BANACHOVY PROSTORY

V podstatě se budeme zabývat prostory funkcí. Například to bude prostor (množina) spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$.

Ukáže se, že řada vlastností platí pro řadu podobných prostorů.

To se poznalo tak, že se důkazy jistých tvrzení v různých situacích podobaly navzájem jako vejce vejci.

Aha, bude následovat nudná kapitola o triviálních vlastnostech skoro všech prostorů.

Není tomu tak. Prostory, které budeme zkoumat jsou v podstatě nekonečně-rozměrným zobecněním $\mathbb{R}$.

Budeme zkoumat nekonečne-rozměrné koule a dokonce dostaneme obdobu Pythagorovy věty.

Ještě bych podotkl, že v takových prostorech nefunguje selský rozum.

Budeme zkoumat prostory s určitou zásobou obecných vlastností. Nebude však existovat nějaký typický, který bychom si při důkazech kreslili.

Nicméně řada tvrzení zde dokazovaných platí i v $\mathbb{R}^n$. Tedy nutná podmínka pro to, aby tvrzení platilo, je nekolidování se známými vlastnosmi v $\mathbb{R}^n$.

Zapomněla jsem dodat, že takové prostory jsou velmi užitečné. Zpravidla jsou to prostory řešení jistých diferenciálních rovnic.

Proto nás bude zajímat spojitost, konvergence, úplnost.

Takže to budou nejčastěji prostory funkcí. U některých navíc dostaneme kolmost.

ZÁKLADY

Již víme dost na první představu. Tak jdeme na to.

Z algebry znáte tzv. diskrétní struktury, jako grupy, lineární prostoty, apod.

V analýze se probíraly tzv. spojité struktury, kde byla definována konvergence nebo okolí bodů a mohla se definovat spojitost zobrazení (reálná přímka, komplexní rovina, obecněji euklidovské prostory, nebo ještě obecněji metrické prostory).

Souvislost těchto dvou přístupů byla vidět už v první kapitole o reálných číslech, kde se dokázalo, že sčítání, násobení a dělení reálných čísel jsou spojitá zobrazení. To mělo pozdější důsledky, např. možnost záměny pořadí limity a součtu (resp. součinu nebo podílu) posloupností nebo funkcí, záměny pořadí derivace a součtu, nebo integrálu a součtu.

U posledních dvou příkladů není uveden součin a podíl, lze uvést jen záměnu pořadí derivace a integrace s násobením konstantou. Jiné algebraické operace nejsou v analýze obecně vhodné.

Algebraické struktury, které mají za operace součet svých prvků a násobení prvku číslem, jsou lineární prostory.

Pokud je na těchto prostorech ještě definována např. metrika, dá se očekávat, že se dostane vhodná struktura pro analýzu. Metrika a lineární struktura ale musí být vhodně skloubeny.

Metrika a linearita. Takže se nejen bude konvergovat, ale i sčítat. Nic jiného.

Vzhledem k různé terminologii a definicím bude vhodné zopakovat z algebry některé pojmy.

Základním pojmem bude lineární prostor nad reálnými čísly. Většina dále uváděných tvrzení platí i pro lineární prostory nad komplexními čísly.

DEFINICE. Lineární prostor je neprázdná množina X, na které je definováno sčítání $x + y$ prvků X a násobení rx prvků $x \in X$ reálnými čísly r. Tyto operace splňují následující podmínky:

1. Operace sčítání je komutativní a asociativní, existuje nulový prvek $0 \in X$ a inverzní prvky $-x$ (tj. $x + 0 = x$ a $x + (-x) = 0$ pro každé $x \in X$); ¨
2. Operace násobení reálnými čísly je distributivní v obou proměnných vzhledem ke sčítání a v první proměnné vzhledemexistence k násobení, platí $1x = x$ pro každé $x \in X$.

Je-li X lineární prostor, pak $Y \subset X$ se nazývá *lineární podprostor* X, jestliže s operacemi zúženými z X na Y tvoří Y lineární prostor (tj. součet prvků z Y a násobek prvku z Y reálným číslem opět náležejí do Y).

Nejmenší lineární podprostor v X množiny $A \subset X$ se nazývá *lineární obal* A.

Podmnožina A lineárního prostoru X se nazývá *symetrická*, jestliže $x \in A$ implikuje $-x \in A$.

Nazývá se *pohlcující*, jestliže pro každé $x \in X$ existuje $s > 0$ tak, že $rx \in A$ pro každé $r \in [0, s)$.

Množina A je *konvexní*, jestliže s dvěma svými body x, y obsahuje i úsečku mezi x, y, tj. množinu $\{rx + (+ - r)y; r \in [0, 1]\}$.

Jak jsem řekla, všechno si jde kreslit v konečně-rozměrném případě. Ale myslet se musí nekonečně-rozměrně (pro jistotu).

Chce se tím říct, že to není obecně jednoduché.

Zobrazení vhodná pro lineární prostory musí zachovávat obě operace (linearita):

DEFINICE. Zobrazení $f : X \to Y$ mezi lineárními prostory se nazývá lineární zobrazení, jestliže splňuje následující dvě podmínky:

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ pro všechna $x_1, x_2 \in X$;
2. $f(rx) = rf(x)$ pro všechna $r \in \mathbb{R}, x \in X$.

Lineární zobrazení $X \to \mathbb{R}$ se nazývá lineární funkcionál.

Dva lineární prostory se nazývají *isomorfní*, pokud mezi existuje prosté lineární zobrazení jednoho z nich na druhý (toto zobrazení se pak nazývá *isomorfismus*.

To je klíčová záležitost. Které prostory jsou stejné? To se teprve uvidí.

Konečně-rozměrné prostory jsou si podobné jako vejce vejci, vejš to neplatí.

Některé další důležité operace s lineárními prostory:

Je-li X neprázdná množina, je množina $\mathbb{R}^X$ všech zobrazení $X \to \mathbb{R}$ lineární prostor při bodově definovaných operacích, tj. $(f+g)(a) = f(a) + g(a), (rf)(a) = rf(a)$.

Je-li X lineární prostor, pak podmnožina $X^\# \subset \mathbb{R}^X$ všech lineárních funkcionálů na X je lineární podprostor $\mathbb{R}^X$, který se nazývá it algebraický duál (nebo algebraicky duální prostor k) prostoru X.

Zobrazení e_X z X do druhého duálu $(X^\#)^\#$ definované jako $e_X(x)(f) = f(x)$, pro $x \in X, f \in X^\#$ je prosté lineární zobrazení.

Teď se nad (snad) naším prostorem někdo povyšuje. Je to jeho duál. A to není poslední potíž.

V duálu sedí například integrály, míry a podobná havěť.

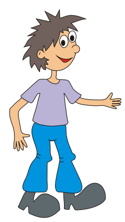
Kdo pro daný prostor zná jeho duál, má zbraň, se kterou se neztratí.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

NORMOVANÉ PROSTORY

Jak bylo naznačeno v úvodu, „spojité" lineární prostory jsou lineární prostory spolu s nějakou spojitou strukturou (např. metrikou) takovou, že obě algebraické operace jsou spojité, V metrických prostorech existuje i jiný přístup, který je speciálnější a přináší vhodnější teorii.

Jak lze tedy vhodněji spojit lineární a metrickou strukturu?



Nedýchám. Už raději ani to.

Na přímce a v rovině (i v libovolném euklidovském prostoru) je obvyklá metrika invariantní vůči posunutí, tj. $d(x + a, y + a) = d(x, y)$. Žádná další významná souvislost mezi sčítáním a metrikou není.

Vezme-li se $a = -y$, dostane se $d(x - y, 0) = d(x, y)$.

Naopak, jsou-li dány vzdálenosti od 0, lze je rozšířit stejnou rovností na vzdálenosti mezi libovolnými prvky, a tyto vzdálenosti jsou invariantní vůči posunutí.

Stačí tedy definovat vzdálenosti k 0 s vlastnostmi, které po výše uvedeném rozšíření na vzdálenosti mezi libovolnými body dávají metriku:

Už zase dýchám, O nic nejde. Díky linearitě stačí umístit pásmo do počátku napevno a měřit vzdálenosti odtamtaď.

DEFINICE. Lineární prostor X se nazývá normovaný prostor, jestliže je na X dána reálná funkce p s vlastnostmi (pro libovolná $r \in \mathbb{R}, x, y \in X$)

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
2. $p(rx) = |r|p(x)$;
3. $p(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$;

Norma prvku x se většinou značí $||x||$.

Snadno se ukáže, že $p(0) = 0, p(x) \geq 0$ (ukažte to).

Nyní je nutné uvést souvislost se spojitostí algebraických operací, uvedenou v úvodu.

VĚTA. V normovaném prostoru X jsou operace sčítání $+ : X \times X \to X$ a násobení číslem $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ spojité.

Opak neplatí. V *Příkladech* je uveden metrický lineární prostor se spojitými operacemi, který není normovaný.

Důkaz. Má se dokázat, že pokud $x_n \to x, y_n \to y$ v X a $r_n \to r$ v $\mathbb{R}$, pak $x_n + y_n \to x + y, r_n x_n \to rx$, neboli $||(x_n + y_n) - (x + y)|| \to 0, ||r_n x_n - rx|| \to 0$.

Platí

$$||(x_n + y_n) - (x + y)|| \leq ||x_n - x|| + ||y_n - y|| \to 0,$$
$$||r_n x_n - rx|| \leq ||r_n(x_n - x)|| + ||(r_n - r)x|| \to 0\,.$$

$\diamond$

Zajímavá je souvislost normy s jednotkovou koulí $B_1 = \{x \in X; ||x|| \leq 1\}$. Ta totiž určuje jednoznačně normu.

VĚTA. Nechť B je uzavřená, konvexní, pohlcující a symetrická množina v lineárním prostoru X, která neobsahuje žádnou přímku $\{rx_0; r \in \mathbb{R}\}$ pro $x_0 \neq 0$. Pak existuje jediná norma na X, která má za jednotkovou kouli množinu B.

Uvědomte si, že jednotková koule v normovaném prostoru má uvedené vlastnosti množiny B.

Důkaz. Pro $x \in X$ se definuje $p(x) = \inf\{r \in (0, +\infty); \frac{1}{r}x \in B\}$ a dokáže se, že p je norma. Protože B je pohlcující množina, je každé číslo $p(x)$ konečné.

Protože $0 \in B$, je $p(0) = 0$. Je-li $x \neq 0$, existuje podle poslední vlastnosti množiny B číslo $s > 0$ takové, že $sx \notin B$ a tedy $p(x) > 0$.

