o Fourierových řadách.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HILBERTOVY PROSTORY



V euklidovských prostorech je ze všech uvedených norem nejpřirozenější norma v $l_2(n)$, která odpovídá běžně užívané geometrické vzdálenosti.



Tato norma $\|\{x_i\}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ je vlastně odmocnina ze skalárního součinu vektoru x se sebou.



Podobně lze nahlížet na normu v l_2 a v L_2 (viz dále).



Skalární součin umožňuje definovat i kolmost vektorů, což byla důležitá vlastnost souboru funkcí $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ v kapitole o Fourierových řadách.



Tato kapitola bude věnována obecnému pohledu na prostory se skalárním součinem a na obecné Fourierovy řady.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Hilbertovy prostory jsou
tím hledaným zobecněním
 $\mathbb{R}^n = l_2(n)$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Hilbertovy prostory jsou tím hledaným zobecněním $\mathbb{R}^n = l_2(n)$.



V těchto prostorech se pracuje s kolmostí. To je základ pro definování vhodného typu prostorů obecně.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Komutativní bilineární funkce $(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **vnitřní součin** na X , jestliže pro každé $x \neq 0$ je $(x, x) > 0$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Komutativní bilineární funkce $(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **vnitřní součin** na X , jestliže pro každé $x \neq 0$ je $(x, x) > 0$.



Vnitřní součin určuje normu způsobem naznačeným v úvodu této části:

VĚTA. Funkce $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ je norma na X .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Komutativní bilineární funkce $(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **vnitřní součin** na X , jestliže pro každé $x \neq 0$ je $(x, x) > 0$.



Vnitřní součin určuje normu způsobem naznačeným v úvodu této části:

VĚTA. Funkce $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ je norma na X .



Prostor s vnitřním součinem bude chápan jako normovaný prostor s právě definovanou normou. Pokud se řekne o normovaném prostoru, že má vnitřní součin, znamená to, že jeho norma je určena tímto součinem.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Stačí dokázat trojúhelníkovou nerovnost $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Ta vyplyne z tzv. Schwartzovy nerovnosti $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$:

$$\|x + y\|^2 = (x + y)(x + y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Stačí dokázat trojúhelníkovou nerovnost $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Ta vyplyne z tzv. Schwartzovy nerovnosti $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$:

$$\|x + y\|^2 = (x + y)(x + y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2.$$



Schwartzova nerovnost se dokáže z nerovnosti $(x + ry)(x + ry) \geq 0$ roznásobením a položením $r = -(x, y)/\|y\|^2$ (lze předpokládat $y \neq 0$); dostane se nerovnost $\|x\|^2 + 2(x, y)^2/\|y\|^2 + (x, y)^2/\|y\|^2 \geq 0$ a odtud již vyplyne výsledek. \diamond



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
- Minkovského norma
- norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako tomu je u normovaných prostorů, jsou úplné prostory s vnitřním součinem velmi důležité a mají svůj název.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako tomu je u normovaných prostorů, jsou úplné prostory s vnitřním součinem velmi důležité a mají svůj název.



DEFINICE. Úplný prostor s vnitřním součinem se nazývá **Hilbertův prostor**.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako tomu je u normovaných prostorů, jsou úplné prostory s vnitřním součinem velmi důležité a mají svůj název.



DEFINICE. Úplný prostor s vnitřním součinem se nazývá **Hilbertův prostor**.



Zřejmě je každý Hilbertův prostor Banachovým prostorem. Vnitřní součin, který má Hilbertův prostor navíc, je velmi silná podmínka (např. implikuje, že každý Hilbertův prostor je reflexivní – viz dále).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z vnitřního součinu plyne (stejně jako u skalárního součinu vektorů) pojem kolmosti prvků:



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z vnitřního součinu plyne (stejně jako u skalárního součinu vektorů) pojem kolmosti prvků:



DEFINICE. Necht' X je prostor s vnitřním součinem. Dva prvky $x, y \in X$ se nazývají **kolmé** (nebo **ortogonální**), jestliže $(x, y) = 0$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z vnitřního součinu plyne (stejně jako u skalárního součinu vektorů) pojem kolmosti prvků:



DEFINICE. Necht' X je prostor s vnitřním součinem. Dva prvky $x, y \in X$ se nazývají **kolmé** (nebo **ortogonální**), jestliže $(x, y) = 0$.



Podmnožina $A \subset X$ se nazývá **ortogonální**, jestliže každé dva její prvky jsou na sebe kolmé. Ortogonální množina se nazývá **ortonormální**, jestliže má každý její prvek normu rovnou 1.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z vnitřního součinu plyne (stejně jako u skalárního součinu vektorů) pojem kolmosti prvků:



DEFINICE. Necht' X je prostor s vnitřním součinem. Dva prvky $x, y \in X$ se nazývají **kolmé** (nebo **ortogonální**), jestliže $(x, y) = 0$.



Podmnožina $A \subset X$ se nazývá **ortogonální**, jestliže každé dva její prvky jsou na sebe kolmé. Ortogonální množina se nazývá **ortonormální**, jestliže má každý její prvek normu rovnou 1.



Dvě podmnožiny A, B prostoru X se nazývají navzájem ortogonální, jestliže každý prvek z A je kolmý na každý prvek z B .



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Bessellova nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Snadno se dokáží následující tvrzení:



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Snadno se dokáží následující tvrzení:



POZOROVÁNÍ. Necht' X je prostor s vnitřním součinem.

1. V X existuje maximální ortonormální množina.
2. Je-li X separabilní, je každá ortogonální podmnožina nejvýše spočetná.
3. Je-li a kolmý na množinu $B \subset X$, je kolmý i na uzavřený lineární obal množiny B .
4. Množina všech prvků X kolmých na danou množinu $B \subset X$, je uzavřený lineární podprostor v X .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je jednoduché a odpovídá geometrické představě, že vzdálenost bodu od roviny je vzdálenost bodu od paty kolmice z bodu na rovinu. Důkaz je také pomocí Pythagorovy věty (viz *Otázky*).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je jednoduché a odpovídá geometrické představě, že vzdálenost bodu od roviny je vzdálenost bodu od paty kolmice z bodu na rovinu. Důkaz je také pomocí Pythagorovy věty (viz *Otázky*).



LEMMA. Necht' $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ je ortonormální množina v X a pro $x \in X$ se označí $x_A = \sum_i (x, u_i)u_i$. Pak $\|x\|^2 \geq \|x_A\|^2 = \sum_i (x, u_i)^2$ a funkce $\|x - y\|$ proměnné $y \in A$ nabývá minima právě v bodě x_A . Toto minimum je vzdálenost x od lineárního obalu množiny A .



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je jednoduché a odpovídá geometrické představě, že vzdálenost bodu od roviny je vzdálenost bodu od paty kolmice z bodu na rovinu. Důkaz je také pomocí Pythagorovy věty (viz *Otázky*).



LEMMA. Necht' $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ je ortonormální množina v X a pro $x \in X$ se označí $x_A = \sum_i (x, u_i)u_i$. Pak $\|x\|^2 \geq \|x_A\|^2 = \sum_i (x, u_i)^2$ a funkce $\|x - y\|$ proměnné $y \in A$ nabývá minima právě v bodě x_A . Toto minimum je vzdálenost x od lineárního obalu množiny A .



Předchozí tvrzení lze zobecnit na nekonečné množiny A . Je možné celou následující teorii vyložit pro obecné Hilbertovy množiny, ale výklad bude podán jen pro separabilní prostory, protože pak jsou ortonormální množiny nejvýše spočetné a sčítají se tedy nejvýše spočetné řady: součet nekonečné řady prvků v normovaném prostoru je, jako v \mathbb{R} , limita posloupnosti částečných součtů.



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
- Minkovského norma
- norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost
- Duální prostor
- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je jednoduché a odpovídá geometrické představě, že vzdálenost bodu od roviny je vzdálenost bodu od paty kolmice z bodu na rovinu. Důkaz je také pomocí Pythagorovy věty (viz *Otázky*).



LEMMA. Necht' $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ je ortonormální množina v X a pro $x \in X$ se označí $x_A = \sum_i (x, u_i)u_i$. Pak $\|x\|^2 \geq \|x_A\|^2 = \sum_i (x, u_i)^2$ a funkce $\|x - y\|$ proměnné $y \in A$ nabývá minima právě v bodě x_A . Toto minimum je vzdálenost x od lineárního obalu množiny A .



Předchozí tvrzení lze zobecnit na nekonečné množiny A . Je možné celou následující teorii vyložit pro obecné Hilbertovy množiny, ale výklad bude podán jen pro separabilní prostory, protože pak jsou ortonormální množiny nejvýše spočetné a sčítají se tedy nejvýše spočetné řady: součet nekonečné řady prvků v normovaném prostoru je, jako v \mathbb{R} , limita posloupnosti částečných součtů.



Nerovnost $\|x\|^2 \geq \sum_n (x, u_n)^2$ v následujícím tvrzení se nazývá **Besselova nerovnost**.



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
- Minkovského norma
- norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEMMA. Necht' $A = \{u_n\}_{\mathbb{N}}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru X a pro $x \in X$ se označí $x_A = \sum_n (x, u_n)u_n$. Pak $\|x\|^2 \geq \|x_A\|^2 = \sum_n (x, u_n)^2$ a funkce $\|x - y\|$ proměnné $y \in A$ nabývá minima právě v bodě x_A . Toto minimum je vzdálenost x od lineárního obalu množiny A .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEMMA. Necht' $A = \{u_n\}_{\mathbb{N}}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru X a pro $x \in X$ se označí $x_A = \sum_n (x, u_n)u_n$. Pak $\|x\|^2 \geq \|x_A\|^2 = \sum_n (x, u_n)^2$ a funkce $\|x - y\|$ proměnné $y \in A$ nabývá minima právě v bodě x_A . Toto minimum je vzdálenost x od lineárního obalu množiny A .



To je velmi hezká vlastnost.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEMMA. Necht' $A = \{u_n\}_{\mathbb{N}}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru X a pro $x \in X$ se označí $x_A = \sum_n (x, u_n)u_n$. Pak $\|x\|^2 \geq \|x_A\|^2 = \sum_n (x, u_n)^2$ a funkce $\|x - y\|$ proměnné $y \in A$ nabývá minima právě v bodě x_A . Toto minimum je vzdálenost x od lineárního obalu množiny A .



To je velmi hezká vlastnost.



V Hilbertových prostorech to prostě platí a basta.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Důkaz. Nejdříve je nutné ukázat, že řady uvedené v tvrzení konvergují. Podle předchozího lemmatu je $\{\sum_i^n (x, u_i)^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ posloupnost omezená shora číslem $\|x\|^2$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Nejdříve je nutné ukázat, že řady uvedené v tvrzení konvergují. Podle předchozího lemmatu je $\{\sum_i^n (x, u_i)^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ posloupnost omezená shora číslem $\|x\|^2$.



To znamená, že řada $\sum_n (x, u_n)^2$ konverguje a odtud plyne, že řada $\sum_n (x, u_n)u_n$ je cauchyovská (ukážete to) a tedy také konverguje.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Nejdříve je nutné ukázat, že řady uvedené v tvrzení konvergují. Podle předchozího lemmatu je $\{\sum_i^n(x, u_i)^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ posloupnost omezená shora číslem $\|x\|^2$.



To znamená, že řada $\sum_n(x, u_n)^2$ konverguje a odtud plyne, že řada $\sum_n(x, u_n)u_n$ je cauchyovská (ukážte to) a tedy také konverguje.



Zbytek tvrzení plyne z předchozího lemmatu přechodem k limitě částečných součtů. ◇



LEKCE39-BAN
lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Předchozí lemma je základním tvrzením pro důkaz následujícího důležitého tvrzení o Fourierových řadách.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Předchozí lemma je základním tvrzením pro důkaz následujícího důležitého tvrzení o Fourierových řadách.



