BANACHOVY PROSTORY

ZÁKLADY

Z algebry znáte tzv. diskrétní struktury, jako grupy, lineární prostoty, apod.

V analýze se probíraly tzv. spojité struktury, kde byla definována konvergence nebo okolí bodů a mohla se definovat spojitost zobrazení (reálná přímka, komplexní rovina, obecněji euklidovské prostory, nebo ještě obecněji metrické prostory).

Souvislost těchto dvou přístupů byla vidět už v první kapitole o reálných číslech, kde se dokázalo, že sčítání, násobení a dělení reálných čísel jsou spojitá zobrazení. To mělo pozdější důsledky, např. možnost záměny pořadí limity a součtu (resp. součinu nebo podílu) posloupností nebo funkcí, záměny pořadí derivace a součtu, nebo integrálu a součtu.

U posledních dvou příkladů není uveden součin a podíl, lze uvést jen záměnu pořadí derivace a integrace s násobením konstantou. Jiné algebraické operace nejsou v analýze obecně vhodné.

Algebraické struktury, které mají za operace součet svých prvků a násobení prvku číslem, jsou lineární prostory.

Pokud je na těchto prostorech ještě definována např. metrika, dá se očekávat, že se dostane vhodná struktura pro analýzu. Metrika a lineární struktura ale musí být vhodně skloubeny.

Vzhledem k různé terminologii a definicím bude vhodné zopakovat z algebry některé pojmy.

Základním pojmem bude lineární prostor nad reálnými čísly. Většina dále uváděných tvrzení platí i pro lineární prostory nad komplexními čísly.

DEFINICE. Lineární prostor je neprázdná množina X, na které je definováno sčítání $x + y$ prvků X a násobení rx prvků $x \in X$ reálnými čísly r. Tyto operace splňují následující podmínky:

1. Operace sčítání je komutativní a asociativní, existuje nulový prvek $0 \in X$ a inverzní prvky $-x$ (tj. $x+0 = x$ a $x + (-x) = 0$ pro každé $x \in X$); ¨
2. Operace násobení reálnými čísly je distributivní v obou proměnných vzhledem ke sčítání a v první proměnné vzhledemexistence k násobení, platí $1x = x$ pro každé $x \in X$.

Je-li X lineární prostor, pak $Y \subset X$ se nazývá *lineární podprostor* X, jestliže s operacemi zúženými z X na Y tvoří Y lineární prostor (tj. součet prvků z Y a násobek prvku z Y reálným číslem opět náležejí do Y).

Nejmenší lineární podprostor v X množiny $A \subset X$ se nazývá *lineární obal* A.

Podmnožina A lineárního prostoru X se nazývá *symetrická*, jestliže $x \in A$ implikuje $-x \in A$.

Nazývá se *pohlcující*, jestliže pro každé $x \in X$ existuje $s > 0$ tak, že $rx \in A$ pro každé $r \in [0, s)$.

Množina A je *konvexní*, jestliže s dvěma svými body x, y obsahuje i úsečku mezi x, y, tj. množinu $\{rx + (+ - r)y; r \in [0, 1]\}$.

Zobrazení vhodná pro lineární prostory musí zachovávat obě operace (linearita):

DEFINICE. Zobrazení $f : X \to Y$ mezi lineárními prostory se nazývá lineární zobrazení, jestliže splňuje následující dvě podmínky:

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ pro všechna $x_1, x_2 \in X$;
2. $f(rx) = rf(x)$ pro všechna $r \in \mathbb{R}, x \in X$.

Lineární zobrazení $X \to \mathbb{R}$ se nazývá lineární funkcionál.

Dva lineární prostory se nazývají *isomorfní*, pokud mezi existuje prosté lineární zobrazení jednoho z nich na druhý (toto zobrazení se pak nazývá *isomorfismus*.

Některé další důležité operace s lineárními prostory:

Je-li X neprázdná množina, je množina $\mathbb{R}^X$ všech zobrazení $X \to \mathbb{R}$ lineární prostor při bodově definovaných operacích, tj. $(f+g)(a) = f(a) + g(a), (rf)(a) = rf(a)$.

Je-li X lineární prostor, pak podmnožina $X^{\#} \subset \mathbb{R}^X$ všech lineárních funkcionálů na X je lineární podprostor $\mathbb{R}^X$, který se nazývá it algebraický duál (nebo algebraicky duální prostor k) prostoru X.

Zobrazení e_X z X do druhého duálu $(X^{\#})^{\#}$ definované jako $e_X(x)(f) = f(x)$, pro $x \in X, f \in X^{\#}$ je prosté lineární zobrazení.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

NORMOVANÉ PROSTORY

Jak bylo naznačeno v úvodu, „spojité" lineární prostory jsou lineární prostory spolu s nějakou spojitou strukturou (např. metrikou) takovou, že obě algebraické operace jsou spojité, V metrických prostorech existuje i jiný přístup, který je speciálnější a přináší vhodnější teorii.

Na přímce a v rovině (i v libovolném euklidovském prostoru) je obvyklá metrika invariantní vůči posunutí, tj. $d(x+a, y+a) = d(x,y)$. Žádná další významná souvislost mezi sčítáním a metrikou není.

Vezme-li se $a = -y$, dostane se $d(x-y, 0) = d(x,y)$.