Subaditivitu $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, stačí dokazovat pro nenulová x, y. Protože B je uzavřená, je $x/p(x) \in By/p(y) \in B$. Z konvexity B se dostane pro $r = \frac{p(x)}{p(x)+p(y)}$ vztah $rx/p(x) + (1 - r)y/p(y) = (x + y)/(p(x) + p(y)) \in B$, odkud již vyplývá dokazovaná nerovnost.

Rovnost $p(tx) = |t|p(x)$ zřejmě platí pro $t = 0$ (protože $p(0) = 0$) a pro $t = -1$ (protože B je symetrická). Zbývá uvedenou rovnost dokázat pro $t > 0$:

$$p(tx) = \inf\{r > 0; \frac{1}{r}(tx) \in B\} = \inf\{t\frac{r}{t}; r > 0, \frac{1}{r/t}x \in B\} = t \inf\{s > 0; \frac{1}{s}x \in B\}\,.$$

◇

Spojitá lineární zobrazení jsou velice specifická.

Nejdříve však jedno označení.

DEFINICE. Nechť f je lineární zobrazení normovaného prostoru X do normovaného prostoru Y. Pak se definuje

$$||f|| = \inf\{r > 0; ||f(x)|| \leq r||x|| \text{ pro každé } x \in X\} = \sup\{\frac{||f(x)||}{||x||}; x \neq 0\} = \sup\{\frac{||f(x)||}{||x||}; ||x|| = 1\}\,.$$

Je-li číslo $||f||$ konečné, nazývá se norma zobrazení f.

Následující tvrzení je myšleno vážně.

VĚTA. Následující podmínky jsou pro lineární zobrazení $f : X \to Y$ normovaných prostorů X, Y ekvivalentní:

1. f je spojité;
2. f je spojité v jednom bodě;
3. $||f||$ je konečné číslo.

Důkaz. Zřejmě $1 \to 2$, opačná implikace vyplývá z linearity f a z toho, že $x_n \to x$ právě když $x_n - x \to 0$, takže je-li f spojitá v 0, je spojitá v každém jiném bodě.

Platí $||f(x)|| \leq ||f||||x||$ a pokud je $||f||$ konečné číslo, implikuje tato nerovnost spojitost f v 0. Zbývá dokázat opak.

Nechť je f spojité v 0. Protože jednotková koule B_1 v Y je okolím 0, existuje koule K_r v X o středu 0 a poloměru $r > 0$ taková, že $f(K_r) \subset B_1$. Odtud plyne $||f(\frac{r}{||x||}x) \leq 1$ a tedy $||f(x)|| \leq \frac{1}{r}||x||$ a $||f||$ je konečné číslo. ◇

V kapitole o metrických prostorech byla uvedena Tietzova věta o rozšíření spojitých reálných funkcí z uzavřeného podprostoru Y metrického prostoru X na celý prostor X se zachováním suprema a infima funkce.

V případě, že X je normovaný prostor, Y lineární podprostor a f je lineární, je možné požadovat, aby rozšíření bylo také lineární (navíc se zachováním normy)?

VĚTA. (**Hahnova-Banachova věta**) Nechť Y je lineární podprostor normovaného prostoru X a f je spojitý lineární funkcionál na Y. Pak existuje spojitý lineární funkcionál F na X, který je rozšířením f a takový, že $||F|| = ||f||$.

Důkaz. Označí se $\mathcal{P} = \{(g,G); Y \subset G \subset X, g$ je spojitý lineární funkcionál na G, g rozšiřuje $f, ||g|| = ||f||\}$. $\mathcal{P}$ je uspořádáno relací: $(g,G) < (h,H)$ jestliže $G \subset H$, h rozšiřuje g. Je-li $\{(g_i, G_i\}$ monotónní systém v $\mathcal{P}$, náleží $(\bigcup g_i, \bigcup G_i)$ do $\mathcal{P}$, takže podle Zornova lemmatu má $\mathcal{P}$ maximální prvek (F, A).

Zbývá dokázat, že $A = X$. Nechť tomu tak není a existuje $b \in X \setminus A$. Nyní stačí rozšířit F jako spojitý lineární funkcionál na lineární obal množiny $A \cup \{b\}$, tj. na množinu $\{a + rb; a \in A, r \in \mathbb{R}\}$ se zachováním normy. Snadno se ukáže, že $\sup\{F(a) - ||F||||a + b||; a \in A\} \leq \inf\{F(a) + ||F||||a + b||; a \in A\}$ (dokažte to např. sporem), takže existuje s mezi uvedeným supremem a infimem. Položte $g(a + rb) = F(a) - rs$. Funkcionál g je zřejmě spojitý, lineární a rozšiřuje F. Stačí ukázat, že má stejnou normu jako F.

Zřejmě g nemůže mít menší normu než F a proto stačí ukázat, že $||F(a) - rs|| \leq ||F||||a + rb||$ pro $a \in A, r \in \mathbb{R}$, což je zřejmé pro $r = 0$. Je-li $r > 0$, pak

$$||F(a) - rs|| = r||F(\frac{a}{r}) - s|| \leq r(||F||||\frac{a}{r} + b|| = ||F||||a + rb||\,,$$

kde prostřední nerovnost vyplývá z volby dolní meze čísla s: $F(x) - s \leq ||F||||x + b||$ pro libovolné $x \in A$. Pro $r < 0$ je postup obdobný, jen se použije horní hranice pro volbu čísla s. $\diamond$

Je poučné, jak jsme museli být v předchozím důkazu opatrní, abychom použili pouze axiomy normovaného prostoru a nic jiného.

Někdy jsem si tam připadal jako slon v porcelánu. A přitom šlo vlastně o to, jak z přímky procházející počátkem rozšířit jedno umrněný lineární zobrazení. To byla v podstatě trivialita.

Hahnova-Banachova věta má hodně důležitých důsledků, např.

DŮSLEDEK. Nechť L je uzavřený lineární podprostor normovaného prostoru X a $a \in X \setminus Y$. Pak existuje spojitý lineární funkcionál s normou 1 na X, který se anuluje na L a jeho hodnota v a se rovná vzdálenosti a od L.

Speciálně pro $Y = \{0\}$ je $f(a) = ||a||$.

Každý netriviální normovaný prostor tedy má nenulové spojité lineární funkcionály a množina těchto funkcí rozlišuje body prostoru.

Důkaz. V Hahnově-Banachově větě se za Y vezme lineární obal množiny $L \cup \{a\}$ a $f(x + ra) = rd$, kde d je vzdálenost a od L.

Důsledek nyní plyne z Hahnovy-Banachovy věty, pokud $||f|| = 1$.

Tato rovnost plyne z následujících dvou nerovností:

$$||f(x+ra)|| = |r|d = |r| \inf\{||a-y||; y \in L\} \leq ||x+ra|| \quad \text{a tedy } ||f|| \leq 1\,,$$

$$d = f(a-x) \leq ||f|| ||a-x|| \ \text{ takže } d \leq ||f|| \inf_{x \in Y} ||a-x|| = ||f|| d \quad \text{a tedy } ||f|| \geq 1\,,$$

◇

V Hahnově–Banachově větě (v jejím důkazu) se rozšiřovalo tak nějak postupně. Tak je tomu dobré i v aplikacích rozumět.

Říká se, že se ta HB věta má používat každý všední den alespoň jednou. A ve svátek raději dvakrát.

Já jsem byl odkojený s HB větou a mám na to imunitu.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 2

BANACHOVY PROSTORY

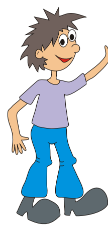
Tak aby bylo jasno. Chyběla nám metrika, nadělili jsme si ji. Máme konvergenci? Jenom někdy ...

A to se musí změnit. Teď hned.

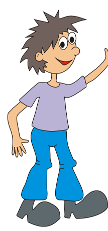
Tak jako tvoří úplné prostory důležitou třídu metrických prostorů, tak tvoří úplné normované prostory snad ještě důležitější třídu normovaných (i obecněji, topologických lineárních) prostorů. Tak důležitou, že tyto prostory dostaly jméno po význačném polském matematikovi S.Banachovi, který je ve 20.-30.letech 20.století nejvíce prozkoumal.

DEFINICE. Úplný normovaný prostor se nazývá Banachův prostor.

Ta úplnost nám opravdu chyběla.



Úplně mi to stačilo i bez té úplnosti.



BTW, budou se hledat cauchyovské posloupnosti, cítím to v kostech.

Metrické neúplné prostory lze zúplnit.

tázkou je, zda lze zúplnit normovaný neúplný prostor na Banachův prostor a zda lze při tomto procesu použít metrické zúplnění nebo je nutné zkonstruovat nové.

Platí první případ.

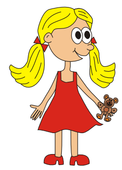
VĚTA. Úplný obal normovaného prostoru (chápaného jako metrický prostor) je Banachův prostor.

Důkaz. Nechť X je neúplný normovaný prostor a Z je úplný obal X chápaného jako metrický prostor. Je nutné dokázat dvě věci. Jednak to, že lineární struktura prostoru X lze rozšířit na Z a jednak to, že metrika prostoru Z je invariantní vůči posunutí.

Každý bod $z \in Z$ je limitou posloupnosti $\{z_n\} \subset X$. Snadno se ukáže, že potom posloupnosti $\{z_n + z'_n\}, \{rz_n\}$ jsou cauchyovské a tedy konvergují v Z – jejich limity se označí $z + z', rz$. Stejně snadno se dokáže, že tyto limity nezávisí na výběru posloupností $\{z_n\}$. Je-li $z \in X$, je možné vzít za $\{z_n\}$ konstantní posloupnost, odkud plyne, že definované operace rozšiřují původní operace na X. To, že tyto nové operace splňují požadované axiomy, bude ukázáno na komutativitě: protože $\{z_n + z'_n\} = \{z'_n + z_n\}$, je $z + z' = z' + z$. Z je tedy lineární prostor obsahující X jako lineární podprostor.

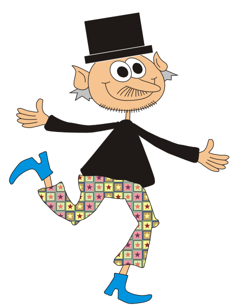
Při zachování značení z předešlého odstavce, pro metriku d na Z platí $d(z, z') = \lim ||z_n - z'_n||$. Pro $a \in X$ tedy platí $d(z, z') = d(z+a, z'+a)$. Je-li $a \in Z$ limitou posloupnosti $\{a_n\} \subset X$, je $d(z, z') = d(z+a_n, z'+a_n)$ pro každé n a ze spojitosti metriky vyplývá rovnost $d(z, z') = d(z + a, z' + a)$. Důkaz je hotov. $\diamond$

Spojením úplnosti a linearity se dostane velmi silný pojem. V Banachových prostorech platí mnoho důležitých tvrzení, která bez úplnosti nebo bez linearity neplatí. Uvedeme tři takové důležité věty.