VĚTA. Necht' X je separabilní Hilbertův prostor a $A = \{u_n\}_{\mathbb{N}}$ je ortonormální množina v X . Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. Pro každé $x \in X$ je $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n) u_n$.
2. Pro každé $x \in X$ je $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)^2$.
3. Neexistuje nenulový prvek z X kolmý na A .
4. Lineární obal množiny A je hustý v X .



LEKCE39-BAN
lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{\#\#}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



To je v podstatě o Fourierových řadách. Alespoň to tak vypadá.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do X^{**}

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z důkazu bude vidět, že pro ortonormální posloupnost $\{u_n\}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)u_n$ v Hilbertově prostoru vždy konverguje. Nazývá se **Fourierova řada** bodu x .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z důkazu bude vidět, že pro ortonormální posloupnost $\{u_n\}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)u_n$ v Hilbertově prostoru vždy konverguje. Nazývá se **Fourierova řada** bodu x .

↓
Rovnost v podmínce 2 se nazývá **Parsevalova rovnost**.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z důkazu bude vidět, že pro ortonormální posloupnost $\{u_n\}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)u_n$ v Hilbertově prostoru vždy konverguje. Nazývá se **Fourierova řada** bodu x .

↓
Rovnost v podmínce 2 se nazývá **Parsevalova rovnost**.

↓
Ortonormální množina, pro kterou platí podmínka 3, se nazývá **úplná**.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z důkazu bude vidět, že pro ortonormální posloupnost $\{u_n\}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)u_n$ v Hilbertově prostoru vždy konverguje. Nazývá se **Fourierova řada** bodu x .

↓
Rovnost v podmínce 2 se nazývá **Parsevalova rovnost**.

↓
Ortonormální množina, pro kterou platí podmínka 3, se nazývá **úplná**.

↓
Předchozí tvrzení říká, že Fourierova řada libovolného prvku $x \in X$ konverguje k x právě když je množina A úplná. Není-li A úplná, neplatí Parsevalova rovnost, ale vždy platí Besselova nerovnost.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Zřejmě (roznásobením kvadrátu normy) platí $1 \rightarrow 2$ a dále $2 \rightarrow 3$. Necht' nyní $x \in X$; vektor $x - x_A$ je kolmý na A a tedy $x = x_A$, platí-li podmínka 3. Prvek x_A ovšem náleží do uzavřeného lineárního obalu množiny A , takže platí podmínka 4.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Zřejmě (roznásobením kvadrátu normy) platí $1 \rightarrow 2$ a dále $2 \rightarrow 3$. Necht' nyní $x \in X$; vektor $x - x_A$ je kolmý na A a tedy $x = x_A$, platí-li podmínka 3. Prvek x_A ovšem náleží do uzavřeného lineárního obalu množiny A , takže platí podmínka 4.



Zbývá ukázat, že $4 \rightarrow 1$. To ale opět plyne z předchozího lemmatu, protože za podmínky 4 je vzdálenost bodu x od lineárního obalu množiny A rovná 0 a tedy $x = x_A$. \diamond



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Má každý Hilbertův prostor úplnou ortonormální množinu?



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Má každý Hilbertův prostor úplnou ortonormální množinu?



VĚTA. Necht' X je Hilbertův prostor. Pak platí:

1. X má úplnou ortonormální množinu.
2. Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, má spočetnou úplnou ortonormální množinu.
3. Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, je isometricky isomorfní s l_2 .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Má každý Hilbertův prostor úplnou ortonormální množinu?



VĚTA. Necht' X je Hilbertův prostor. Pak platí:

1. X má úplnou ortonormální množinu.
2. Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, má spočetnou úplnou ortonormální množinu.
3. Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, je isometricky isomorfní s l_2 .



Poslední vlastnost říká, že i prostor L_2 je isometricky isomorfní prostoru l_2 . Vlastně libovolné dva separabilní nekonečně dimensionální Hilbertovy prostory jsou isometricky isomorfní.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{\#\#}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Každá maximální ortonormální množina A v X je úplná. Kdyby nebyla, existoval by nenulový prvek u kolmý na A , takže $A \cup \{u/\|u\|\}$ by byla ortonormální množina větší než A .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Každá maximální ortonormální množina A v X je úplná. Kdyby nebyla, existoval by nenulový prvek u kolmý na A , takže $A \cup \{u/\|u\|\}$ by byla ortonormální množina větší než A .



Je-li X separabilní, má spočetnou hustou množinu $S = \{s_n\}$. Ortogonální množina $\{u_n\}$, mající stejný uzavřený lineární obal jako $\{s_n\}$ (a tedy X), se zkonstruuje tzv. Grammovou-Schmidtovou ortogonalizací (viz též kapitola o Fourierových řadách). Vezme se $u_1 = s_{k_1}$, kde s_{k_1} je první nenulový prvek v S . Pak se vezme první prvek s_{k_2} neležící v lineárním obalu prvku s_{k_1} a najde se lineární kombinace $u_2 = r_1 s_{k_1} + s_{k_2}$ kolmá na u_1 , tj. $r_1 = -(s_1, s_{k_2})/\|s_1\|^2$. Pak se vezme první prvek s_{k_3} neležící v lineárním obalu předchozích prvků s_{k_1}, s_{k_2} a najde se lineární kombinace $u_3 = r_1 s_{k_1} + r_2 s_{k_2} + s_{k_3}$ kolmá na oba předchozí prvky u_{k_1}, u_{k_2} (dostanou se dvě rovnice pro dvě neznámé), atd. Pokud X je nekonečně dimensionální, nemůže konstrukce skončit po konečně mnoha krocích (proč?).



LEKCE39-BAN
lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Bessellova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, má podle předchozí vlastnosti spočetnou úplnou ortonormální množinu $\{u_n\}$, takže každé $x \in X$ lze vyjádřit řadou $\sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)u_n$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, má podle předchozí vlastnosti spočetnou úplnou ortonormální množinu $\{u_n\}$, takže každé $x \in X$ lze vyjádřit řadou $\sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)u_n$.



Má tedy smysl definovat $f(x) = \{(x, u_n)\}$. Podle Parsevalovy rovnosti je $f(x) \in l_2$. Je snadné ukázat, že f je lineární zobrazení zachovávající normu (opět Parsevalova rovnost), takže je i prosté.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, má podle předchozí vlastnosti spočetnou úplnou ortonormální množinu $\{u_n\}$, takže každé $x \in X$ lze vyjádřit řadou $\sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)u_n$.



Má tedy smysl definovat $f(x) = \{(x, u_n)\}$. Podle Parsevalovy rovnosti je $f(x) \in l_2$. Je snadné ukázat, že f je lineární zobrazení zachovávající normu (opět Parsevalova rovnost), takže je i prosté.



Zbývá ukázat, že f zobrazuje X na l_2 . Ale je-li $\{r_n\} \in l_2$, konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} r_n u_n$ (je Cauchyovská) k nějakému x a z ortonormality množiny $\{u_n\}$ ihned plyne, že $r_n = (x, u_n)$. ◇



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jedním z důsledků předchozího isomorfismu mezi X a l_2 je fakt, že duální prostor X' je isomorfní s X a spojité lineární funkcionály jsou dané vnitřním součinem:



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jedním z důsledků předchozího isomorfismu mezi X a l_2 je fakt, že duální prostor X' je isomorfní s X a spojité lineární funkcionály jsou dané vnitřním součinem:



VĚTA. Pro spojitý lineární funkcionál f na separabilním Hilbertově prostoru existuje $u_f \in X$ tak, že $f(x) = (x, u_f)$. Naopak, každý funkcionál uvedeného tvaru je spojitý a lineární. Navíc platí $\|f\| = \|u_f\|$, takže zobrazení $f \rightarrow u_f$ je isometrický isomorfismus X na X' .



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jedním z důsledků předchozího isomorfismu mezi X a l_2 je fakt, že duální prostor X' je isomorfní s X a spojité lineární funkcionály jsou dané vnitřním součinem:



VĚTA. Pro spojitý lineární funkcionál f na separabilním Hilbertově prostoru existuje $u_f \in X$ tak, že $f(x) = (x, u_f)$. Naopak, každý funkcionál uvedeného tvaru je spojitý a lineární. Navíc platí $\|f\| = \|u_f\|$, takže zobrazení $f \rightarrow u_f$ je isometrický isomorfismus X na X' .



DŮSLEDEK. Hilbertovy prostory jsou reflexivní.



LEKCE39-BAN
lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Hilbertovy prostory jsou v podstatě l^2 .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Hilbertovy prostory jsou v podstatě l^2 .



A to je hezké.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZNÁMKY

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Místo termínu *lineární prostor* se používá i termín *vektorový prostor*, který vychází z interpretace bodů euklidovského prostoru jako vektory. Tato interpretace ale není příliš vhodná pro prostory funkcí.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Místo termínu *lineární prostor* se používá i termín *vektorový prostor*, který vychází z interpretace bodů euklidovského prostoru jako vektory. Tato interpretace ale není příliš vhodná pro prostory funkcí.



Uvědomte si, že zapomenete-li v lineárním prostoru X na násobení čísly, dostanete abelskou (tj. komutativní) grupu, a tedy lineární prostor (lépe řečeno, modul) nad okruhem celých čísel.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Místo termínu *lineární prostor* se používá i termín *vektorový prostor*, který vychází z interpretace bodů euklidovského prostoru jako vektory. Tato interpretace ale není příliš vhodná pro prostory funkcí.



Uvědomte si, že zapomenete-li v lineárním prostoru X na násobení čísly, dostanete abelskou (tj. komutativní) grupu, a tedy lineární prostor (lépe řečeno, modul) nad okruhem celých čísel.



Některá obecná tvrzení v tomto textu platí i pro abelovské grupy (některá i pro nekomutativní grupy). Pro studium lineárních prostorů X je důležitý pojem *báze*, což je maximální lineárně nezávislý soubor v X (lineárně nezávislý znamená, že lineární kombinace konečně mnoha prvků množiny s nenulovými koeficienty nemůže být nikdy rovna 0).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Místo termínu *lineární prostor* se používá i termín *vektorový prostor*, který vychází z interpretace bodů euklidovského prostoru jako vektory. Tato interpretace ale není příliš vhodná pro prostory funkcí.



Uvědomte si, že zapomenete-li v lineárním prostoru X na násobení čísly, dostanete abelskou (tj. komutativní) grupu, a tedy lineární prostor (lépe řečeno, modul) nad okruhem celých čísel.



Některá obecná tvrzení v tomto textu platí i pro abelovské grupy (některá i pro nekomutativní grupy). Pro studium lineárních prostorů X je důležitý pojem *báze*, což je maximální lineárně nezávislý soubor v X (lineárně nezávislý znamená, že lineární kombinace konečně mnoha prvků množiny s nenulovými koeficienty nemůže být nikdy rovna 0).



Každá lineárně nezávislá množina v X je částí nějaké báze X (Zornovo lemma) a dvě báze prostoru X mají stejnou mohutnost. Lineární zobrazení na X je určeno svými hodnotami na bázi (každé zobrazení z báze X do lineárního prostoru Y lze rozšířit jednoznačně na lineární zobrazení $X \rightarrow Y$).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Místo termínu *lineární prostor* se používá i termín *vektorový prostor*, který vychází z interpretace bodů euklidovského prostoru jako vektory. Tato interpretace ale není příliš vhodná pro prostory funkcí.



Uvědomte si, že zapomenete-li v lineárním prostoru X na násobení čísly, dostanete abelskou (tj. komutativní) grupu, a tedy lineární prostor (lépe řečeno, modul) nad okruhem celých čísel.