Je to jako tři oříšky, které dostala Popelka. Jsem zde a čekám.

Taky to mohly být tři zlaté vlasy děda Vševěda.



Na to zapomeň.

Spojité zobrazení obecně nezachovává otevřené nebo uzavřené množiny.

Třída těch zobrazení, která zachovávají otevřené množiny bývá důležitá (třeba proto, že pokud je takové zobrazení prosté, má spojitou inverzi).

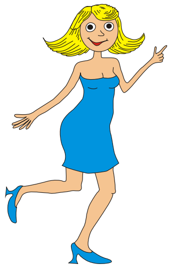
Jsou to např. projekce z kartézského součinu metrických prostorů na souřadnicové prostory nebo podsoučiny, setkali jste se s regulárními zobrazeními a v tomto semestru i s holomorfními funkcemi.

Protože zachovávání otevřených množin může mít více významů, nejdříve přesná definice:

DEFINICE. Zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory se nazývá otevřené, jestliže pro každou otevřenou množinu G v X je $f(G)$ otevřená množina v $f(X)$.

Následující tvrzení neplatí bez předpokladu úplnosti:

VĚTA. (Věta o otevřeném zobrazení) Spojité lineární zobrazení Banachova prostoru na Banachův prostor je otevřené.



A je tu první ohlášené potěšení.

Důkaz. Nechť $f : X \to Y$, X, Y jsou Banachovy prostory a $f(X) = Y$. Uvědomte si nejdříve, že f je otevřené právě když zobrazuje okolí 0 v X na okolí 0 v Y (je-li G otevřená v X a $y \in f(G), y = f(x), x \in G$, je $G - x$ okolí 0 v X a $f(G - x) = f(G) - y$). Navíc stačí požadovat, aby obraz jednoho okolí 0 byl okolí 0.

Nechť U_r je koule v X o středu 0 a poloměru r. Pak $\overline{f(U_r)}$ je pohlcující v Y a tedy $Y = \bigcup n\overline{f(U_r)}$. Podle Baireovy věty ($Y$ je úplný) musí mít některá množina $\overline{nf(U_r)} = n\overline{f(U_r)}$ neprázdný vnitřek, a tedy i množina $\overline{f(U_r)}$ (proč?). To znamená, že existuje okolí V bodu 0 v Y a bod y tak, že $y + V \subset \overline{f(U_r)}$, takže $\overline{f(U_{2r})} \supset \overline{f(U_r)} - \overline{f(U_r)} \supset \overline{f(U_r)} - y$ a poslední množina je okolí 0. Takže existuje posloupnost čísel $\{r_n\}$ klesající k 0 taková, že $\overline{f(U_{2^{-n}})}$ obsahuje kouli v Y o středu 0 a poloměru r_n.

Nyní stačí ukázat, že $f(U_2) \supset \overline{f(U_1)}$. Nechť $y \in \overline{f(U_1)}$. Existuje tedy bod $x_1 \in f(U_1)$ tak, že $||y - f(x_1)|| < r_1$. To znamená, že $y - f(x_1) \in \overline{f(U_{2^{-1}})}$ a tedy existuje bod $x_2 \in f(U_{2^{-1}})$ tak, že $||(y - f(x_1)) - f(x_2)|| < r_2$. Opakováním tohoto procesu se získá posloupnost $\{x_n\}$ s vlastnostmi: $x_n \in f(U_{2^{1-n}}), ||y - \sum_{k=1}^{n} f(x_i)|| < r_n$. To znamená, že $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_i) = y$ a dále, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} x_i$ je cauchyovská a tedy konverguje k nějakému $x \in X$. Vzhledem ke spojitosti f musí být $f(x) = y$. Je zřejmé, že $x \in U_2$. Důkaz je hotov. $\diamond$

Věta o otevřeném zobrazení má zajímavé důsledky:

DŮSLEDEK.

1. Každé spojité lineární zobrazení mezi Banachovými prostory, které je prosté a na, je homeomorfismus.
2. Dva Banachovy prostory se srovnatelnými topologiemi jsou totožné.

Úplnost obou prostorů ve větě o otevřením zobrazení je nutná.

Platí také následující tvrzení, které lze do jisté míry chápat jako částečné obrácení věty o otevřeném zobrazení.

VĚTA. Nechť $f : X \to Y$ je spojité lineární a otevřené zobrazení Banachova prostoru na normovaný prostor. Pak Y je Banachův prostor.

Důkaz. Nechť B_r, C_r jsou uzavřené koule o poloměru r a středu v 0 v prostoru X, resp, Y. Protože f je otevřené, existuje klesající posloupnost čísel $s_n \le 2^{-n}$ tak, že $f(B_{2^{-n}}) \supset C_{s_n}$.

Nechť $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost v Y – lze předpokládat, že $||y_n - y_{n+1}|| < s_n$. Zvolí se libovolný bod x_1 z $f^{-1}(y_1)$. Protože $||y_1 - y_2|| < s_1$, existuje $x_2 \in f^{-1}(y_2)$ tak, že $||x_1 - x_2|| \le 2^{-1}$. Protože $||y_2 - y_3|| < s_2$, existuje $x_3 \in f^{-1}(y_3)$ tak, že $||x_2 - x_3|| \le 2^{-2}$. Tímto postupem se získá posloupnost bodů $x_n \in f^{-1}(y_n)$, která je cauchyovská. Tedy konverguje k nějakému x, což implikuje konvergenci obrazů y_n (k $f(x)$). $\diamond$

Jestliže se předchozí věta dá dohromady s větou o otevřeném zobrazení, získá se následující důsledek:

DŮSLEDEK. Nechť f je spojité lineární zobrazení Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y. Pak nastane právě jedna z následujících možností:

1. $f(X)$ je Banachův prostor;
2. $f(X)$ je 1.kategorie v sobě.

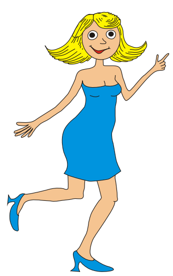
První případ nastane, je-li f otevřené, druhý pokud f není otevřené zobrazení.

Chodíme tu pořád okolo horké kaše. Všem je snad jasné, že ty prostory jsou každej jinej. Některý jsou menší než jiný, a v tom případě jsou menší opravdu krutě.

Spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory má vždy uzavřený graf v $X \times Y$.

Zobrazení s uzavřeným grafem však nemusí být spojité ani v případě, že X, Y jsou normované prostory a f je lineární (viz *Otázky*.

VĚTA. (Věta o uzavřeném grafu) Nechť $f : X \to Y$ je lineární zobrazení mezi Banachovými prostory, které má uzavřený graf. Pak je f spojité.



A už je tu druhý kousek.

Důkaz. Nechť $T \subset X \times Y$ je graf zobrazení f (uvědomte si, že to je lineární podprostor součinu Banachových prostorů a tedy Banachův prostor).

Projekce $p : T \to X$ je spojité a prosté zobrazení na X.

Podle prvního důsledku věty o otevřeném zobrazení má p spojitou inverzi.

Ale $f = q \circ p^{-1}$, kde q je druhá projekce $T \to Y$, takže je f spojité. $\diamond$

Poslední kousek je trochu komplikovanější. BUde se však používat často a snadno.

Poslední tvrzení v této části se bude týkat vztahu bodové a stejnoměrné omezenosti funkcionálů na Banachově prostoru.

VĚTA. (Věta o stejnoměrné omezenosti) Nechť $f_n : X \to Y$ je posloupnost spojitých lineárních zobrazení z Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y, která je bodově omezená (tj. $\{f_n(x)\}_n$ je omezená pro každé $x \in X$). Pak je i posloupnost norem $\{||f_n||\}$ omezená.

Důkaz. Nechť posloupnost norem $\{||f_n||\}$ není omezená. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ je množina $S_k = \{x \in X; \sup_n ||f_n(x)|| > k\}$ hustá v X.

Jinak by existovala koule $B_{a,r}$ s vlastností ; $\sup\{||f_n(x)||; n \in \mathbb{N}, x \in B_{a,r}\} \le k$, takže pro libovolné $x \in X$ s normou nejvýše 1 by $||f_n(x)|| = \frac{1}{r}||f_n((a + rx) - a)|| \le \frac{k}{r} + \frac{k}{r}$, protože jak a, tak $a + rx$ náleží do $B_{a,r}$. To je spor s předpokladem neomezenosti.

Množiny S_k jsou otevřené a podle Baireovy věty je jejich průnik neprázdný, např. obsahuje bod z. To ale znamená, že $\sup_n ||f_n(z)|| = +\infty$, což je spor s předpokladem bodové omezenosti. $\diamond$

DŮSLEDEK. Nechť $f_n : X \to Y$ je posloupnost spojitých lineárních zobrazení z Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y.

1. Jestliže pro každé $x \in X$ existuje $\lim f_n(x)$, označte ji $f(x)$, je zobrazení f spojité a lineární.
2. Je-li Y Banachův a pro každé $x \in X$ je posloupnost $\{f_n(x)\}$ cauchyovská, pak f_n konverguje bodově ke spojité lineární funkci $X \to Y$.

Stejnoměrná omezenost se dostane snadno z bodové. Ony ty Banachovy prostory tu nejsou pro nic za nic.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

DUÁLNÍ PROSTORY

Pro každé spojité lineární zobrazení f mezi normovanými prostory $X \to Y$ byla zavedena norma $||f||$ a snadno se ukáže, že lineární prostor $B(X, Y)$ všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y (jako podprostor Y^X) spolu s $||f||$ je normovaný (viz též *Příklady*).

V další části se však omezíme jen na případ $Y = \mathbb{R}$, tj. na lineární podprostor algebraického duálu $X^\#$.

DEFINICE. Pro normovaný prostor X se normovaný prostor $B(X, \mathbb{R})$ značí X' a nazývá duální prostor prostoru X.

Uvědomte si, že důsledkem Hahnovy-Banachovy věty je $X' \neq 0$ pro $X \neq 0$.

Následující tvrzení plyne přímo z obecnějšího tvrzení pro úplný obor hodnot (viz *Příklady*).

VĚTA. Duální prostor je úplný.

Například X jsou spojité funkce na $[0, 1]$. V duálu sedí například Riemannův integrál.

V první části této kapitoly byl lineární prostor vnořen do svého druhého algebraického duálu pomocí zobrazení e_X definovaného rovností $(e_X(x))(f) = f(x)$.

Otázkou je, zda pro normovaný prostor X je každé $e_X(x)$ spojité na X', tj. zda leží v druhém duálu $(X')'$.