Některá obecná tvrzení v tomto textu platí i pro abelovské grupy (některá i pro nekomutativní grupy). Pro studium lineárních prostorů X je důležitý pojem *báze*, což je maximální lineárně nezávislý soubor v X (lineárně nezávislý znamená, že lineární kombinace konečně mnoha prvků množiny s nenulovými koeficienty nemůže být nikdy rovna 0).



Každá lineárně nezávislá množina v X je částí nějaké báze X (Zornovo lemma) a dvě báze prostoru X mají stejnou mohutnost. Lineární zobrazení na X je určeno svými hodnotami na bázi (každé zobrazení z báze X do lineárního prostoru Y lze rozšířit jednoznačně na lineární zobrazení $X \rightarrow Y$).



Dále platí, že dva lineární prostory jsou isomorfní právě když mají báze stejné mohutnosti. Mocnina \mathbb{R}^S se může definovat i pro $S = \emptyset$ jako $\{0\}$.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro některé formulace je to vhodné. Vztah mezi X a $X^\#$, který dvojici (x, f) přiřazuje $f(x)$ je částí obecnějšího pojmu duality $q : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, kde X, Y jsou lineární prostory a q je bilineární zobrazení (tj. je lineární v každé proměnné, při konstantní druhé proměnné) oddělující body (tj. pro $x \neq 0$ existuje y tak, že $q(x, y) \neq 0$ a podobně prohozeně). Pak ovšem Y je isomorfní lineárnímu podprostoru $X^\#$, který odděluje body X .

Konec poznámek 1.

LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{\#\#}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

První vlastnost normy se nazývá *subaditivita*, druhá vlastnost *homogenita*.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

První vlastnost normy se nazývá *subaditivita*, druhá vlastnost *homogenita*.



Podobně jako se místo metriky někdy používá pseudometrika, lze místo normy použít pseudonormu, která má stejné vlastnosti jako norma, až na to, že připouští $p(x) = 0$ i pro nenulové x .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

První vlastnost normy se nazývá *subaditivita*, druhá vlastnost *homogenita*.



Podobně jako se místo metriky někdy používá pseudometrika, lze místo normy použít pseudonormu, která má stejné vlastnosti jako norma, až na to, že připouští $p(x) = 0$ i pro nenulové x .



Pseudonorma vytváří pseudometriku invariantní vůči posunutí; faktorový prostor podle stejné ekvivalence jako u pseudometrického prostoru (x je ekvivalentní s y , jestliže $\|x - y\| = 0$) je pak normovaný prostor.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

První vlastnost normy se nazývá *subaditivita*, druhá vlastnost *homogenita*.



Podobně jako se místo metriky někdy používá pseudometrika, lze místo normy použít pseudonormu, která má stejné vlastnosti jako norma, až na to, že připouští $p(x) = 0$ i pro nenulové x .



Pseudonorma vytváří pseudometriku invariantní vůči posunutí; faktorový prostor podle stejné ekvivalence jako u pseudometrického prostoru (x je ekvivalentní s y , jestliže $\|x - y\| = 0$) je pak normovaný prostor.



Minkovského funkcionál množiny B bude pseudonormou, pokud se ve vlastnostech B vynechá požadavek, aby množina neobsahovala přímky.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jak bylo naznačeno v textu, metrický lineární prostor se definuje jak lineární prostor X s metrikou, při které je sčítání (bráno jako zobrazení $X \times X \rightarrow X$) a násobení čísly (bráno jako zobrazení $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$) spojitě. To je obecnější pojem než normovaný prostor (viz *Příklady*).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V normovaných prostorech je tedy lineární zobrazení spojitě právě když má omezenou normu, tj. je v normě omezené. Proto se v literatuře často používá termín *omezené zobrazení* místo spojitě zobrazení a ještě častěji *neomezené zobrazení* pro nespojitě zobrazení.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hahnovu-Banachovu větu lze dokázat v jiné formě bez použití norem nebo metrik:
Necht' X je lineární prostor, Y jeho lineární podprostor a $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ lineární zobrazení, které je shora omezeno subaditivní reálnou funkcí p definovanou na X . Pak existuje lineární zobrazení $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ rozšiřující f a shora omezené funkcí p .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hahnovu-Banachovu větu lze dokázat v jiné formě bez použití norem nebo metrik: Necht' X je lineární prostor, Y jeho lineární podprostor a $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ lineární zobrazení, které je shora omezeno subaditivní reálnou funkcí p definovanou na X . Pak existuje lineární zobrazení $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ rozšiřující f a shora omezené funkcí p .



Důkaz je skoro stejný jako důkaz uvedený v textu. Zkuste toto obecné tvrzení dokázat a vyvod' te z něho formulaci v textu.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hahnovu-Banachovu větu lze dokázat v jiné formě bez použití norem nebo metrik: Necht' X je lineární prostor, Y jeho lineární podprostor a $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ lineární zobrazení, které je shora omezeno subaditivní reálnou funkcí p definovanou na X . Pak existuje lineární zobrazení $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ rozšiřující f a shora omezené funkcí p .



Důkaz je skoro stejný jako důkaz uvedený v textu. Zkuste toto obecné tvrzení dokázat a vyvod'te z něho formulaci v textu.



Hahnova-Banachova věta má geometrickou interpretaci, a to oddělování bodů od podprostorů nadrovinami.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského norma
norma zobrazení
Hahn-Banach Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortonormalita
Besselova nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li spojitost zobrazení definována na obecnějších prostorrech než jsou metrické (např. na topologických nebo konvergenčních prostorech), lze definovat i obecnější spojitě lineární prostory, např. topologické lineární prostory: obě algebraické operace musí být spojitě. Tyto struktury jsou velmi obecné a proto se definují jejich různé podtřídy vhodné na různá použití.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V předchozích *Poznámkách* byla zmíněna dualita $q : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Pokud se požaduje, aby q byla separátně spojitá (tj. spojitost v každé proměnné zvlášť jako zobrazení jedné proměnné při konstantní druhé proměnné), dostává se tzv. topologická dualita.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V *Otázkách* je uvedeno, že všechny konečně dimensionální normované prostory jsou navzájem isomorfní (spojitě). To neplatí pro nekonečně dimensionální prostory (např. l_1 není isomorfní l_2), ale bylo dokázáno, že všechny Banachovy separabilní prostory jsou navzájem homeomorfní (platí i pro Fréchetovy prostory). Tyto homeomorfismy nejsou lineární.

Konec poznámek 2.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Mnoho uvedených tvrzení, kde je potřeba úplnost, lze dokázat (často jednoduchou modifikací uvedených důkazů) pro metrické lineární prostory, tj. není nutné předpokládat existenci normy.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Mnoho uvedených tvrzení, kde je potřeba úplnost, lze dokázat (často jednoduchou modifikací uvedených důkazů) pro metrické lineární prostory, tj. není nutné předpokládat existenci normy.



Ale je zřejmé, že v praxi se lépe pracuje s normou než s metrikou. Nicméně, i úplné metrické lineární prostory jsou důležité a mají také svůj název: *Fréchetovy prostory*.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita

- ortonormalita

- Bessellova

- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při rozšiřování algebraických operací na úplný obal metrického lineárního prostoru lze použít i jiný postup.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při rozšiřování algebraických operací na úplný obal metrického lineárního prostoru lze použít i jiný postup.



Sčítání $X \times X \rightarrow X$ je stejnoměrně spojitě a lze jej tedy rozšířit na stejnoměrně spojitě zobrazení $Z \times Z \rightarrow Z$ (značení z důkazu).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při rozšiřování algebraických operací na úplný obal metrického lineárního prostoru lze použít i jiný postup.



Sčítání $X \times X \rightarrow X$ je stejnoměrně spojitě a lze jej tedy rozšířit na stejnoměrně spojitě zobrazení $Z \times Z \rightarrow Z$ (značení z důkazu).



Násobení číslem ale není stejnoměrně spojitě na součinu $\mathbb{R} \times X$, je však stejnoměrně spojitě ve druhé souřadnici při konstantní první souřadnici.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita

- ortonormalita

- Besselova

- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při rozšiřování algebraických operací na úplný obal metrického lineárního prostoru lze použít i jiný postup.



Sčítání $X \times X \rightarrow X$ je stejnoměrně spojitě a lze jej tedy rozšířit na stejnoměrně spojitě zobrazení $Z \times Z \rightarrow Z$ (značení z důkazu).



Násobení číslem ale není stejnoměrně spojitě na součinu $\mathbb{R} \times X$, je však stejnoměrně spojitě ve druhé souřadnici při konstantní první souřadnici.



Tedy lze pro každé reálné r zobrazení $x \rightarrow rx$ rozšířit na stejnoměrně spojitě zobrazení $Z \rightarrow Z$. Axiomy lineárního prostoru vyplynou z toho, že X je hustý v Z : např. obě zobrazení $(z, z') \rightarrow z + z'$, $(z, z') \rightarrow z' + z$ se rovnají na $X \times X$ a tedy se rovnají i na $Z \times Z$.



LEKCE39-BAN
lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V metrických prostorech je kromě úplnosti ještě velmi důležitou vlastností kompaktnost. Aspoň dvoubodový metrický lineární prostor však nikdy není kompaktní (proč?). Může být lokálně kompaktní? Ano, ale právě když je konečně dimenzionální, tj. isomorfní euklidovskému prostoru.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro analýzu jsou velmi důležité Banachovy prostory funkcí (všimněte si, že skoro všechny zde uváděné příklady jsou tohoto typu).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro analýzu jsou velmi důležité Banachovy prostory funkcí (všimněte si, že skoro všechny zde uváděné příklady jsou tohoto typu).



Různé prostory funkcí se dají v rámci Banachových prostorů charakterizovat. Zvláště se to týká prostorů $C(X)$ na kompaktních prostorech X (každý Banachův prostor se dá přirozeně vnořit do takového prostoru – ale X je obecně topologický, nemusí být metrický).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro analýzu jsou velmi důležité Banachovy prostory funkcí (všimněte si, že skoro všechny zde uváděné příklady jsou tohoto typu).



Různé prostory funkcí se dají v rámci Banachových prostorů charakterizovat. Zvláště se to týká prostorů $C(X)$ na kompaktních prostorech X (každý Banachův prostor se dá přirozeně vnořit do takového prostoru – ale X je obecně topologický, nemusí být metrický).



Platí i zajímavá Banachova-Stoneova věta: *Dva metrické kompaktní prostory jsou homeomorfní právě když jejich Banachovy prostory $C(X)$, $C(Y)$ jsou isometricky isomorfní.*

Konec poznámek 3.

LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortonormalita
ortonormalita
Besselova nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

V literatuře se místo termínu *duální* používá i termín *adjungovaný* a značení X^* . Toto značení je obvyklé zvláště v Hilbertových prostorech.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

V literatuře se místo termínu *duální* používá i termín *adjungovaný* a značení X^* . Toto značení je obvyklé zvláště v Hilbertových prostorech.



Duální jsou nejen prostory, ale i zobrazení. Jestliže $F : X \rightarrow Y$ je spojitě lineární zobrazení mezi normovanými prostory, existuje tzv. *duální zobrazení* $F' : Y' \rightarrow X'$, které je definováno pomocí složení: $F'(g) = g \circ F$. Lze snadno ukázat, že duální zobrazení je spojitě a lineární a má stejnou normu jako původní zobrazení.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

V literatuře se místo termínu *duální* používá i termín *adjungovaný* a značení X^* . Toto značení je obvyklé zvláště v Hilbertových prostorech.