Pro jednoduchost se značí druhý duál $(X')'$ jako X''.

VĚTA. Je-li X normovaný prostor, je e_X prosté spojité lineární zobrazení, které zachovává normu (tj. $||e_X(x)|| = ||x||$).

Důkaz. Spojitost plyne z omezenosti normy: $||e_X|| \leq 1$, protože $|e_X(x)(f)| = |f(x)| \leq ||x||$ pro $||f|| = 1$. Z právě uvedeného plyne $||e_X(x)|| \leq ||x||$ a zbývá dokázat opačnou nerovnost. Ta plyne z Hahnovy-Banachovy věty, neboť pro $x \neq 0$ existuje $f \in X'$ s hodnotou $||x||$ v x. Tato poslední úvaha dává i prostotu zobrazení e_X. $\diamond$

Zobrazení e_X se nazývá *přirozené vložení* X do X''.

V další části bude často X ztotožňován se svým obrazem $e_X(X)$ v X'' a tedy chápán jako podprostor X''.

Případy, kdy e_X je zobrazení na celý prostor X'' jsou velmi důležité (pak X je isomorfní X'').

Protože duální prostory jsou vždy úplné, může tato situace nastat jen pro Banachovy prostory X:

DEFINICE. Banachův prostor X se nazývá reflexivní, jestliže přirozené vložení $e_X : X \to X''$ je zobrazení na.

Reflexivita znamená, že pro každý spojitý lineární funkcionál F na X' existuje $x \in X$ tak, že $F(f) = f(x)$ pro každé $f \in X'$.

Reflexivita je znak dobrého prostoru.

Nyní bude uvedeno několik vět z mnoha tvrzení o duálních a reflexivních prostorech, které pomáhají při zjišťování reflexivity.

VĚTA. Jestliže X není separabilní, není ani X' separabilní.

Důkaz. Protože X není separabilní, existuje nespočetná lineárně nezávislá podmnožina A sféry $||x|| = 1$ v X jejíž body mají navzájem vzdálenost alespoň nějaké $r > 0$.

Pro $a \in A$ existuje $f_a \in X'$ s hodnotou alespoň r v bodě a a anulující se na ostatních bodech množiny A (podle Hahnovy-Banachovy věty). Pro $a, b \in A, a \neq b$, je $||f_a - f_b|| \geq r$ a tedy X' není separabilní. $\diamond$

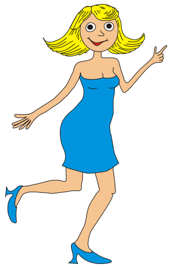
VĚTA. Banachův prostor X je reflexivní právě když X' je reflexivní.

Důkaz. Nechť X je reflexivní a $\mathcal{F}$ je spojitý lineární funkcionál na X'', tedy na X, takže existuje $f \in X'$ tak, že $\mathcal{F}(F) = F(f)$ pro každé $F \in X''$. To znamená, že X' je reflexivní.

Nechť nyní X' je reflexivní a X není reflexivní. Podle Hahnovy-Banachovy věty existuje nenulový $\mathcal{F} \in \mathcal{X}'''$, který se anuluje na X. Ale $\mathcal{F} = f \in X'$. Nulové hodnoty $\mathcal{F}$ na X znamenají, že $f = 0$ a tedy $\mathcal{F} = 0$, což je spor. $\diamond$

VĚTA. Je-li X je reflexivní, je i každý jeho uzavřený lineární podprostor reflexivní.

Důkaz. Nechť Y je uzavřený lineární podprostor X a $G \in Y''$. Zadefinujte $F \in X''$ rovností $F(f) = G(f_1)$, kde f_1 je zúžení f na Y. Existuje tedy $x \in X$ tak, že $F = e_X(x)$. Snadno se ukáže, že $x \in Y$ a tedy $G = e_Y(x)$ (jinak by existoval $f \in X'$ nenulový v x a nulový na Y, takže $0 = G(f_1) = F(f) = f(x) \neq 0$). $\diamond$



Reflexivita je klíčem ke zkoumání duálu. Sekvence X, X', X'', $\ldots$ je periodická.

Někdy je to konstantní posloupnost. To je šťastná konstelace, protože se nás nebude nikdo ptát na šedesátý šestý duál.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4 4

HILBERTOVY PROSTORY

V euklidovských prostorech je ze všech uvedených norem nejpřirozenější norma v $l_2(n)$, která odpovídá běžně užívané geometrické vzdálenosti.

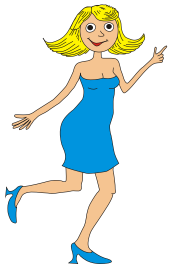
Tato norma $||\{x_i\}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ je vlastně odmocnina ze skalárního součinu vektoru x se sebou.

Podobně lze nahlížet na normu v l_2 a v L_2 (viz dále).

Skalární součin umožňuje definovat i kolmost vektorů, což byla důležitá vlastnost souboru funkcí $\sin(kx), \cos(kx)$ v kapitole o Fourierových řadách.

Tato kapitola bude věnována obecnému pohledu na prostory se skalárním součinem a na obecné Fourierovy řady.

Hilbertovy prostory jsou tím hledaným zobecněním $\mathbb{R}^n = l_2(n)$.



V těchto prostorech se pracuje s kolmostí. To je základ pro definování vhodného typu prostorů obecně.

DEFINICE. Komutativní bilineární funkce $(x, y) : X \times X \to \mathbb{R}$ se nazývá vnitřní součin na X, jestliže pro každé $x \neq 0$ je$(x, x) > 0$.

Vnitřní součin určuje normu způsobem naznačeným v úvodu této části:

VĚTA. Funkce $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ je norma na X.

Prostor s vnitřním součinem bude chápan jako normovaný prostor s právě definovanou normou. Pokud se řekne o normovaném prostoru, že má vnitřní součin, znamená to, že jeho norma je určena tímto součinem.

Důkaz. Stačí dokázat trojúhelníkovou nerovnost $||x+y|| \leq ||x||+||y||$. Ta vyplyne z tzv. Schwartzovy nerovnosti $|(x, y)| \leq ||x||||y||$:

$$||x+y||^2 = (x+y)(x+y) = ||x||^2 + 2(x, y) + ||y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2 .$$

Schwartzova nerovnost se dokáže z nerovnosti $(x + ry)(x + ry) \geq 0$ roznásobením a položením $r = -(x, y)/||y||^2$ (lze předpokládat $y \neq 0$); dostane se nerovnost $||x||^2 + 2(x, y)^2/||y||^2 + (x, y)^2/||y||^2 \geq 0$ a odtud již vyplyne výsledek. $\diamond$

Podobně jako tomu je u normovaných prostorů, jsou úplné prostory s vnitřním součinem velmi důležité a mají svůj název.

DEFINICE. Úplný prostor s vnitřním součinem se nazývá Hilbertův prostor.

Zřejmě je každý Hilbertův prostor Banachovým prostorem. Vnitřní součin, který má Hilbertův prostor navíc, je velmi silná podmínka (např. implikuje, že každý Hilbertův prostor je reflexivní – viz dále).

Z vnitřního součinu plyne (stejně jako u skalárního součinu vektorů) pojem kolmosti prvků:

DEFINICE. Nechť X je prostor s vnitřním součinem. Dva prvky $x, y \in X$ se nazývají kolmé (nebo ortogonální), jestliže $(x, y) = 0$.

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá ortogonální, jestliže každé dva její prvky jsou na sebe kolmé. Ortogonální množina se nazývá ortonormální, jestliže má každý její prvek normu rovnou 1.

Dvě podmnožiny A, B prostoru X se nazývají navzájem ortogonální, jestliže každý prvek z A je kolmý na každý prvek z B.

Snadno se dokáží následující tvrzení:

POZOROVÁNÍ. Nechť X je prostor s vnitřním součinem.

1. V X existuje maximální ortonormální množina.
2. Je-li X separabilní, je každá ortogonální podmnožina nejvýše spočetná.
3. Je-li a kolmý na množinu $B \subset X$, je kolmý i na uzavřený lineární obal množiny B.
4. Množina všech prvků X kolmých na danou množinu $B \subset X$, je uzavřený lineární podprostor v X.

Následující tvrzení je jednoduché a odpovídá geometrické představě, že vzdálenost bodu od roviny je vzdálenost bodu od paty kolmice z bodu na rovinu. Důkaz je také pomocí Pythagorovy věty (viz *Otázky*).

LEMMA. Nechť $A = \{u_1, ..., u_n\}$ je ortonormální množina v X a pro $x \in X$ se označí $x_A = \sum_i (x, u_i) u_i$. Pak $||x||^2 \geq ||x_A||^2 = \sum_i (x, u_i)^2$ a funkce $||x - y||$ proměnné $y \in A$ nabývá minima právě v bodě x_A. Toto minimum je vzdálenost x od lineárního obalu množiny A.

Předchozí tvrzení lze zobecnit na nekonečné množiny A. Je možné celou následující teorii vyložit pro obecné Hilbertovy množiny, ale výklad bude podán jen pro separabilní prostory, protože pak jsou ortonormální množiny nejvýše spočetné a sčítají se tedy nejvýše spočetné řady: součet nekonečné řady prvků v normovaném prostoru je, jako v $\mathbb{R}$, limita posloupnosti částečných součtů.

Nerovnost $||x||^2 \geq \sum_n (x, u_n)^2$ v následujícím tvrzení se nazývá Bessellova nerovnost.

LEMMA. Nechť $A = \{u_n\}_{\mathbb{N}}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru X a pro $x \in X$ se označí $x_A = \sum_n (x, u_n) u_n$. Pak $||x||^2 \geq ||x_A||^2 = \sum_n (x, u_n)^2$ a funkce $||x - y||$ proměnné $y \in A$ nabývá minima právě v bodě x_A. Toto minimum je vzdálenost x od lineárního obalu množiny A.

Důkaz. Nejdříve je nutné ukázat, že řady uvedené v tvrzení konvergují. Podle předchozího lemmatu je $\{\sum_i^n (x, u_i)^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ posloupnost omezená shora číslem $||x||^2$.

To znamená, že řada $\sum_n (x, u_n)^2$ konverguje a odtud plyne, že řada $\sum_n (x, u_n) u_n$ je cauchyovská (ukažte to) a tedy také konverguje.

Zbytek tvrzení plyne z předchozího lemmatu přechodem k limitě částečných součtů. $\diamond$

Předchozí lemma je základním tvrzením pro důkaz následujícího důležitého tvrzení o Fourierových řadách.

VĚTA. Nechť X je separabilní Hilbertův prostor a $A = \{u_n\}_{\mathbb{N}}$ je ortonormální množina v X. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. Pro každé $x \in X$ je $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n) u_n$.
2. Pro každé $x \in X$ je $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)^2$.
3. Neexistuje nenulový prvek z X kolmý na A.
4. Lineární obal množiny A je hustý v X.