Duální jsou nejen prostory, ale i zobrazení. Jestliže $F : X \rightarrow Y$ je spojitě lineární zobrazení mezi normovanými prostory, existuje tzv. *duální zobrazení* $F' : Y' \rightarrow X'$, které je definováno pomocí složení: $F'(g) = g \circ F$. Lze snadno ukázat, že duální zobrazení je spojitě a lineární a má stejnou normu jako původní zobrazení.



V definici reflexivity nelze isomorfismus e_X zaměnit existencí isomorfismu mezi X a X'' . Existují příklady Banachových prostorů X isomorfních svému druhému duálu, které nejsou reflexivní.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V *Otázkách* je zmínka o slabé omezenosti. Podobně lze definovat i *slabou konvergenci* posloupnosti $\{x_n\}$ v normovaném prostoru X : pro každé $f \in X'$ je $\{f(x_n)\}$ konvergentní. Konvergence v normě se pak nazývá silná konvergence.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V *Otázkách* je zmínka o slabé omezenosti. Podobně lze definovat i *slabou konvergenci* posloupnosti $\{x_n\}$ v normovaném prostoru X : pro každé $f \in X'$ je $\{f(x_n)\}$ konvergentní. Konvergence v normě se pak nazývá silná konvergence.



Slabou konvergenci lze vhodně použít k různým charakterizacím:

- Banachův prostor X je konečně dimensionální právě když slabá a silná konvergence v X jsou totožné,
- Banachův prostor X je reflexivní právě když z každé posloupnosti v jednotkové kouli B lze vybrat konvergentní podposloupnost (tzv. slabá sekvenční kompaktnost).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně lze definovat tzv. slabou* konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ v duálu X' : pro každé $x \in X$ je $\{f(x_n)\}$ konvergentní. Uvědomte si, že slabá konvergence v duálu je definována vzhledem k dualitě x' s X'' , kdežto slabá* konvergence je definována vzhledem k dualitě X' s X . Tyto pojmy je ovšem vhodnější studovat v rámci topologických prostorů (slabá konvergence obecně není definována pomocí metriky).

Konec poznámek 4.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Bessellova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

Vnitřní součin se také, podle analogie s euklidovskými prostory, nazývá *skalární součin*. Slovo „vnitřní“ rozlišuje součin od vnějšího součinu násobení vektoru číslem.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

Vnitřní součin se také, podle analogie s euklidovskými prostory, nazývá *skalární součin*. Slovo „vnitřní“ rozlišuje součin od vnějšího součinu násobení vektoru číslem.



Prostor s vnitřním součinem se občas nazývá *unitární prostor*.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

Vnitřní součin se také, podle analogie s euklidovskými prostory, nazývá *skalární součin*. Slovo „vnitřní“ rozlišuje součin od vnějšího součinu násobení vektoru číslem.



Prostor s vnitřním součinem se občas nazývá *unitární prostor*.



Prostory s vnitřním součinem se většinou zkoumají nad komplexními čísly. Protože norma musí být vždy reálné číslo, musí být součin x se sebou reálné číslo. Musí se tedy vzít za součin, např. na 1-dimensionálním prostoru, $x\bar{x}$, tedy součin s komplexně sdruženým číslem. Pak ale součin $(x, y) = x\bar{y}$ není komutativní a místo rovnosti $(x, y) = (y, x)$ se musí požadovat rovnost $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Uvědomte si, že potom neplatí $r(x, y) = (x, ry)$ ale $r(x, y) = (x, \bar{r}y)$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

Vnitřní součin se také, podle analogie s euklidovskými prostory, nazývá *skalární součin*. Slovo „vnitřní“ rozlišuje součin od vnějšího součinu násobení vektoru číslem.



Prostor s vnitřním součinem se občas nazývá *unitární prostor*.



Prostory s vnitřním součinem se většinou zkoumají nad komplexními čísly. Protože norma musí být vždy reálné číslo, musí být součin x se sebou reálné číslo. Musí se tedy vzít za součin, např. na 1-dimensionálním prostoru, $x\bar{x}$, tedy součin s komplexně sdruženým číslem. Pak ale součin $(x, y) = x\bar{y}$ není komutativní a místo rovnosti $(x, y) = (y, x)$ se musí požadovat rovnost $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Uvědomte si, že potom neplatí $r(x, y) = (x, ry)$ ale $r(x, y) = (x, \bar{r}y)$.



Jak bylo vidět, ze Schwartzovy nerovnosti se snadno dokáže trojúhelníková nerovnost příslušné normy v prostorech s vnitřním součinem, např. l_2, L_2 . Obdobně se dokazuje trojúhelníková nerovnost pro prostory l_p, L_p , kde se obdoba Schwartzovy nerovnosti nazývá Hölderova nerovnost. Např. pro l_p tato nerovnost vypadá následovně (pro $\{x_n\} \in l_p, \{y_n\} \in l_q$, kde $1/p + 1/q = 1$):

$$\sum x_n y_n \leq \sqrt[p]{\sum |x_n|^p} \sqrt[q]{\sum |y_n|^q}$$

a podobně pro L_p, L_q : $\int fg \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Hölderovu nerovnost lze dokázat např. pomocí hledání extrémů funkcí.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o Fourierových řadách platí i pro neseparabilní prostory. Pak je ale nutné definovat součty nespočetných řad. Není to příliš velký rozdíl, protože pro funkci f definovanou na nějaké množině P s hodnotami v normovaném prostoru se součet $\sum_P f(p)$ definuje jako limita zobecněné (obecně nespočetné) posloupnosti součtů přes konečné podmnožiny v P . Dá se ukázat, že pokud takováto řada konverguje, je jen spočetně mnoho hodnot $f(p)$ nenulových (např. pro $\{p_n\}$ a řada $\sum f(p_n)$ konverguje absolutně.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o Fourierových řadách platí i pro neseparabilní prostory. Pak je ale nutné definovat součty nespočetných řad. Není to příliš velký rozdíl, protože pro funkci f definovanou na nějaké množině P s hodnotami v normovaném prostoru se součet $\sum_P f(p)$ definuje jako limita zobecněné (obecně nespočetné) posloupnosti součtů přes konečné podmnožiny v P . Dá se ukázat, že pokud takováto řada konverguje, je jen spočetně mnoho hodnot $f(p)$ nenulových (např. pro $\{p_n\}$ a řada $\sum f(p_n)$ konverguje absolutně.



Důsledkem je isometrický isomorfismus Hilbertova prostoru (mající úplný ortonormální systém mohutnosti κ) s prostorem $l_2(\kappa)$, který se definuje jako množina souborů $\{r_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ reálných čísel majících jen spočetně mnoho čísel r_α nenulových a takových, že $\sum r_\alpha^2$ konverguje.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o Fourierových řadách platí i pro neseparabilní prostory. Pak je ale nutné definovat součty nespočetných řad. Není to příliš velký rozdíl, protože pro funkci f definovanou na nějaké množině P s hodnotami v normovaném prostoru se součet $\sum_P f(p)$ definuje jako limita zobecněné (obecně nespočetné) posloupnosti součtů přes konečné podmnožiny v P . Dá se ukázat, že pokud takováto řada konverguje, je jen spočetně mnoho hodnot $f(p)$ nenulových (např. pro $\{p_n\}$ a řada $\sum f(p_n)$ konverguje absolutně.



Důsledkem je isometrický isomorfismus Hilbertova prostoru (mající úplný ortonormální systém mohutnosti κ) s prostorem $l_2(\kappa)$, který se definuje jako množina souborů $\{r_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ reálných čísel majících jen spočetně mnoho čísel r_α nenulových a takových, že $\sum r_\alpha^2$ konverguje.



Odtud plyne, že libovolné dvě úplné ortonormální podmnožiny Hilbertova prostoru mají stejnou mohutnost.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o Fourierových řadách platí i pro neseparabilní prostory. Pak je ale nutné definovat součty nespočetných řad. Není to příliš velký rozdíl, protože pro funkci f definovanou na nějaké množině P s hodnotami v normovaném prostoru se součet $\sum_P f(p)$ definuje jako limita zobecněné (obecně nespočetné) posloupnosti součtů přes konečné podmnožiny v P . Dá se ukázat, že pokud takováto řada konverguje, je jen spočetně mnoho hodnot $f(p)$ nenulových (např. pro $\{p_n\}$ a řada $\sum f(p_n)$ konverguje absolutně.



Důsledkem je isometrický isomorfismus Hilbertova prostoru (mající úplný ortonormální systém mohutnosti κ) s prostorem $l_2(\kappa)$, který se definuje jako množina souborů $\{r_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ reálných čísel majících jen spočetně mnoho čísel r_α nenulových a takových, že $\sum r_\alpha^2$ konverguje.



Odtud plyne, že libovolné dvě úplné ortonormální podmnožiny Hilbertova prostoru mají stejnou mohutnost.



Poslední tvrzení o duálním prostoru platí také bez separability.



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
- Minkovského
- norma
- norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

V této kapitole bylo dokázáno, že každá Fourierova řada funkce $f \in L_2(J)$ konverguje k f . Uvědomte si však rozdíl oproti konvergenci zkoumané v kapitole o Fourierových řadách.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V této kapitole bylo dokázáno, že každá Fourierova řada funkce $f \in L_2(J)$ konverguje k f . Uvědomte si však rozdíl oproti konvergenci zkoumané v kapitole o Fourierových řadách.



Tam se zkoumala bodová nebo stejnoměrná konvergence, což je rozdíl oproti konvergenci v $L_2(J)$. Navíc se mohou zkoumat i Fourierovy řady (trigonometrické řady) funkcí f neležících v L_2 .



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hilbertovy prostory jsou natolik důležité, že je podstatné umět je rozpoznat ve třídě Banachových prostorů.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hilbertovy prostory jsou natolik důležité, že je podstatné umět je rozpoznat ve třídě Banachových prostorů.



Existuje mnoho podmínek, které Banachův prostor splňuje právě když je Hilbertův.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův protor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hilbertovy prostory jsou natolik důležité, že je podstatné umět je rozpoznat ve třídě Banachových prostorů.



Existuje mnoho podmínek, které Banachův prostor splňuje právě když je Hilbertův.



Např. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (tato podmínka lze zeslabit požadavky $\|x\| = \|y\| = 1$).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hilbertovy prostory jsou natolik důležité, že je podstatné umět je rozpoznat ve třídě Banachových prostorů.



Existuje mnoho podmínek, které Banachův prostor splňuje právě když je Hilbertův.



Např. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (tato podmínka lze zeslabit požadavky $\|x\| = \|y\| = 1$).



Odtud vyplývá, že Banachův prostor je Hilbertův právě když každý jeho dvourozměrný podprostor je isometricky isomorfní s rovinou \mathbb{R}^2 .

Konec poznámek 5.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PŘÍKLADY

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

V kapitole o metrických prostorech je mezi příklady mnoho lineárních prostorů, které teď zopakujeme.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

V kapitole o metrických prostorech je mezi příklady mnoho lineárních prostorů, které teď zopakujeme.



1. Euklidovské prostory jsou lineární při operacích definovaných po souřadnicích.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Prostory $l_p, p \in [1, +\infty]$, jsou lineární při operacích definovaných po souřadnicích.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Množina všech reálných funkcí $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ na množině A (tj. mocnina \mathbb{R}^A) je lineární prostor při operacích definovaných po souřadnicích.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Množina všech reálných funkcí $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ na množině A (tj. mocnina \mathbb{R}^A) je lineární prostor při operacích definovaných po souřadnicích.