To je v podstatě o Fourierových řadách. Alespoň to tak vypadá.

Z důkazu bude vidět, že pro ortonormální posloupnost $\{u_n\}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty}(x,u_n)u_n$ v Hilbertově prostoru vždy konverguje. Nazývá se Fourierova řada bodu x.

Rovnost v podmínce 2 se nazývá Parsevalova rovnost.

Ortonormální množina, pro kterou platí podmínka 3, se nazývá úplná.

Předchozí tvrzení říká, že Fourierova řada libovolného prvku $x \in X$ konverguje k x právě když je množina A úplná. Není-li A úplná, neplatí Parsevalova rovnost, ale vždy platí Bessellova nerovnost.

Důkaz. Zřejmě (roznásobením kvadrátu normy) platí $1 \to 2$ a dále $2 \to 3$. Nechť nyní $x \in X$; vektor $x - x_A$ je kolmý na A a tedy $x = x_A$, platí-li podmínka 3. Prvek x_A ovšem náleží do uzavřeného lineárního obalu množiny A, takže platí podmínka 4.

Zbývá ukázat, že $4 \to 1$. To ale opět plyne z předchozího lemmatu, protože za podminky 4 je vzdálenost bodu x od lineárního obalu množiny A rovná 0 a tedy $x = x_A$. ◇

Má každý Hilbertův prostor úplnou ortonormální množinu?

VĚTA. Nechť X je Hilbertův prostor. Pak platí:

1. X má úplnou ortonormální množinu.
2. Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, má spočetnou úplnou ortonormální množinu.
3. Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, je isometricky isomorfní s l_2.

Poslední vlastnost říká, že i prostor L_2 je isometricky isomorfní prostoru l_2. Vlastně libovolné dva separabilní nekonečně dimensionální Hilbertovy prostory jsou isometricky isomorfní.

Důkaz. Každá maximální ortonormální množina A v X je úplná. Kdyby nebyla, existoval by nenulový prvek u kolmý na A, takže $A \cup \{u/||u||\}$ by byla ortonormální množina větší než A.

Je-li X separabilní, má spočetnou hustou množinu $S = \{s_n\}$. Ortogonální množina $\{u_n\}$, mající stejný uzavřený lineární obal jako $\{s_n\}$ (a tedy X), se zkonstruuje tzv. Grammovou-Schmidtovou ortogonalizací (viz též kapitola o Fourierových řadách). Vezme se $u_1 = s_{k_1}$, kde s_{k_1} je první nenulový prvek v S. Pak se vezme první prvek s_{k_2} neležící v lineárním obalu prvku s_{k_1} a najde se lineární kombinace $u_2 = r_1 s_{k_1} + s_{k_2}$ kolmá na u_1, tj. $r_1 = -(s_1, s_{k_2})/||s_1||^2$. Pak se vezme první prvek s_{k_3} neležící v lineárním obalu předchozích prvků s_{k_1}, s_{k_2} a najde se lineární kombinace $u_3 = r_1 s_{k_1} + r_{k_2} s_2 + s_{k_3}$ kolmá na oba předchozí prvky u_{k_1}, u_{k_2} (dostanou se dvě rovnice pro dvě neznámé), atd. Pokud X je nekonečně dimensionální, nemůže konstrukce skončit po konečně mnoha krocích (proč?).

Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, má podle předchozí vlastnosti spočetnou úplnou ortonormální množinu $\{u_n\}$, takže každé $x \in X$ lze vyjádřit řadou $\sum_{n=1}^{\infty}(x,u_n)u_n$.

Má tedy smysl definovat $f(x) = \{(x,u_n)\}$. Podle Parsevalovy rovnosti je $f(x) \in l_2$. Je snadné ukázat, že f je lineární zobrazení zachovávající normu (opět Parsevalova rovnost), takže je i prosté.

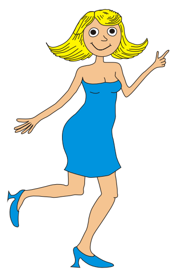
Zbývá ukázat, že f zobrazuje X na l_2. Ale je-li $\{r_n\} \in l_2$, konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} r_n u_n$ (je cauchyovská) k nějakému x a z ortonormality množiny $\{u_n\}$ ihned plyne, že $r_n = (x,u_n)$. ◇

Jedním z důsledků předchozího isomorfismu mezi X a l_2 je fakt, že duální prostor X' je isomorfní s X a spojité lineární funkcionály jsou dané vnitřním součinem:

VĚTA. Pro spojitý lineární funkcionál f na separabilním Hilbertově prostoru existuje $u_f \in X$ tak, že $f(x) = (x, u_f)$. Naopak, každý funkcionál uvedeného tvaru je spojitý a lineární. Navíc platí $||f|| = ||u_f||$, takže zobrazení $f \to u_f$ je isometrický isomorfismus X na X'.

DŮSLEDEK. Hilbertovy prostory jsou reflexivní.

Hilbertovy prostory jsou v podstatě l^2.



A to je hezké.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5 5 6

POZNÁMKY

Poznámky 1:

Místo termínu *lineární prostor* se používá i termín *vekorový prostor*, který vychází z interpretace bodů euklidovského prostoru jako vektory. Tato interpretace ale není příliš vhodná pro prostory funkcí.

Uvědomte si, že zapomenete-li v lineárním prostoru X na násobení čísly, dostanete abelskou (tj. komutativní) grupu, a tedy lineární prostor (lépe řečeno, modul) nad okruhem celých čísel.

Některá obecná tvrzení v tomto textu platí i pro abelovské grupy (některá i pro nekomutativní grupy). Pro studium lineárních prostorů X je důležitý pojem *báze*, což je maximální lineárně nezávislý soubor v X (lineárně nezávislý znamena, že lineární kombinace konečně mnoha prvků množiny s nenulovými koeficienty nemůže být nikdy rovna 0).

Každá lineárně nezávislá množina v X je částí nějaké báze X (Zornovo lemma) a dvě báze prostoru X mají stejnou mohutnost. Lineární zobrazení na X je určeno svými hodnotami na bázi (každé zobrazení z báze X do lineárního prostoru Y lze rozšířit jednoznačně na lineární zobrazení $X \to Y$.

Dále platí, že dva lineární prostory jsou isomorfní právě když mají báze stejné mohutnosti. Mocnina $\mathbb{R}^S$ se může definovat i pro $S = \emptyset$ jako $\{0\}$.

Pro některé formulace je to vhodné.Vztah mezi X a $X^\#$, který dvojici (x, f) přiřazuje $f(x)$ je částí obecnějšího pojmu duality $q : X \times Y \to \mathbb{R}$, kde X, Y jsou lineární prostory a q je bilineární zobrazení (tj. je lineární v každé proměnné, při konstantní druhé proměnné) oddělující body (tj. pro $x \neq 0$ existuje y tak, že $q(x, y) \neq 0$ a podobně prohozeně). Pak ovšem Y je isomorfní lineárnímu podprostoru $X^\#$, který odděluje body X.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

První vlastnost normy se nazývá *subaditivita*, druhá vlastnost *homogenita*.

Podobně jako se místo metriky někdy používá pseudometrika, lze místo normy použít pseudonormu, která má stejné vlastnosti jako norma, až na to, že připouští $p(x) = 0$ i pro nenulové x.

Pseudonorma vytváří pseudometriku invariantní vůči posunutí; faktorový prostor podle stejné ekvivalence jako u pseudometrického prostoru (x je ekvivalentní s y, jestliže $||x - y|| = 0$) je pak normovaný prostor.

Minkovského funkcionál množiny B bude pseudonormou, pokud se ve vlastnostech B vynechá požadavek, aby množina neobsahovala přímky.

Jak bylo naznačeno v textu, metrický lineární prostor se definuje jak lineární prostor X s metrikou, při které je sčítání (bráno jako zobrazení $X \times X \to X$) a násobení čísly (bráno jako zobrazení $\mathbb{R} \times X \to X$) spojité. To je obecnější pojem než normovaný prostor (viz *Příklady*).

V normovaných prostorech je tedy lineární zobrazení spojité právě když má omezenou normu, tj. je v normě omezené. Proto se v literatuře často používá termín *omezené zobrazení* místo spojité zobrazení a ještě častěji *neomezené zobrazení* pro nespojité zobrazení.

Hahnovu-Banachovu větu lze dokázat v jiné formě bez použití norem nebo metrik: *Nechť X je lineární prostor, Y jeho lineární podprostor a $f : Y \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení, které je shora omezeno subaditivní reálnou funkcí p definovanou na X. Pak existuje lineární zobrazení $F : X \to \mathbb{R}$ rozšiřující f a shora omezené funkcí p.*

Důkaz je skoro stejný jako důkaz uvedený v textu. Zkuste toto obecné tvrzení dokázat a vyvoďte z něho formulaci v textu.

Hahnova-Banachova věta má geometrickou interpretaci, a to oddělování bodů od podprostorů nadrovinami.

Je-li spojitost zobrazení definována na obecnějších prostorrech než jsou metrické (např. na topologických nebo konvergenčních prostorech), lze definovat i obecnější spojité lineární prostory, např. topologické lineární prostory: obě algebraické operace musí být spojité. Tyto struktury jsou velmi obecné a proto se definují jejich různé podtřídy vhodné na různá použití.

V předchozích *Poznámkách* byla zmíněna dualita $q : X \times Y \to \mathbb{R}$. Pokud se požaduje, aby q byla separátně spojitá (tj. spojitost v každé proměnné zvlášť jako zobrazení jedné proměnné při konstantní druhé proměnné), dostává se tzv. topologická dualita.

V *Otázkách* je uvedeno, že všechny konečně dimensionální normované prostory jsou navzájem isomorfní (spojitě). To neplatí pro nekonečně dimensionální prostory (např. l_1 není isomorfní l_2), ale bylo dokázáno, že všechny Banachovy separabilní prostory jsou navzájem homeomorfní (platí i pro Fréchetovy prostory). Tyto homeomorfismy nejsou lineární.

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

Mnoho uvedených tvrzení, kde je potřeba úplnost, lze dokázat (často jednoduchou modifikací uvedených důkazů) pro metrické lineární prostory, tj. není nutné předpokládat existenci normy.

Ale je zřejmé, že v praxi se lépe pracuje s normou než s metrikou. Nicméně, i úplné metrické lineární prostory jsou důležité a mají také svůj název: *Fréchetovy prostory*.

Při rozšiřování algebraických operací na úplný obal metrického lineárního prostoru lze použít i jiný postup.