Následující množiny jsou lineární podprostory prostoru \mathbb{R}^A (kromě první položky je A metrický prostor):

- $\mathcal{F}_*(A, \mathbb{R})$ všech omezených funkcí;
- $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ všech spojitých funkcí a $\mathcal{C}_*(A, \mathbb{R})$ všech omezených spojitých funkcí;
- $\mathcal{U}(A, \mathbb{R})$ všech stejnoměrně spojitých funkcí a $\mathcal{U}_*(A, \mathbb{R})$ všech omezených stejnoměrně spojitých funkcí;
- $\mathcal{L}(A, \mathbb{R})$ všech lipschitzovských funkcí a množina $\mathcal{L}_*(A, \mathbb{R})$ všech omezených lipschitzovských funkcí.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Je-li v předchozím příkladu $A = \mathbb{R}$, lze k lineárním podprostorům $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ přidat i prostory množiny funkcí majících všude derivaci až do řádu n , nebo derivace všech řádů.

Konec příkladů 1.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

V předchozích *Příkladech* byly použity různé prostory z kapitoly o metrických prostorech, ale jen jako lineární struktury bez metrik na nich definovaných. Nyní budou vzaty v úvahu i metriky.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

V předchozích *Příkladech* byly použity různé prostory z kapitoly o metrických prostorech, ale jen jako lineární struktury bez metrik na nich definovaných. Nyní budou vzaty v úvahu i metriky.



1. Ukažte, že prostory $l_p(n)$, $p \in [1, +\infty]$, jsou normované.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte, že prostory l_p , $p \in [1, +\infty]$, jsou normované.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Podmnožiny $c_0 \subset c \subset l_\infty$, kde $c = \{ \{x_n\}; \lim x_n \text{ existuje} \}$, $c_0 = \{ \{x_n\}; \lim x_n = 0 \}$, jsou uzavřené lineární podprostory l_∞ .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Množina *všech* reálných posloupností lze chápat jako kartézský součin metrických prostorů, a to spočetně mnoha reálných přímek, tj. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Množina *všech* reálných posloupností lze chápat jako kartézský součin metrických prostorů, a to spočetně mnoha reálných přímek, tj. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.



To je lineární prostor a metrika této mocniny

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)}$$

vytváří z $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ metrický lineární prostor, který se často značí s .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Množina *všech* reálných posloupností lze chápat jako kartézský součin metrických prostorů, a to spočetně mnoha reálných přímek, tj. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.



To je lineární prostor a metrika této mocniny

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)}$$

vytváří z $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ metrický lineární prostor, který se často značí s .



Tento prostor není normovaný, ani na něm nelze definovat normu topologicky ekvivalentní dané metrice. [Důvod plyne z *Otázky 5* – s nemá omezená okolí 0.]



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Součty nekonečných řad čísel jsou vlastně integrály funkcí na \mathbb{N} podle tzv. čítací míry. Je nasnadě definovat obdobu prostorů l_p na obecných prostorech s mírou. Pro jednoduchost však bude pozornost věnována prostorům funkcí na intervalu $I = [0, 1]$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Bessellova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Součty nekonečných řad čísel jsou vlastně integrály funkcí na \mathbb{N} podle tzv. čítací míry. Je nasnadě definovat obdobu prostorů l_p na obecných prostorech s mírou. Pro jednoduchost však bude pozornost věnována prostorům funkcí na intervalu $I = [0, 1]$.



Pro $p \in [1, +\infty)$ se definuje $L_p = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; \int_I |f(x)|^p dx \text{ konverguje}\}$. S funkcí $\|f\| = \sqrt[p]{\int_I |f(x)|^p dx}$ tvoří L_p pseudonormovaný prostor (normovaný po ztotožnění funkcí rovných skoro všude). Důkaz trojúhelníkové nerovnosti pro $\|f\|$ (tzv. Minkovského nerovnost) není jednoduchý.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Součty nekonečných řad čísel jsou vlastně integrály funkcí na \mathbb{N} podle tzv. čítací míry. Je nasnadě definovat obdobu prostorů l_p na obecných prostorech s mírou. Pro jednoduchost však bude pozornost věnována prostorům funkcí na intervalu $I = [0, 1]$.



Pro $p \in [1, +\infty)$ se definuje $L_p = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; \int_I |f(x)|^p dx \text{ konverguje}\}$. S funkcí $\|f\| = \sqrt[p]{\int_I |f(x)|^p dx}$ tvoří L_p pseudonormovaný prostor (normovaný po ztotožnění funkcí rovných skoro všude). Důkaz trojúhelníkové nerovnosti pro $\|f\|$ (tzv. Minkovského nerovnost) není jednoduchý.



Lze definovat i L_∞ s pseudonormou rovnou infimu suprem funkce f na $I \setminus S$, kde S probíhá nulové množiny.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Součty nekonečných řad čísel jsou vlastně integrály funkcí na \mathbb{N} podle tzv. čítací míry. Je nasnadě definovat obdobu prostorů l_p na obecných prostorech s mírou. Pro jednoduchost však bude pozornost věnována prostorům funkcí na intervalu $I = [0, 1]$.



Pro $p \in [1, +\infty)$ se definuje $L_p = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; \int_I |f(x)|^p dx \text{ konverguje}\}$. S funkcí $\|f\| = \sqrt[p]{\int_I |f(x)|^p dx}$ tvoří L_p pseudonormovaný prostor (normovaný po ztotožnění funkcí rovných skoro všude). Důkaz trojúhelníkové nerovnosti pro $\|f\|$ (tzv. Minkovského nerovnost) není jednoduchý.



Lze definovat i L_∞ s pseudonormou rovnou infimu suprem funkce f na $I \setminus S$, kde S probíhá nulové množiny.



Obdobou metrického lineárního prostoru s je prostor S všech integrovatelných funkcí na I s pseudometrikou

$$d(f, g) = \int_I \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx.$$

Tento prostor také není normovaný.



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
 - lineární zobrazení
 - lineární funkcionál
 - algebraický duál
 - zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
 - Minkovského norma
 - norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
 - Otevřené zobrazení
 - Uzavřený graf
 - Stejněměrná omezenost
- Duální prostor
 - druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
 - Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
 - ortonormalita
 - Besselova nerovnost
 - Fourierova řada
 - Parsevalova rovnost
 - úplná množina
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Prostor $\mathcal{F}_*(X)$ všech omezených reálných funkcí na množině X se supremovou normou $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$ je normovaný prostor.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Prostor $\mathcal{F}_*(X)$ všech omezených reálných funkcí na množině X se supremovou normou $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$ je normovaný prostor.



Jeho lineární podprostory $\mathcal{C}_*(X)$, $\mathcal{U}_*(X)$ a $\mathcal{L}_*(X)$ všech omezených spojitých, resp. stejnoměrně spojitých nebo lipschitzovských funkcí na metrickém prostoru X jsou uzavřené.



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor
druhý duál

reflexivní prostor
vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Vezměte podprostor Y v $\mathcal{C}([0, 1])$ všech funkcí majících na $[0, 1]$ spojitou derivaci. Pak lineární zobrazení $F : Y \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ definované rovností $F(f) = f'$ není spojité.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Vezměte podprostor Y v $\mathcal{C}([0, 1])$ všech funkcí majících na $[0, 1]$ spojitou derivaci. Pak lineární zobrazení $F : Y \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ definované rovností $F(f) = f'$ není spojité.



Pokud vezmete na Y normu $\|f\| = \sup |f(x)| + \sup |f'(x)|$, bude F spojité (tato metrika byla používána v kapitole o variačním počtu jako metrika 1.řádu).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita

- ortonormalita

- Besselova

- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

8. V *Příkladech 5* v kapitole o metrických prostorech (část o úplnosti) jsou popsány prostory hölderovských funkcí s pseudonormou rovnou nejmenší konstantě k , pro níž platí definující nerovnost hölderovských funkcí stupně α , tj. $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

8. V *Příkladech 5* v kapitole o metrických prostorech (část o úplnosti) jsou popsány prostory hölderovských funkcí s pseudonormou rovnou nejmenší konstantě k , pro níž platí definující nerovnost hölderovských funkcí stupně α , tj. $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$.



V uvedených příkladech je uveden obecnější případ a pseudonorma je popsána vzorcem. Získané prostory \mathcal{H}_α , $\alpha \in [0, 1]$, jsou pseudonormované prostory. Jejich normovaná modifikace je isomorfní podprostoru těch funkcí, které mají hodnotu 0 v 0.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

9. Prostor $B(X, Y)$ všech spojitých lineárních zobrazení $f : X \rightarrow Y$ mezi normovanými prostory, s normou $\|f\|$, je normovaný prostor.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

9. Prostor $B(X, Y)$ všech spojitých lineárních zobrazení $f : X \rightarrow Y$ mezi normovanými prostory, s normou $\|f\|$, je normovaný prostor.



Je to uzavřený lineární podprostor prostoru \mathcal{H}_1 z předchozího příkladu.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

10. Z teorie integrálních rovnic je znám následující příklad. Necht' funkce $k(x, y)$ je spojitá na čtverci $[0, 1] \times [0, 1]$ a $F(f)(y) = \int_0^1 k(x, y)f(x) dx$. Je-li $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, je i $F(f) \in \mathcal{C}([0, 1])$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

10. Z teorie integrálních rovnic je znám následující příklad. Necht' funkce $k(x, y)$ je spojitá na čtverci $[0, 1] \times [0, 1]$ a $F(f)(y) = \int_0^1 k(x, y)f(x) dx$. Je-li $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, je i $F(f) \in \mathcal{C}([0, 1])$.



Zobrazení F je spojitě a lineární. Jeho norma je rovna $\sup\{\int_0^1 |k(x, y)| dx; y \in [0, 1]\}$. Zkuste zjistit, jak se norma změní, chápete-li F jako zobrazení $L_1 \rightarrow L_1$ nebo $L_1 \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$.

Konec příkladů 2.

LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

Úplnost většiny následujících prostorů byla ukázána v příkladech v kapitole o metric-
kých prostorech.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

Úplnost většiny následujících prostorů byla ukázána v příkladech v kapitole o metrických prostorech.



1. Všechny dříve uvedené příklady normovaných prostorů složených z posloupností $(l_p(n), l_p, c, c_0)$ jsou Banachovy prostory.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

Úplnost většiny následujících prostorů byla ukázána v příkladech v kapitole o metrických prostorech.



1. Všechny dříve uvedené příklady normovaných prostorů složených z posloupností $(l_p(n), l_p, c, c_0)$ jsou Banachovy prostory.



Prostor s je Fréchetův.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Podprostory prostorů l_p, c, c_0 skládajících se z posloupností majících jen konečně mnoho nenulových členů, nejsou úplné. Proč?



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Všechny dříve uvedené příklady normovaných prostorů složených z funkcí $(L_p, \mathcal{F}_*(X), \mathcal{C}_*(X), \mathcal{U}_*(X))$ jsou Banachovy prostory.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Všechny dříve uvedené příklady normovaných prostorů složených z funkcí $(L_p, \mathcal{F}_*(X), \mathcal{C}_*(X), \mathcal{U}_*(X))$ jsou Banachovy prostory.



Prostor S je Fréchetův prostor.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Prostor $B(X, Y)$ všech spojitých lineárních zobrazení normovaného prostoru X do Banachova prostoru Y je úplný. Platí i jistý opak: Je-li $X \neq \{0\}$ a $B(X, Y)$ je úplný, je i Y úplný.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Pro $1 \leq p < q \leq \infty$ je l_p lineární podprostor l_q a identické vložení $l_p \rightarrow l_q$ je spojité (tj, l_q má hrubší normu nebo topologii než l_p). Ukažte, že l_p je 1.kategorie v l_q .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Pro $1 \leq p < q \leq \infty$ je l_p lineární podprostor l_q a identické vložení $l_p \rightarrow l_q$ je spojitý (tj, l_q má hrubší normu nebo topologii než l_p). Ukažte, že l_p je 1.kategorie v l_q .



Stejný výsledek platí pro vložení $L_p \rightarrow L_q, 1 \leq p < q \leq \infty$ a pro $\mathcal{H}_\alpha \rightarrow \mathcal{H}_\beta, 1 \geq \alpha > \beta \geq 0$.

Konec příkladů 3.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Bessellova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

1. (Příklad známý z lineární algebry.) Duální prostor ke konečně dimensionálnímu prostoru je konečně dimensionální (se stejnou dimenzí).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

1. (Příklad známý z lineární algebry.) Duální prostor ke konečně dimensionálnímu prostoru je konečně dimensionální (se stejnou dimenzí).



Pokud jsou následující popisy duálů prostorů posloupností čísel $x = \{x_n\}$ také posloupnosti $f = \{a_n\}$, je hodnota $f(x)$ rovna $\sum a_n x_n$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. $(l_1)'$ je isomorfní l_∞ .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Pro $p \in (1, +\infty)$ je $(l_p)'$ je isomorfní l_q , kde $1/p + 1/q = 1$. Prostory l_p jsou reflexivní právě pro $p \in (1, +\infty)$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. $(c_0)'$ i $(c)'$ jsou isomorfní l_1 .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. $(l_\infty)'$ je isomorfní prostoru jistých konečně aditivních funkcí na \mathbb{N} . Prostory l_1, c_0, c, l_∞ nejsou reflexivní. [Použijte vztah mezi separabilitou a duálem u prvních tří prostorů a reflexivity duálu u l_∞ .]



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. $(l_\infty)'$ je isomorfní prostoru jistých konečně aditivních funkcí na \mathbb{N} . Prostory l_1, c_0, c, l_∞ nejsou reflexivní. [Použijte vztah mezi separabilitou a duálem u prvních tří prostorů a reflexivity duálu u l_∞ .]



Pokud jsou v následujících popisech duálu prostorů funkcí f za funkcionály také funkce g , je hodnota $g(f)$ rovna $\int fg$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. V předchozích příkladech 2–3 lze místo l psát L . Pro $p \in (1, +\infty)$ jsou prostory L_p reflexivní, prostory L_1 a L_∞ nejsou reflexivní.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. V předchozích příkladech 2–3 lze místo l psát L . Pro $p \in (1, +\infty)$ jsou prostory L_p reflexivní, prostory L_1 a L_∞ nejsou reflexivní.



Ani prostor C spojitých funkcí na $[0, 1]$ se supremovou normou není reflexivní (jeho duál je isomorfní jisté množině měr).



LEKCE39-BAN
lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortonormalita
ortonormalita
Bessellova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Ukažte, že na prostorech s a S neexistuje nenulový spojitý lineární funkcionál.

Konec příkladů 4.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

1. Každý konečně dimensionální normovaný prostor je prostor s vnitřním součinem definovaným jako obyčejný skalární součin vektorů.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Prostor l_2 má vnitřní součin $(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_n x_n y_n$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Prostor L_2 má vnitřní součin $(f, g) = \int_I f(x)g(x) dx$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Prostor l_2 má za úplnou ortonormální množinu posloupnost $\{e_n\}$, kde e_n je posloupnost nul kromě n -tého členu rovného 1.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Prostor $L_2[-\pi, \pi]$ má za úplnou ortonormální množinu posloupnost

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcional
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Prostor $L_2[-\pi, \pi]$ má za úplnou ortonormální množinu posloupnost

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$$



Úplné ortonormální posloupnosti v $L_2(J)$ na neomezených intervalech J jsou popsány v kapitole o Fourierových řadách (Legendreovy, Hermiteovy a Laguerreovy polynomy).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. V komplexním prostoru $L_2[-\pi, \pi]$ tvoří $\{e^{inz}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ úplnou ortogonální posloupnost.

Konec příkladů 5.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OTÁZKY

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Ukažte, že průnik lineárních podprostorů je lineární podprostor (odtud plyne smysluplnost definice lineárních obalů).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte, že lineární obal množiny A v lineárním prostoru X je roven množině lineárních kombinací prvků A .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Dokažte, že zobrazení $e_X : X \rightarrow X^{##}$ je lineární a prosté. Ukažte, že obecně nemusí být na.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ukažte, že je-li $f : X \rightarrow Y$ lineární zobrazení mezi lineárními prostory, je $f(X)$ lineární podprostor Y .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortogonalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Lineární prostor \mathbb{R} má jen dva triviální lineární podprostory.

Konec otázek 1.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Ukažte, že v normovaném prostoru X je sčítání (jako zobrazení $X \times X \rightarrow X$) dokonce stejnoměrně spojitě, ale násobení číslem (jako zobrazení $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$) není stejnoměrně spojitě, pokud $X \neq \{0\}$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte, že v normovaném prostoru X je norma, jako zobrazení $X \rightarrow \mathbb{R}$, stejnoměrně spojitá. [Platí nerovnost $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$.]



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omezení

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ukažte, že v normovaném prostoru X je posunutí $t_a(x) = x + a$ (pro dané a) isometrie, a násobení $n_r(x) = rx$ (pro dané $r \neq 0$) je homeomorfismus X na X (tj., je spojitý a jeho inverze je taky spojitá).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita

- Besselova

- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ukažte, že z Hahnovy-Banachovy věty plyne existence tzv. obecných limit: *Existuje lineární funkcionál L definovaný na všech omezených posloupnostech reálných čísel, mající vlastnost $\liminf x_n \leq L(\{x_n\}) \leq \limsup x_n$. [$X = l_\infty, Y = \mathbb{C}, f$ na \mathbb{C} přiřazuje posloupnosti její limitu.]*



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Ukažte, že v normovaném prostoru jsou okolí *lineárně omezená*. Podmnožina A metrického lineárního prostoru se nazývá *lineárně omezená*, jestliže pro každé okolí U bodu 0 existuje $r > 0$ takové, že $rA \subset U$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Necht' f je spojitá reálná funkce na normovaném prostoru X , která je homomorfismem vzhledem ke grupové struktuře X (tj. je aditivní: $f(x + y) = f(x) + f(y)$). Pak f je lineární.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Dokažte, že každé lineární zobrazení na euklidovském prostoru je spojitě.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Dokažte, že každé lineární zobrazení na euklidovském prostoru je spojitě.



Každé spojitě lineární zobrazení mezi metrickými lineárními prostory je stejnoměrně spojitě.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Dokažte, že každé lineární zobrazení na euklidovském prostoru je spojitě.



Každé spojitě lineární zobrazení mezi metrickými lineárními prostory je stejnoměrně spojitě.



Každé spojitě lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory je lipschitzovské.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

8. Na každém nekonečně dimenzionálním normovaném prostoru existuje lineární funkcionál, který není spojitý. [Vezměte spočetnou lineárně nezávislou množinu b_n s normami $\|b_n\| = 1$ a definujte $f(b_n) = n$ a rozšířte na zbytek báze.]



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

9. Dokažte, že normovaný konečně dimensionální prostor je isomorfní (algebraicky i topologicky) euklidovskému prostoru.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

10. Každý konečně dimensionální normovaný prostor je úplný. Proto je každý konečně dimensionální podprostor normovaného prostoru uzavřený.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

11*. Normovaný prostor je konečně dimensionální právě když je každá jeho omezená uzavřená množina kompaktní (nebo každá omezená množina je totálně omezená).

Konec otázek 2.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

1. Najděte příklad lineárního zobrazení mezi dvěma normovanými prostory, které má uzavřený graf a není spojitě. [Uvědomte si, že pokud je zobrazení mezi metrickými prostory prosté a na, má toto zobrazení i jeho inverze stejný graf.]



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

1. Najděte příklad lineárního zobrazení mezi dvěma normovanými prostory, které má uzavřený graf a není spojité. [Uvědomte si, že pokud je zobrazení mezi metrickými prostory prosté a na, má toto zobrazení i jeho inverze stejný graf.]



Nespojité identické zobrazení prostoru s hrubší normou na tentýž prostor s jemnější normou má tedy uzavřený graf (protože inverze je spojitá) – takové normy jsou např. norma v l_1 a zúžení normy v l_∞ na l_1 .



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Návod v předchozí otázce dává i radu, jak sestavit spojitě lineární zobrazení mezi normovanými prostory, které není otevřené. Ověřte.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ověřte podrobnosti následujícího postupu. Vezměte Banachův prostor X všech spojitých funkcí na $[-\pi, \pi]$ a posloupnost spojitých lineárních funkcí F_n na X definovaných rovností $F_n(f) = a_0/2 + a_+ + \dots + a_n$, kde a_i jsou Fourierovy koeficienty funkce f u kosinů.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ověřte podrobnosti následujícího postupu. Vezměte Banachův prostor X všech spojitých funkcí na $[-\pi, \pi]$ a posloupnost spojitých lineárních funkcí F_n na X definovaných rovností $F_n(f) = a_0/2 + a_+ + \dots + a_n$, kde a_i jsou Fourierovy koeficienty funkce f u kosinů.



Kdyby $\lim_n F_n(f)$ konvergovala pro každé $f \in X$, byla by podle věty o stejnoměrné omezenosti posloupnost $\|F_n\|$ omezená, což neplatí (ukážte to). Existuje tedy spojitá funkce, jejíž Fourierova řada nekonverguje v bodě 0.



LEKCE39-BAN
lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do $X^{##}$
normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení
Hahn-Banach
Banachův prostor
Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost
Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerovnost
Hilbertův prostor
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Uvědomte si, že ve větě o stejnoměrné omezenosti lze místo spočetné množiny $\{f_n\}$ brát libovolnou podmnožinu A spojitých lineárních zobrazení $X \rightarrow Y$. [Není-li A omezená, není omezená už nějaká spočetná podmnožina A .]

Konec otázek 3.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

1. Pomocí vložení e_X lze dokázat větu o stejnoměrné omezenosti pro prvky normovaného prostoru X : Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost v X , pro kterou je množina $\{f(x_n)\}_n$ omezená pro každé $f \in X'$. Pak je i posloupnost norem $\{\|x_n\|\}$ omezená.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

1. Pomocí vložení e_X lze dokázat větu o stejnoměrné omezenosti pro prvky normovaného prostoru X : *Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost v X , pro kterou je množina $\{f(x_n)\}_n$ omezená pro každé $f \in X'$. Pak je i posloupnost norem $\{\|x_n\|\}$ omezená.*



Předpoklad pro $\{x_n\}$ se nazývá *slabá omezenost* a omezenost v normě *silná omezenost*. Tvrzení tedy říká že slabě omezené množiny jsou silně omezené (i pro nespočetné množiny).



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův protor

ortonormalita
Bessellova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Necht' X je normovaný prostor. Symbolem I se značí identické zobrazení $X \rightarrow X$. Ukažte, že je-li $F : X \rightarrow X$ lineární zobrazení s normou menší než 1, má zobrazení $I + F$ spojitě inverzní zobrazení.

Konec otázek 4.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 5 :

1. Dokažte „Pythagorovu větu“ v prostoru s vnitřním součinem: *Jsou-li dva prvky x, y na sebe kolmé, pak $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.*



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte, že vnitřní součin, jako funkce na součinu normovaných prostorů, je spojitá.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Je-li A ortogonální množina v X neobsahující 0 , je $\{a/\|a\|; a \in A\}$ ortonormální množina v X .

Konec otázek 5.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CVIČENÍ

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Dokažte, že množina

$$l_2 = \left\{ (a_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

je podprostor lineárního prostoru všech reálných posloupností.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Dokažte, že množina

$$l_2 = \left\{ (a_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

je podprostor lineárního prostoru všech reálných posloupností.



Řešení. Musíme ověřit, že l_2 je uzavřená na sčítání a násobení reálnými čísly.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Dokažte, že množina

$$l_2 = \left\{ (a_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

je podprostor lineárního prostoru všech reálných posloupností.



Řešení. Musíme ověřit, že l_2 je uzavřená na sčítání a násobení reálnými čísly.