Sčítání $X \times X \to X$ je stejnoměrně spojité a lze jej tedy rozšířit na stejnoměrně spojité zobrazení $Z \times Z \to Z$ (značení z důkazu).

Násobení číslem ale není stejnoměrně spojité na součinu $\mathbb{R} \times X$, je však stejnoměrně spojité ve druhé souřadnici při konstantní první souřadnici.

Tedy lze pro každé reálné r zobrazení $x \to rx$ rozšířit na stejnoměrně spojité zobrazení $Z \to Z$. Axiomy lineárního prostoru vyplynou z toho, že X je hustý v Z: např. obě zobrazení $(z, z') \to z + z'$, $(z, z') \to z' + z$ se rovnají na $X \times X$ a tedy se rovnají i na $Z \times Z$.

V metrických prostorech je kromě úplnosti ještě velmi důležitou vlastností kompaktnost. Aspoň dvoubodový metrický lineární prostor však nikdy není kompaktní (proč?). Může být lokálně kompaktní? Ano, ale právě když je konečně dimenzionální, tj. isomorfní euklidovskému prostoru.

Pro nalýzu jsou velmi důležité Banachovy prostory funkcí (všimněte si, že skoro všechny zde uváděné příklady jsou tohoto typu).

Různé prostory funkcí se dají v rámci Banachových prostorů charakterizovat. Zvláště se to týká prostorů $C(X)$ na kompaktních prostorech X (každý Banachův prostor se dá přirozeně vnořit do takového prostoru – ale X je obecně topologický, nemusí být metrický).

Platí i zajímavá Banachova-Stoneova věta: *Dva metrické kompatktní prostory jsou homeomorfní právě když jejich Banachovy prostory $C(X), C(Y)$ jsou isometricky isomorfní.*

Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

V literatuře se místo termínu *duální* používá i termín *adjungovaný* a značení X^*. Toto značení je obvyklé zvláště v Hilbertových prostorech.

Duální jsou nejen prostory, ale i zobrazení. Jestliže $F : X \to Y$ je spojité lineární zobrazení mezi normovanými prostory, existuje tzv. *duální zobrazení* $F' : Y' \to X'$, které je definováno pomocí složení: $F'(g) = g \circ F$. Lze snadno ukázat, že duální zobrazení je spojité a lineární a má stejnou normu jako původní zobrazení.

V definici reflexivity nelze isomorfismus e_X zaměnit existencí isomorfismu mezi X a X''. Existují příklady Banachových prostorů X isomorfních svému druhému duálu, které nejsou reflexivní.

V *Otázkách* je zmínka o slabé omezenosti. Podobně lze definovat i *slabou konvergenci* posloupnosti $\{x_n\}$ v normovaném prostoru X: pro každé $f \in X'$ je $\{f(x_n)\}$ konvergentní. Konvergence v normě se pak nazývá silná konvergence.

Slabou konvergenci lze vhodně použít k různým charakterizacím:

- Banachův prostor X je konečně dimensionální právě když slabá a silná konvergence v X jsou totožné,
- Banachův prostor X je reflexivní právě když z každé posloupnosti v jednotkové kouli B lze vybrat konvergentní podposloupnost (tzv. slabá sekvenční kompaktnost).

Podobně lze definovat tzv. slabou* konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ v duálu X': pro každé $x \in X$ je $\{f(x_n)\}$ konvergentní. Uvědomte si, že slabá konvergence v duálu je definována vzhledem k dualitě x' s X'', kdežto slabá* konvergence je definována vzhledem k dualitě X' s X. Tyto pojmy je ovšem vhodnější studovat v rámcí topologických prostorů (slabá konvergence obecně není definována pomocí metriky).

Konec poznámek 4.

Poznámky 5:

Vnitřní součin se také, podle analogie s euklidovskými prostory, *nazývá skalární součin*. Slovo „vnitřní" rozlišuje součin od vnějšího součinu násobení vektoru číslem.

Prostor s vnitřním součinem se občas nazývá *unitární prostor*.

Prostory s vnitřním součinem se většinou zkoumají nad komplexními čísly. Protože norma musí být vždy reálné číslo, musí být součin x se sebou reálné číslo. Musí se tedy vzít za součin, např. na 1-dimensionálním prostoru, $x\overline{x}$, tedy součin s komplexně sdruženým číslem. Pak ale součin $(x, y) = x\overline{y}$ není komutativní a místo rovnosti $(x, y) = (y, x)$ se musí požadovat rovnost $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Uvědomte si, že potom neplatí $r(x, y) = (x, ry)$ ale $r(x, y) = (x, \overline{r}y)$.

Jak bylo vidět, ze Schwartzovy nerovnosti se snadno dokáže trojúhelníková nerovnost příslušné normy v prostorech s vnitřním součinem, např. l_2, L_2. Obdobně se dokazuje trojúhelníková nerovnost pro prostory l_p, L_p, kde se obdoba Schwartzovy nerovnosti nazývá Hölderova nerovnost. Např. pro l_p tato nerovnost vypadá následovně (pro $\{x_n\} \in l_p, \{y_n\} \in l_q$, kde $1/p + 12/q = 1$):

$$\sum x_n y_n \leq \sqrt[p]{\sum |x_n|^p}\ \sqrt[q]{\sum |y_n|^q}$$

a podobně pro L_p, L_q: $\int fg \leq ||f||_p\, ||g||_q$. Hölderovu nerovnost lze dokázat např. pomocí hledání extrému funkcí.

Tvrzení o Fourierových řadách platí i pro neseparabilní prostory. Pak je ale nutné definovat součty nespočetných řad. Není to příliš velký rozdíl, protože pro funkci f definovanou na nějaké množině P s hodnotami v normovaném prostoru se součet $\sum_P f(p)$ definuje jako limita zobecněné (obecně nespočetné) posloupnosti součtů přes konečné podmnožiny v P. Dá se ukázat, že pokud takováto řada konverguje, je jen spočetně mnoho hodnot $f(p)$ nenulových (např. pro $\{p_n\}$ a řada $\sum f(p_n)$ konverguje absolutně.

Důsledkem je isometrický isomorfismus Hilbertova prostoru (mající úplný ortonormální systém mohutnosti κ) s prostorem $l_2(\kappa)$, který se definuje jako množina souborů $\{r_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ reálných čísel majících jen spočetně mnoho čísel r_α nenulových a takových, že $\sum r_\alpha^2$ konverguje.

Odtud plyne, že libovolné dvě úplné ortonormální podmnožiny Hilbertova prostoru mají stejnou mohutnost.

Poslední tvrzení o duálním prostoru platí také bez separability.

V této kapitole bylo dokázáno, že každá Fourierova řada funkce $f \in L_2(J)$ konverguje k f. Uvědomte si však rozdíl oproti konvergenci zkoumané v kapitole o Fourierových řadách.

Tam se zkoumala bodová nebo stejnoměrná konvergence, což je rozdíl oproti konvergenci v $L_2(J)$. Navíc se mohou zkoumat i Fourierovy řady (trigonometrické řady) funkcí f neležících v L_2.

Hilbertovy prostory jsou natolik důležité, že je podstatné umět je rozpoznat ve třídě Banachových prostorů.

Existuje mnoho podmínek, které Banachův prostor splňuje právě když je Hilbertův.

Např. $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$ (tato podmínka lze zeslabit pažadavky $||x|| = ||y|| = 1$).

Odtud vyplývá, ža Banachův prostor je Hilbertův právě když každý jeho dvourozměrný podprostor je isometricky isomorfní s rovinou $\mathbb{R}^2$.

Konec poznámek 5.

PŘÍKLADY

Příklady 1:

V kapitole o metrických prostorech je mezi příklady mnoho lineárních prostorů, které teď zopakujeme.

1. Euklidovské prostory jsou lineární při operacích definovaných po souřadnicích.

2. Prostory $l_p, p \in [1, +\infty]$, jsou lineární při operacích definovaných po souřadnicích.

3. Množina všech reálných funkcí $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ na množině A (tj. mocnina $\mathbb{R}^A$) je lineární prostor při operacích definovaných po souřadnicích.

Následující množiny jsou lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^A$ (kromě první položky je A metrický prostor):

- $\mathcal{F}_*(A, \mathbb{R})$ všech omezených funkcí;
- $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ všech spojitých funkcí a $\mathcal{C}_*(A, \mathbb{R})$ všech omezených spojitých funkcí;
- $\mathcal{U}(A, \mathbb{R})$ všech stejnoměrně spojitých funkcí a $\mathcal{U}_*(A, \mathbb{R})$ všech omezených stejnoměrně spojitých funkcí;
- $\mathcal{L}(A, \mathbb{R})$ všech lipschitzovských funkcí a množina $\mathcal{L}_*(A, \mathbb{R})$ všech omezených lipschitzovských funkcí.

4. Je-li v předchozím příkladu $A = \mathbb{R}$, lze k lineárním podprostorům $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ přidat i prostory množiny funkcí majících všude derivaci až do řádu n, nebo derivace všech řádů.

Konec příkladů 1.

Příklady 2:

V předchozích *Příkladech* byly použity různé prostory z kapitoly o metrických prostorech, ale jen jako lineární struktury bez metrik na nich definovaných. Nyní budou vzaty v úvahy i metriky.

1. Ukažte, že prostory $l_p(n), p \in [1, +\infty]$, jsou normované.

2. Ukažte, že prostory $l_p, p \in [1, +\infty]$, jsou normované.

3. Podmnožiny $c_0 \subset c \subset l_\infty$, kde $c = \{\{x_n\}; \lim x_n$ existuje $\}$, $c_0 = \{\{x_n\}; \lim x_n = 0\}$, jsou uzavřené lineární podprostory l_∞.

4. Množina *všech* reálných posloupností lze chápat jako kartézský součin metrických prostorů, a to spočetně mnoha reálných přímek, tj. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

To je lineární prostor a metrika této mocniny

$$d(\{x_n\},\{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1+|x_n - y_n|)}$$

vytváří z $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ metrický lineární prostor, který se často značí s.

Tento prostor není normovaný, ani na něm nelze definovat normu topologicky ekvivalentní dané metrice. [Důvod plyne z *Otázky 5* – s nemá omezená okolí 0.]

5. Součty nekonečných řad čísel jsou vlastně integrály funkcí na $\mathbb{N}$ podle tzv. čítací míry. Je nasnadě definovat obdobu prostorů l_p na obecných prostorech s mírou. Pro jednoduchost však bude pozornost věnována prostorům funkcí na intervalu $I = [0,1]$.