Tedy, že platí

$$(a_n), (b_n) \in l_2 \quad \Rightarrow \quad (a_n + b_n) \in l_2.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Dokažte, že množina

$$l_2 = \left\{ (a_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

je podprostor lineárního prostoru všech reálných posloupností.



Řešení. Musíme ověřit, že l_2 je uzavřená na sčítání a násobení reálnými čísly.



Tedy, že platí

$$(a_n), (b_n) \in l_2 \quad \Rightarrow \quad (a_n + b_n) \in l_2.$$



Budeme proto odhadovat výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Dokažte, že množina

$$l_2 = \left\{ (a_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

je podprostor lineárního prostoru všech reálných posloupností.



Řešení. Musíme ověřit, že l_2 je uzavřená na sčítání a násobení reálnými čísly.



Tedy, že platí

$$(a_n), (b_n) \in l_2 \quad \Rightarrow \quad (a_n + b_n) \in l_2.$$



Budeme proto odhadovat výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2.$$



Jelikož suma prvního i třetího výrazu je podle předpokladu konečná, stačí se vypořádat se sumou

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

ale ta je, jak vidíme, také konečná ze stejných důvodů.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

ale ta je, jak vidíme, také konečná ze stejných důvodů.



Zbývá jen ukázat, že

$$(a_n) \in l_2, \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (\lambda a_n) \in l_2.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

ale ta je, jak vidíme, také konečná ze stejných důvodů.



Zbývá jen ukázat, že

$$(a_n) \in l_2, \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (\lambda a_n) \in l_2.$$



To je ale snadné

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)^2 = \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

LEKCE39-BAN

- lineární prostor
 - lineární zobrazení
 - lineární funkcionál
 - algebraický duál
 - zobrazení e_X do $X^{\#\#}$
- normovaný prostor
 - Minkovského norma
 - norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
 - Otevřené zobrazení
 - Uzavřený graf
 - Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
 - druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
 - Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
 - ortonormalita
 - Bessellova nerovnost
 - Fourierova řada
 - Parsevalova rovnost
 - úplná množina
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 1.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Ukažte, že zobrazení

$$\| \cdot \| : (a_n) \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

na prostoru c_0 je norma. Lze definovat vnitřní součin, který tuto normu indukuje?



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Ukažte, že zobrazení

$$\| \cdot \| : (a_n) \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

na prostoru c_0 je norma. Lze definovat vnitřní součin, který tuto normu indukuje?



Řešení. Bud' te $(a_n), (b_n) \in c_0$, and $\lambda \in \mathbb{R}$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Ukažte, že zobrazení

$$\| \cdot \| : (a_n) \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

na prostoru c_0 je norma. Lze definovat vnitřní součin, který tuto normu indukuje?



Řešení. Bud' te $(a_n), (b_n) \in c_0$, and $\lambda \in \mathbb{R}$.



Pokud je $\|(a_n)\| = 0$, pak nutně $|a_n| = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy (a_n) je posloupnost samých nul.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Ukažte, že zobrazení

$$\| \cdot \| : (a_n) \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

na prostoru c_0 je norma. Lze definovat vnitřní součin, který tuto normu indukuje?



Řešení. Bud' te $(a_n), (b_n) \in c_0$, and $\lambda \in \mathbb{R}$.



Pokud je $\|(a_n)\| = 0$, pak nutně $|a_n| = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy (a_n) je posloupnost samých nul.



Dále z vlastností absolutní hodnoty plyne, že

$$\|\lambda(a_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda a_n| = |\lambda| \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = |\lambda| \|(a_n)\|$$

a

$$\|(a_n) + (b_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n + b_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (|a_n| + |b_n|) = \|(a_n)\| + \|(b_n)\|,$$

čímž jsme ověřili, že se jedná o normu.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Ukažte, že zobrazení

$$\| \cdot \| : (a_n) \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

na prostoru c_0 je norma. Lze definovat vnitřní součin, který tuto normu indukuje?



Řešení. Bud' te $(a_n), (b_n) \in c_0$, and $\lambda \in \mathbb{R}$.



Pokud je $\|(a_n)\| = 0$, pak nutně $|a_n| = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy (a_n) je posloupnost samých nul.



Dále z vlastností absolutní hodnoty plyne, že

$$\|\lambda(a_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda a_n| = |\lambda| \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = |\lambda| \|(a_n)\|$$

a

$$\|(a_n) + (b_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n + b_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (|a_n| + |b_n|) = \|(a_n)\| + \|(b_n)\|,$$

čímž jsme ověřili, že se jedná o normu.



Abychom se přesvědčili, že tato norma není indukována vnitřním součinem, stačí najít dvě posloupnosti z c_0 , pro které neplatí rovnoběžníková rovnost.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jsou to třeba posloupnosti
 $(1, 0, \dots)$ a $(0, 1, 0, \dots)$.

LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor
druhý duál

reflexivní prostor
vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jsou to třeba posloupnosti
 $(1, 0, \dots)$ a $(0, 1, 0, \dots)$.



To bylo snadné.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
 nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
 nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 2.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Dokažte, že lineární prostor $C[0, 1]$ se suprémovou normou

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad f \in C[0, 1]$$

je Banachův.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Dokažte, že lineární prostor $C[0, 1]$ se suprémovou normou

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad f \in C[0, 1]$$

je Banachův.



Řešení. Máme ověřit úplnost, proto si vezmeme nějakou cauchyovskou posloupnost $(f_n) \subset C[0, 1]$ a k té budeme hledat nějaký prvek $f \in C[0, 1]$, ke kterému tato posloupnost konverguje.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Dokažte, že lineární prostor $C[0, 1]$ se suprémovou normou

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad f \in C[0, 1]$$

je Banachův.



Řešení. Máme ověřit úplnost, proto si vezmeme nějakou cauchyovskou posloupnost $(f_n) \subset C[0, 1]$ a k té budeme hledat nějaký prvek $f \in C[0, 1]$, ke kterému tato posloupnost konverguje.



Konvergencí myslíme konvergenci v normě, což v tomto případě odpovídá stejnoměrné konvergenci na intervalu $[0, 1]$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Dokažte, že lineární prostor $C[0, 1]$ se supremovou normou

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad f \in C[0, 1]$$

je Banachův.



Řešení. Máme ověřit úplnost, proto si vezmeme nějakou cauchyovskou posloupnost $(f_n) \subset C[0, 1]$ a k té budeme hledat nějaký prvek $f \in C[0, 1]$, ke kterému tato posloupnost konverguje.



Konvergencí myslíme konvergenci v normě, což v tomto případě odpovídá stejnoměrné konvergenci na intervalu $[0, 1]$.



Z Cauchyovskosti dostaneme, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n, m > n_0$ je

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Dokažte, že lineární prostor $C[0, 1]$ se supřémovou normou

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad f \in C[0, 1]$$

je Banachův.



Řešení. Máme ověřit úplnost, proto si vezmeme nějakou cauchyovskou posloupnost $(f_n) \subset C[0, 1]$ a k té budeme hledat nějaký prvek $f \in C[0, 1]$, ke kterému tato posloupnost konverguje.



Konvergencí myslíme konvergenci v normě, což v tomto případě odpovídá stejno-
měrné konvergenci na intervalu $[0, 1]$.



Z Cauchyovskosti dostaneme, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n, m > n_0$ je

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$



Pro libovolné $x \in [0, 1]$ to ovšem znamená, že číselná posloupnost $(f_n(x))$ je Cauchyovská. Z úplnosti \mathbb{R} plyne existence reálného čísla, k němuž zmíněná posloupnost konverguje, toto číslo označme $f(x)$.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nabízí se, že funkce $x \mapsto f(x)$ by mohla být oním hledaným prvkem $C[0, 1]$, k němuž (v normě) konverguje posloupnost (f_n) . K tomu nejprve musíme ověřit, že f je spojitá, tedy že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita

- Besselova

- nerovnost

- Fourierova řada

- Parsevalova rovnost

- úplná množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nabízí se, že funkce $x \mapsto f(x)$ by mohla být oním hledaným prvkem $C[0, 1]$, k němuž (v normě) konverguje posloupnost (f_n) . K tomu nejprve musíme ověřit, že f je spojitá, tedy že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



Zvolme $\varepsilon > 0$ a odhadujme

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
 - lineární zobrazení
 - lineární funkcionál
 - algebraický duál
 - zobrazení e_X do $X^{\#\#}$
- normovaný prostor
 - Minkovského norma
 - norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
 - Otevřené zobrazení
 - Uzavřený graf
 - Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
 - druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
 - Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
 - ortonormalita
 - Besselova nerovnost
 - Fourierova řada
 - Parsevalova rovnost
 - úplná množina
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nabízí se, že funkce $x \mapsto f(x)$ by mohla být oním hledaným prvkem $C[0, 1]$, k němuž (v normě) konverguje posloupnost (f_n) . K tomu nejprve musíme ověřit, že f je spojitá, tedy že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



Zvolme $\varepsilon > 0$ a odhadujme

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$



Z bodové konvergence najdeme $n \in \mathbb{N}$ tak, že bude první a třetí výraz na pravé straně menší než $\varepsilon/3$. Ze spojitosti funkce f_n pak najdeme $\delta > 0$ tak, že také prostřední výraz na pravé straně bude menší než $\varepsilon/3$. Tedy $f \in C[0, 1]$.



LEKCE39-BAN

- lineární prostor
 - lineární zobrazení
 - lineární funkcionál
 - algebraický duál
 - zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
 - Minkovského norma
 - norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
 - Otevřené zobrazení
 - Uzavřený graf
 - Stejněměrná omezenost
- Duální prostor
 - druhý duál
- reflexivní prostor
 - vnitřní součin
 - Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
 - ortonormalita
 - Bessellova nerovnost
 - Fourierova řada
 - Parsevalova rovnost
 - úplná množina
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nabízí se, že funkce $x \mapsto f(x)$ by mohla být oním hledaným prvkem $C[0, 1]$, k němuž (v normě) konverguje posloupnost (f_n) . K tomu nejprve musíme ověřit, že f je spojitá, tedy že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



Zvolme $\varepsilon > 0$ a odhadujme

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$



Z bodové konvergence najdeme $n \in \mathbb{N}$ tak, že bude první a třetí výraz na pravé straně menší než $\varepsilon/3$. Ze spojitosti funkce f_n pak najdeme $\delta > 0$ tak, že také prostřední výraz na pravé straně bude menší než $\varepsilon/3$. Tedy $f \in C[0, 1]$.



Zbývá ukázat, že $f_n \rightarrow f$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nabízí se, že funkce $x \mapsto f(x)$ by mohla být oním hledaným prvkem $C[0, 1]$, k němuž (v normě) konverguje posloupnost (f_n) . K tomu nejprve musíme ověřit, že f je spojitá, tedy že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



Zvolme $\varepsilon > 0$ a odhadujme

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$



Z bodové konvergence najdeme $n \in \mathbb{N}$ tak, že bude první a třetí výraz na pravé straně menší než $\varepsilon/3$. Ze spojitosti funkce f_n pak najdeme $\delta > 0$ tak, že také prostřední výraz na pravé straně bude menší než $\varepsilon/3$. Tedy $f \in C[0, 1]$.



Zbývá ukázat, že $f_n \rightarrow f$.



Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ a všechna $x \in [0, 1]$ je

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nabízí se, že funkce $x \mapsto f(x)$ by mohla být oním hledaným prvkem $C[0, 1]$, k němuž (v normě) konverguje posloupnost (f_n) . K tomu nejprve musíme ověřit, že f je spojitá, tedy že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



Zvolme $\varepsilon > 0$ a odhadujme

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$



Z bodové konvergence najdeme $n \in \mathbb{N}$ tak, že bude první a třetí výraz na pravé straně menší než $\varepsilon/3$. Ze spojitosti funkce f_n pak najdeme $\delta > 0$ tak, že také prostřední výraz na pravé straně bude menší než $\varepsilon/3$. Tedy $f \in C[0, 1]$.



Zbývá ukázat, že $f_n \rightarrow f$.



Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ a všechna $x \in [0, 1]$ je

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A proč?



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor
druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A proč?



Protože posloupnost (f_n) je
cauchyovská!



LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach
Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



A proč?



Protože posloupnost (f_n) je
cauchyovská!



Ale to už znamená, že $f_n \rightarrow$
 f .

LEKCE39-BAN

lineární prostor
lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor
Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach
Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor
druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost

Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Přesně tak. Náš prostor je
tedy Banachův.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 3.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Na prostoru l_1 definujme funkcionál f takto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}.$$

Spočítejte jeho normu.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Na prostoru l_1 definujme funkcionál f takto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}.$$

Spočítejte jeho normu.



Řešení. Jako rozcvičku můžete zkusit ověřit, že f je lineární.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Na prostoru l_1 definujme funkcionál f takto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}.$$

Spočítejte jeho normu.



Řešení. Jako rozcvičku můžete zkusit ověřit, že f je lineární.



Budeme počítat normu f , tj.

$$\|f\| = \sup |f(x)| = \sup \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \right|,$$

kde supremum se bere přes všechny posloupnosti $x = (x_n)$ takové, že

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 1.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Na prostoru l_1 definujme funkcionál f takto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}.$$

Spočítejte jeho normu.



Řešení. Jako rozcvičku můžete zkusit ověřit, že f je lineární.



Budeme počítat normu f , tj.

$$\|f\| = \sup |f(x)| = \sup \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \right|,$$

kde supremum se bere přes všechny posloupnosti $x = (x_n)$ takové, že

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 1.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin
Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Odhadujme proto výraz:

$$\|f\| = \sup \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \right| \leq \sup \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n}{n} \right| \leq \sup \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 1.$$

Víme tedy, že

$$\|f\| \leq 1.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Odhadujme proto výraz:

$$\|f\| = \sup \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \right| \leq \sup \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n}{n} \right| \leq \sup \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 1.$$

Víme tedy, že

$$\|f\| \leq 1.$$

↓
Dosazení posloupnosti $e_1 = (1, 0, \dots)$ zjistíme, že

$$f(e_1) = 1.$$

Proto je dokonce $\|f\| = 1$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Odhadujme proto výraz:

$$\|f\| = \sup \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \right| \leq \sup \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n}{n} \right| \leq \sup \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 1.$$

Víme tedy, že

$$\|f\| \leq 1.$$

↓
Dosazení posloupnosti $e_1 = (1, 0, \dots)$ zjistíme, že

$$f(e_1) = 1.$$

Proto je dokonce $\|f\| = 1$.



Dokázali jsme, že f je spojitý, a tedy že patří do duálu.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 4.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Spočítejte normu funkcionálu $\varphi : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definovaného předpisem

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Spočítejte normu funkcionálu $\varphi : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definovaného předpisem

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx.$$



Řešení. Opět si můžete nejprve dokázat, že φ je lineární zobrazení.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Spočítejte normu funkcionálu $\varphi : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definovaného předpisem

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx.$$



Řešení. Opět si můžete nejprve dokázat, že φ je lineární zobrazení.



Budeme počítat normu φ , tj.

$$\|\varphi\| = \sup |\varphi(f)| = \sup \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx \right|,$$

kde supremum se bere přes všechny funkce f takové, že

$$\|f\| = \sup_{[-1,1]} |f(x)| = 1.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův protor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Spočítejte normu funkcionálu $\varphi : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definovaného předpisem

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx.$$



Řešení. Opět si můžete nejprve dokázat, že φ je lineární zobrazení.



Budeme počítat normu φ , tj.

$$\|\varphi\| = \sup |\varphi(f)| = \sup \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx \right|,$$

kde supremum se bere přes všechny funkce f takové, že

$$\|f\| = \sup_{[-1,1]} |f(x)| = 1.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do

$X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Odhadujme proto výraz:

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &= \sup \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx \right| \\ &\leq \sup \int_0^1 |f(x)| dx + \int_{-1}^0 |f(x)| dx. \leq 2.\end{aligned}$$

Vidíme, že

$$\|\varphi\| \leq 2.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Odhadujeme proto výraz:

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &= \sup \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx \right| \\ &\leq \sup \int_0^1 |f(x)| dx + \sup \int_{-1}^0 |f(x)| dx. \leq 2.\end{aligned}$$

Vidíme, že

$$\|\varphi\| \leq 2.$$



Nyní by stačilo, podobně jako v předchozím příkladě, najít nějakou funkci $g \in C[-1, 1]$ s normou 1, pro kterou bude $|\varphi(g)| = 2$.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Odhadujeme proto výraz:

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &= \sup \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx \right| \\ &\leq \sup \int_0^1 |f(x)| dx + \int_{-1}^0 |f(x)| dx. \leq 2.\end{aligned}$$

Vidíme, že

$$\|\varphi\| \leq 2.$$



Nyní by stačilo, podobně jako v předchozím příkladě, najít nějakou funkci $g \in C[-1, 1]$ s normou 1, pro kterou bude $|\varphi(g)| = 2$.



To se vám ale nepodaří.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Odhadujeme proto výraz:

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &= \sup \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx \right| \\ &\leq \sup \int_0^1 |f(x)| dx + \sup \int_{-1}^0 |f(x)| dx. \leq 2.\end{aligned}$$

Vidíme, že

$$\|\varphi\| \leq 2.$$



Nyní by stačilo, podobně jako v předchozím příkladě, najít nějakou funkci $g \in C[-1, 1]$ s normou 1, pro kterou bude $|\varphi(g)| = 2$.



To se vám ale nepodaří.



Spokojíme se s tím, že najdeme posloupnost funkcí (f_n) , které mají normu 1 a platí

$$|\varphi(f_n)| \rightarrow 2.$$

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Bessellova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Z předpisu funkcionálu φ je vidět, že posloupnost f_n lze definovat takto

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, -1/n], \\ nx, & x \in [-1/n, 1/n], \\ 1, & x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Z předpisu funkcionálu φ je vidět, že posloupnost f_n lze definovat takto

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, -1/n], \\ nx, & x \in [-1/n, 1/n], \\ 1, & x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$



Zřejmě $\|f_n\| = 1$ a $|\varphi(f_n)| \rightarrow 2$. Je tedy

$$\|\varphi\| = 2.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{\#\#}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Z předpisu funkcionálu φ je vidět, že posloupnost f_n lze definovat takto

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, -1/n], \\ nx, & x \in [-1/n, 1/n], \\ 1, & x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$



Zřejmě $\|f_n\| = 1$ a $|\varphi(f_n)| \rightarrow 2$. Je tedy

$$\|\varphi\| = 2.$$



Takže normu jsme spočítali tak jako tak.

LEKCE39-BAN

- lineární prostor
- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$
- normovaný prostor
- Minkovského norma
- norma zobrazení
- Hahn-Banach
- Banachův prostor
- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost
- Duální prostor
- druhý duál
- reflexivní prostor
- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost
- Hilbertův prostor
- ortonormalita
- Besselova nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 5.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejněměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Příklad. Najděte všechny prvky z l_2 , které jsou kolmé na množinu

$$M = \{(a_n) \in l_2 : a_1 + a_2 + a_3 = 0\}.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcional
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Příklad. Najděte všechny prvky z l_2 , které jsou kolmé na množinu

$$M = \{(a_n) \in l_2 : a_1 + a_2 + a_3 = 0\}.$$



Řešení. Hledáme posloupnosti $(b_n) \in l_2$, které mají s každou posloupností $(a_n) \in M$ nulový vnitřní součin. Tedy

$$(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0.$$



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Příklad. Najděte všechny prvky z l_2 , které jsou kolmé na množinu

$$M = \{(a_n) \in l_2 : a_1 + a_2 + a_3 = 0\}.$$



Řešení. Hledáme posloupnosti $(b_n) \in l_2$, které mají s každou posloupností $(a_n) \in M$ nulový vnitřní součin. Tedy

$$(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0.$$



Uvažujme tyto prvky z M :

$$\begin{aligned} &(1, -1, 0, \dots), \\ &(0, 1, -1, 0, \dots), \\ &(0, 0, 0, 1, 0, \dots), \\ &(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots), \end{aligned}$$

atd.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Příklad. Najděte všechny prvky z l_2 , které jsou kolmé na množinu

$$M = \{(a_n) \in l_2 : a_1 + a_2 + a_3 = 0\}.$$



Řešení. Hledáme posloupnosti $(b_n) \in l_2$, které mají s každou posloupností $(a_n) \in M$ nulový vnitřní součin. Tedy

$$(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0.$$



Uvažujme tyto prvky z M :

$$\begin{aligned} &(1, -1, 0, \dots), \\ &(0, 1, -1, 0, \dots), \\ &(0, 0, 0, 1, 0, \dots), \\ &(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots), \end{aligned}$$

atd.



Má-li být (b_n) kolmé na tyto prvky z M , musí platit

$$b_1 = b_2, \quad b_2 = b_3, \quad b_4 = b_5 = \dots = 0.$$

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení

lineární funkcionál

algebraický duál

zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského

norma

norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení

Uzavřený graf

Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortonormalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Naopak, každá posloupnost (b_n) splňující tyto podmínky má zřejmě vnitřní součin se všemy prvky M nulový. Hledané posloupnosti jsou proto přesně tyto:

$$(c, c, c, \dots),$$

kde c probíhá množinu reálných čísel.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejněměrná omeze-
nost

Duální prostor

druhý duál

reflexivní prostor

vnitřní součin

Schwartzova nerov-
nost

Hilbertův prostor

ortogonalita

ortonormalita

Besselova

nerovnost

Fourierova řada

Parsevalova rovnost

úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Naopak, každá posloupnost (b_n) splňující tyto podmínky má zřejmě vnitřní součin se všemy prvky M nulový. Hledané posloupnosti jsou proto přesně tyto:

$$(c, c, c, \dots),$$

kde c probíhá množinu reálných čísel.



Můžete si zkusit dokázat, že M je uzavřený podprostor.



LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Naopak, každá posloupnost (b_n) splňující tyto podmínky má zřejmě vnitřní součin se všemy prvky M nulový. Hledané posloupnosti jsou proto přesně tyto:

$$(c, c, c, \dots),$$

kde c probíhá množinu reálných čísel.



Můžete si zkusit dokázat, že M je uzavřený podprostor.



To by neměl být žádný problém.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

lineární zobrazení
lineární funkcionál
algebraický duál
zobrazení e_X do
 $X^{##}$

normovaný prostor

Minkovského
norma
norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

Otevřené zobrazení
Uzavřený graf
Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

druhý duál
reflexivní prostor
vnitřní součin

Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

ortonormalita
ortonormalita
Besselova
nerovnost
Fourierova řada
Parsevalova rovnost
úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 6.

LEKCE39-BAN

lineární prostor

- lineární zobrazení
- lineární funkcionál
- algebraický duál
- zobrazení e_X do $X^{##}$

normovaný prostor

- Minkovského
- norma
- norma zobrazení

Hahn-Banach

Banachův prostor

- Otevřené zobrazení
- Uzavřený graf
- Stejnoměrná omezenost

Duální prostor

- druhý duál

reflexivní prostor

- vnitřní součin
- Schwartzova nerovnost

Hilbertův prostor

- ortonormalita
- ortonormalita
- Besselova
- nerovnost
- Fourierova řada
- Parsevalova rovnost
- úplná množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9