Pro $p \in [1,+\infty)$ se definuje $L_p = \{f : I \to \mathbb{R}; \int_I |f(x)|^p \,\mathrm{d}x$ konverguje $\}$. S funkcí $||f|| = \sqrt[p]{\int_I |f(x)|^p \,\mathrm{d}x}$ tvoří L_p pseudonormovaný prostor (normovaný po ztotožnění funkcí rovných skoro všude). Důkaz trojúhelníkové nerovnosti pro $||f||$ (tzv. Minkovského nerovnost) není jednoduchý.

Lze definovat i L_∞ s pseudonormou rovnou infimu suprem funkce f na $I \setminus S$, kde S probíhá nulové mnpožiny.

Obdobou metrického lineárního prostoru s je prostor S všech integrovatelných funkcí na I s pseudometrikou

$$d(f,g) = \int_I \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} \,\mathrm{d}x\,.$$

Tento prostor také není normovaný.

6. Prostor $\mathcal{F}_*(X)$ všech omezených reálných funkcí na množině X se supremovou normou $||f|| = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$ je normovaný prostor.

Jeho lineární podprostory $\mathcal{C}_*(X), \mathcal{U}_*(X)$ a $\mathcal{L}_*(X)$ všech omezených spojitých, resp, stejnoměrnš spojitých nebo lipschitzovských funkcí na metrickém prostoru X jsou uzavřené.

7. Vezměte podprostor Y v $\mathcal{C}([0,1])$ všech funkcí majících na $[0,1]$ spojitou derivaci. Pak lineární zobrazení $F : Y \to \mathcal{C}([0,1])$ definované rovností $F(f) = f'$ není spojité.

Pokud vezmete na Y normu $||f|| = \sup|f(x)| + \sup|f'(x)|$, bude F spojité (tato metrika byla používána v kapitole o variačním počtu jako metrika 1.řádu).

8. V *Příkladech 5* v kapitole o metrických prostorech (část o úplnosti) jsou popsány prostory hölderovských funkcí s pseudonormou rovnou nejmenší konstantě k, pro níž platí definující nerovnost hölderovských funkcí stupně α, tj. $|f(x) - f(y)| \le k|x-y|^\alpha$.

V uvedených příkladech je uveden obecnější případ a pseudonorma je popsána vzorcem. Získané prostory $\mathcal{H}_\alpha, \alpha \in [0,1]$, jsou pseudonormované prostory. Jejich normovaná modifikace je isomorfní podprostoru těch funkcí, které mají hodnotu 0 v 0.

9. Prostor $B(X,Y)$ všech spojitých lineárních zobrazení $f : X \to Y$ mezi normovanými prostory, s normou $||f||$, je normovaný prostor.

Je to uzavřený lineární podprostor prostoru $\mathcal{H}_1$ z předchozího příkladu.

10. Z teorie integrálních rovnic je znám následující příklad. Nechť funkce $k(x,y)$ je spojitá na čtverci $[0,1]\times[0,1]$ a $F(f)(y) = \int_0^1 k(x,y)f(x)\,\mathrm{d}x$. Je-li $f \in \mathcal{C}([0,1])$, je i $F(f) \in \mathcal{C}([0,1])$.

Zobrazení F je spojité a lineární. Jeho norma je rovna $\sup\{\int_0^1 |k(x,y)|\,\mathrm{d}x; y \in [0,1]$. Zkuste zjistit, jak se norma změní, chápete-li F jako zobrazení $L_1 \to L_1$ nebo $L_1 \to \mathcal{C}([0,1])$.

Konec příkladů 2.

Příklady 3:

Úplnost většiny následujících prostorů byla ukázána v příkladech v kapitole o metrických prostorech.

1. Všechny dříve uvedené příklady normovaných prostorů složených z posloupností $(l_p(n), l_p, c, c_0)$ jsou Banachovy prostory.

Prostor s je Fréchetův.

2. Podprostory prostorů l_p, c, c_0 skládajících se z posloupností majících jen konečně mnoho nenulových členů, nejsou úplné. Proč?

3. Všechny dříve uvedené příklady normovaných prostorů složených z funkcí ($L_p, \mathcal{F}_*(X), \mathcal{C}_*(X), \mathcal{U}_*(X), \mathcal{L}_*(X), \mathcal{H}_\alpha$) jsou Banachovy prostory.

Prostor S je Fréchetův prostor.

4. Prostor $B(X,Y)$ všech spojitých lineárních zobrazení normovaného prostoru X do Banachova prostoru Y je úplný. Platí i jistý opak: Je-li $X \neq \{0\}$ a $B(X,Y)$ je úplný, je i Y úplný.

5. Pro $1 \leq p < q \leq \infty$ je l_p lineární podprostor l_q a identické vložení $l_p \to l_q$ je spojité (tj, l_q má hrubší normu nebo topologii než l_p). Ukažte, že l_p je 1.kategorie v l_q.

Stejný výsledek platí pro vložení $L_p \to L_q, 1 \leq p < q \leq \infty$ a pro $\mathcal{H}_\alpha \to \mathcal{H}_\beta, 1 \geq \alpha > \beta \geq 0$.

Konec příkladů 3.

Příklady 4:

1. (Příklad známý z lineární algebry.) Duální prostor ke konečně dimensionálnímu prostoru je konečně dimensionální (se stejnou dimenzí).

Pokud jsou následující popisy duálů prostorů posloupností čísel $x = \{x_n\}$ také posloupnosti $f = \{a_n\}$, je hodnota $f(x)$ rovna $\sum a_n x_n$.

2. $(l_1)'$ je isomorfní l_∞.

3. Pro $p \in (1,+\infty)$ je $(l_p)'$ je isomorfní l_q, kde $1/p + 1/q = 1$. Prostory l_p jsou reflexivní právě pro $p \in (1,+\infty)$.

4. $(c_0)'$ i $(c)'$ jsou isomorfní l_1.

5. $(l_\infty)'$ je isomorfní prostoru jistých konečně aditivních funkcí na $\mathbb{N}$. Prostory l_1, c_0, c, l_∞ nejsou reflexivní. [Použijte vztah mezi separabilitou a duálem u prvních tří prostorů a reflexivity duálu u l_∞.]

Pokud jsou v následujících popisech duálu prostorů funkcí f za funkcionály také funkce g, je hodnota $g(f)$ rovna $\int fg$.

6. V předchozích příkladech 2–3 lze místo l psát L. Pro $p \in (1,+\infty)$ jsou prostory L_p reflexivní, prostory L_1 a L_∞ nejsou reflexivní.

Ani prostor C spojitých funkcí na $[0,1]$ se supremovou normou není reflexivní (jeho duál je isomorfní jisté množině měr).

7. Ukažte, že na prostorech s a S neexistuje nenulový spojitý lineární funkcionál.

Konec příkladů 4.

Příklady 5:

1. Každý konečně dimensionální normovaný prostor je prostor s vnitřním součinem definovaným jako obyčejný skalární součin vektorů.

2. Prostor l_2 má vnitřní součin $(\{x_n\},\{y_n\}) = \sum_n x_n y_n$.

3. Prostor L_2 má vnitřní součin $(f,g) = \int_I f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Prostor l_2 má za úplnou ortonormální množinu posloupnost $\{e_n\}$, kde e_n je posloupnost nul kromě n-tého členu rovného 1.

5. Prostor $L_2[-\pi,\pi]$ má za úplnou ortonormální množinu posloupnost

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}.$$

Úplné ortonormální posloupnosti v $L_2(J)$ na neomezených intervalech J jsou popsány v kapitole o Fourierových řadách (Legendreovy, Hermiteovy a Laguerreovy polynomy).

6. V komplexním prostoru $L_2[-\pi,\pi]$ tvoří $\{\mathrm{e}^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ úplnou ortogonální posloupnost.

Konec příkladů 5.

OTÁZKY

Otázky 1:

1. Ukažte, že průnik lineárních podprostorů je lineární podprostor (odtud plyne smysluplnost definice lineárních obalů).

2. Ukažte, že lineární obal množiny A v lineárním prostoru X je roven množině lineárních kombinací prvků A.

3. Dokažte, že zobrazení $e_X : X \to X^{\#\#}$ je lineární a prosté. Ukažte, že obecně nemusí být na.

4. Ukažte, že je-li $f : X \to Y$ lineární zobrazení mezi lineárními prostory, je $f(X)$ lineární podprostor Y.

5. Lineární prostor $\mathbb{R}$ má jen dva triviální lineární podprostory.

Konec otázek 1.

Otázky 2:

1. Ukažte, že v normovaném prostoru X je sčítání (jako zobrazení $X \times X :\to X$) dokonce stejnoměrně spojité, ale násobení číslem (jako zobrazení $\mathbb{R} \times X :\to X$) není stejnoměrně spojité, pokud $X \neq \{0\}$.

2. Ukažte, že v normovaném prostoru X je norma, jako zobrazení $X \to \mathbb{R}$, stejnoměrně spojitá. [Platí nerovnost $\big|||x|| - ||y||\big| \leq ||x - y||$.]

3. Ukažte, že v normovaném prostoru X je posunutí $t_a(x) = x + a$ (pro dané a) isometrie, a násobení $n_r(x) = rx$ (pro dané $r \neq 0$) je homeomorfismus X na X (tj., je spojité a jeho inverze je taky spojitá).

4. Ukažte, že z Hahnovy-Banachovy věty plyne existence tzv. obecných limit: *Existuje lineární funkcionál L definovaný na všech omezených posloupnostech reálných čísel, mající vlastnost* $\liminf x_n \leq L(\{x_n\}) \leq \limsup x_n$. [$X = l_\infty, Y = c$, f na c přiřazuje posloupnosti její limitu.]

5. Ukažte, že v normovaném prostoru jsou okolí *lineárně omezená*. Podmnožina A metrického lineárního prostoru se nazývá lineárně omezená, jestliže pro každé okolí U bodu 0 existuje $r > 0$ takové, že $rA \subset U$.

6. Nechť f je spojitá reálná funkce na normovaném prostoru X, která je homomorfismem vzhledem ke grupové struktuře X (tj. je aditivní: $f(x + y) = f(x) + f(y)$). Pak f je lineární.

7. Dokažte, že každé lineární zobrazení na euklidovském prostoru je spojité.

Každé spojité lineární zobrazení mezi metrickými lineárními prostory je stejnoměrně spojité.

Každé spojité lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory je lipschitzovské.

8. Na každém nekonečně dimenzionálním normovaném prostoru existuje lineární funkcionál, který není spojitý. [Vezměte spočetnou lineárně nezávislou množinu b_n s normami $||b_n|| = 1$ a definujte $f(b_n) = n$ a rozšiřte na zbytek báze.]

9. Dokažte, že normovaný konečně dimensionální prostor je isomorfní (algebraicky i topologicky) euklidovskému prostoru.

10. Každý konečně dimensionální normovaný prostor je úplný. Proto je každý konečně dimensionální podprostor normovaného prostoru uzavřený.

11*. Normovaný prostor je konečně dimensionální právě když je každá jeho omezená uzavřená množina kompaktní (nebo každá omezená množina je totálně omezená).

Konec otázek 2.

Otázky 3:

1. Najděte příklad lineárního zobrazení mezi dvěma normovanými prostory, které má uzavřený graf a není spojité. [Uvědomte si, že pokud je zobrazení mezi metrickými prostory prosté a na, má toto zobrazení i jeho inverze stejný graf.

Nespojité identické zobrazení prostoru s hrubší normou na tentýž prostor s jemnější normou má tedy uzavřený graf (protože inverze je spojitá) – takové normy jsou např. norma v l_1 a zúžení normy v l_∞ na l_1.

2. Návod v předchozí otázce dává i radu, jak sestrojit spojité lineární zobrazení mezi normovanými prostory, které není otevřené. Ověřte.

3. Ověřte podrobnosti následujícího postupu. Vezměte Banachův prostor X všech spojitých funkcí na $[-\pi, \pi]$ a posloupnost spojitých lineárních funkcí F_n na X definovaných rovností $F_n(f) = a_0/2 + a_+ + ... + a_n$, kde a_i jsou Fourierovy koeficienty funkce f u kosinů.

Kdyby $\lim_n F_n(f)$ konvergovala pro každé $f \in X$, byla by podle věty o stejnoměrné omezenosti posloupnost $||F_n||$ omezená, což neplatí (ukažte to). Existuje tedy spojitá funkce, jejíž Fourierova řada nekonverguje v bodě 0.

4. Uvědomte si, že ve větě o stejnoměrné omezenosti lze místo spočetné množiny $\{f_n\}$ brát libovolnou podmnožinu A spojitých lineárních zobrazení $X \to Y$. [Není-li A omezená, není omezená už nějaká spočetná podmnožina A.]

Konec otázek 3.

Otázky 4:

1. Pomocí vložení e_X lze dokázat větu o stejnoměrné omezenosti pro prvky normovaného prostoru X: *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v X, pro kterou je množina $\{f(x_n)\}_n$ omezená pro každé $f \in X'$. Pak je i posloupnost norem $\{||x_n||\}$ omezená.*

Předpoklad pro $\{x_n\}$ se nazývá *slabá omezenost* a omezenost v normě *silná omezenost*. Tvrzení tedy říká že slabě omezené množiny jsou silně omezené (i pro nespočetné množiny).

2. Nechť X je normovaný prostor. Symbolem I se značí identické zobrazení $X \to X$. Ukažte, že je-li $F : X \to X$ lineární zobrazení s normou menší než 1, má zobrazení $I + F$ spojité inverzní zobrazení.

Konec otázek 4.

Otázky 5:

1. Dokažte „Pythagorovu větu" v prostoru s vnitřním součinem: *Jsou-li dva prvky x, y na sebe kolmé, pak $||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$.*

2. Ukažte, že vnitřní součin, jako funkce na součinu normovaných prostorů, je spojitá.

3. Je-li A ortogonální množina v X neobsahující 0, je $\{a/||a||; a \in A\}$ ortonormální množina v X.

Konec otázek 5.

CVIČENÍ

Cvičení 1: Příklad. Dokažte, že množina

$$l_2 = \left\{ (a_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

je podprostor lineárního prostoru všech reálných posloupností.

Řešení. Musíme ověřit, že l_2 je uzavřená na sčítání a násobení reálnými čísly.

Tedy, že platí

$$(a_n),\ (b_n) \in l_2 \qquad \Rightarrow \qquad (a_n + b_n) \in l_2.$$

Budeme proto odhadovat výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2.$$

Jelikož suma prvního i třetího výrazu je podle předpokladu konečná, stačí se vypořádat se sumou

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

ale ta je, jak vidíme, také konečná ze stejných důvodů.

Zbývá jen ukázat, že

$$(a_n) \in l_2,\ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda a_n) \in l_2.$$

To je ale snadné
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)^2 = \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Konec cvičení 1.

Cvičení 2: Příklad. Ukažte, že zobrazení
$$\|\cdot\| : (a_n) \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$
na prostoru c_0 je norma. Lze definovat vnitřní součin, který tuto normu indukuje?

Řešení. Buďte $(a_n), (b_n) \in c_0$, and $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pokud je $\|(a_n)\| = 0$, pak nutně $|a_n| = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy (a_n) je posloupnost samých nul.

Dále z vlastností absolutní hodnoty plyne, že
$$\|\lambda(a_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda a_n| = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = |\lambda| \|(a_n)\|$$
a
$$\|(a_n) + (b_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n + b_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (|a_n| + |b_n|) = \|(a_n)\| + \|(b_n)\|,$$
čímž jsme ověřili, že se jedná o normu.

Abychom se přesvědčili, že tato norma není indukována vnitřním součinem, stačí najít dvě posloupnosti z c_0, pro které neplatí rovnoběžníková rovnost.

Jsou to třeba posloupnosti $(1, 0, \dots)$ a $(0, 1, 0, \dots)$.

To bylo snadné.

Konec cvičení 2.

Cvičení 3: Příklad. Dokažte, že lineární prostor $C[0,1]$ se suprémovou normou
$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad f \in C[0,1]$$
je Banachův.

Řešení. Máme ověřit úplnost, proto si vezmeme nějakou cauchyovskou posloupnost $(f_n) \subset C[0,1]$ a k té budeme hledat nějaký prvek $f \in C[0,1]$, ke kterému tato posloupnost konverguje.

Konvergencí myslíme konvergenci v normě, což v tomto případě odpovídá stejnoměrné konvergenci na intervalu $[0, 1]$.

Z cachyovskosti dostaneme, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n, m > n_0$ je

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Pro libovolné $x \in [0, 1]$ to ovšem znamená, že číselná posloupnost $(f_n(x))$ je cachyovská. Z úplnosti $\mathbb{R}$ plyne existence reálného čísla, k němuž zmíněná posloupnost konverguje, toto číslo označme $f(x)$.

Nabízí se, že funkce $x \mapsto f(x)$ by mohla být oním hledaným prvkem $C[0, 1]$, k němuž (v normě) konverguje posloupnost (f_n). K tomu nejprve musíme ověřit, že f je spojitá, tedy že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Zvolme $\varepsilon > 0$ a odhadujme

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Z bodové konvergence najdeme $n \in \mathbb{N}$ tak, že bude první a třetí výraz na pravé straně menší než $\varepsilon/3$. Ze spojitosti funkce f_n pak najdeme $\delta > 0$ tak, že také prostřední výraz na pravé straně bude menší než $\varepsilon/3$. Tedy $f \in C[0, 1]$.

Zbývá ukázat, že $f_n \to f$.

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ a všechna $x \in [0, 1]$ je

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

A proč?

Protože posloupnost (f_n) je cauchyovská!

Ale to už znamená, že $f_n \to f$.

Přesně tak. Náš prostor je tedy Banachův.

Konec cvičení 3.

Cvičení 4: Příklad. Na prostoru l_1 definujme funkcionál f takto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}.$$

Spočítejte jeho normu.

Řešení. Jako rozcvičku můžete zkusit ověřit, že f je lineární.

Budeme počítat normu f, tj.

$$\|f\| = \sup |f(x)| = \sup |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}|,$$

kde supremum se bere přes všechny posloupnosti $x = (x_n)$ takové, že

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 1.$$

Odhadujme proto výraz:

$$\|f\| = \sup |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}| \leq \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{x_n}{n}| \leq \sup \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 1.$$

Víme tedy, že

$$\|f\| \leq 1.$$

Dosazení posloupnosti $e_1 = (1, 0, \dots)$ zjistíme, že

$$f(e_1) = 1.$$

Proto je dokonce $\|f\| = 1$.

Dokázali jsme, že f je spojitý, a tedy že patří do duálu.

Konec cvičení 4.

Cvičení 5: Příklad. Spočítejte normu funkcionálu $\varphi : C[-1,1] \to \mathbb{R}$ definovaného předpisem

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^0 f(x)\,dx.$$

Řešení. Opět si můžete nejprve dokázat, že φ je lineární zobrazení.
Budeme počítat normu φ, tj.

$$\|\varphi\| = \sup|\varphi(f)| = \sup|\int_0^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^0 f(x)\,dx|,$$

kde supremum se bere přes všechny funkce f takové, že

$$\|f\| = \sup_{[-1,1]} |f(x)| = 1.$$

Odhadujme proto výraz:

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup|\int_0^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^0 f(x)\,dx| \\ &\leq \sup\int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_{-1}^0 |f(x)|\,dx. \leq 2. \end{aligned}$$

Vidíme, že

$$\|\varphi\| \leq 2.$$

Nyní by stačilo, podobně jako v předchozím příkladě, najít nějakou funkci $g \in C[-1,1]$ s normou 1, pro kterou bude $|\varphi(g)| = 2$.

To se vám ale nepodaří.

Spokojíme se s tím, že najdeme posloupnost funkcí (f_n), které mají normu 1 a platí

$$|\varphi(f_n)| \to 2.$$

Z předpisu funkcionálu φ je vidět, že posloupnost f_n lze definovat takto

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, -1/n], \\ nx, & x \in [-1/n, 1/n], \\ 1, & x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Zřejmě $\|f_n\| = 1$ a $|\varphi(f_n)| \to 2$. Je tedy

$$\|\varphi\| = 2.$$

Takže normu jsme spočítali tak jako tak.

Konec cvičení 5.

Cvičení 6: Příklad. Najděte všechny prvky z l_2, které jsou kolmé na množinu

$$M = \{(a_n) \in l_2 : \ a_1 + a_2 + a_3 = 0\}.$$

Řešení. Hledáme posloupnosti $(b_n) \in l_2$, které mají s každou posloupností $(a_n) \in M$ nulový vnitřní součin. Tedy

$$(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0.$$

Uvažujme tyto prvky z M :

$$(1, -1, 0, \dots),$$
$$(0, 1, -1, 0, \dots),$$
$$(0, 0, 0, 1, 0, \dots),$$
$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots),$$

atd.

Má-li být (b_n) kolmé na tyto prvky z M, musí platit

$$b_1 = b_2, \ b_2 = b_3, \ b_4 = b_5 = \cdots = 0.$$

Naopak, každá posloupnost (b_n) splňující tyto podmínky má zřejmě vnitřní součin se všemy prvky M nulový. Hledané posloupnosti jsou proto přesně tyto:

$$(c, c, c, \dots),$$

kde c probíhá množinu reálných čísel.

Můžete si zkusit dokázat, že M je uzavřený podprostor.

To by neměl být žádný problém.

Konec cvičení 6.