Naopak, jsou-li dány vzdálenosti od 0, lze je rozšířit stejnou rovností na vzdálenosti mezi libovolnými prvky, a tyto vzdálenosti jsou invariantní vůči posunutí.

Stačí tedy definovat vzdálenosti k 0 s vlastnostmi, které po výše uvedeném rozšíření na vzdálenosti mezi libovolnými body dávají metriku:

DEFINICE. Lineární prostor X se nazývá normovaný prostor, jestliže je na X dána reálná funkce p s vlastnostmi (pro libovolná $r \in \mathbb{R}, x, y \in X$)

1. $p(x+y) \le p(x) + p(y)$;
2. $p(rx) = |r| p(x)$;
3. $p(x) \ne 0$ pro $x \ne 0$;

Norma prvku x se většinou značí $||x||$.

Snadno se ukáže, že $p(0) = 0, p(x) \ge 0$ (ukažte to).

Nyní je nutné uvést souvislost se spojitostí algebraických operací, uvedenou v úvodu.

VĚTA. V normovaném prostoru X jsou operace sčítání $+ : X \times X \to X$ a násobení číslem $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ spojité.

Opak neplatí. V *Příkladech* je uveden metrický lineární prostor se spojitými operacemi, který není normovaný.

Zajímavá je souvislost normy s jednotkovou koulí $B_1 = \{x \in X; ||x|| \le 1\}$. Ta totiž určuje jednoznačně normu.

VĚTA. Nechť B je uzavřená, konvexní, pohlcující a symetrická množina v lineárním prostoru X, která neobsahuje žádnou přímku $\{rx_0; r \in \mathbb{R}\}$ pro $x_0 \ne 0$. Pak existuje jediná norma na X, která má za jednotkovou kouli množinu B.

Uvědomte si, že jednotková koule v normovaném prostoru má uvedené vlastnosti množiny B.

Spojitá lineární zobrazení jsou velice specifická.

Nejdříve však jedno označení.

DEFINICE. Nechť f je lineární zobrazení normovaného prostoru X do normovaného prostoru Y. Pak se definuje

$$||f|| = \inf\{r > 0; ||f(x)|| \leq r||x|| \text{ pro každé } x \in X\} = \sup\{\frac{||f(x)||}{||x||}; x \neq 0\} = \sup\{\frac{||f(x)||}{||x||}; ||x|| = 1\}.$$

Je-li číslo $||f||$ konečné, nazývá se norma zobrazení f.

VĚTA. Následující podmínky jsou pro lineární zobrazení $f : X \to Y$ normovaných prostorů X, Y ekvivalentní:

1. f je spojité;
2. f je spojité v jednom bodě;
3. $||f||$ je konečné číslo.

V kapitole o metrických prostorech byla uvedena Tietzova věta o rozšíření spojitých reálných funkcí z uzavřeného podprostoru Y metrického prostoru X na celý prostor X se zachováním suprema a infima funkce.

V případě, že X je normovaný prostor, Y lineární podprostor a f je lineární, je možné požadovat, aby rozšíření bylo také lineární (navíc se zachováním normy)?

VĚTA. (**Hahnova-Banachova věta**) Nechť Y je lineární podprostor normovaného prostoru X a f je spojitý lineární funkcionál na Y. Pak existuje spojitý lineární funkcionál F na X, který je rozšířením f a takový, že $||F|| = ||f||$.

Hahnova-Banachova věta má hodně důležitých důsledků, např.

DŮSLEDEK. Nechť L je uzavřený lineární podprostor normovaného prostoru X a $a \in X \setminus Y$. Pak existuje spojitý lineární funkcionál s normou 1 na X, který se anuluje na L a jeho hodnota v a se rovná vzdálenosti a od L.

Speciálně pro $Y = \{0\}$ je $f(a) = ||a||$.

Každý netriviální normovaný prostor tedy má nenulové spojité lineární funkcionály a množina těchto funkcí rozlišuje body prostoru.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 2

BANACHOVY PROSTORY

Tak jako tvoří úplné prostory důležitou třídu metrických prostorů, tak tvoří úplné normované prostory snad ještě důležitější třídu normovaných (i obecněji, topologických lineárních) prostorů. Tak důležitou, že tyto prostory dostaly jméno po význačném polském matematikovi S.Banachovi, který je ve 20.-30.letech 20.století nejvíce prozkoumal.

DEFINICE. Úplný normovaný prostor se nazývá Banachův prostor.

Metrické neúplné prostory lze zúplnit.

tázkou je, zda lze zúplnit normovaný neúplný prostor na Banachův prostor a zda lze při tomto procesu použít metrické zúplnění nebo je nutné zkonstruovat nové.

Platí první případ.

VĚTA. Úplný obal normovaného prostoru (chápaného jako metrický prostor) je Banachův prostor.

Spojením úplnosti a linearity se dostane velmi silný pojem. V Banachových prostorech platí mnoho důležitých tvrzení, která bez úplnosti nebo bez linearity neplatí. Uvedeme tři takové důležité věty.

Spojité zobrazení obecně nezachovává otevřené nebo uzavřené množiny.

Třída těch zobrazení, která zachovávají otevřené množiny bývá důležitá (třeba proto, že pokud je takové zobrazení prosté, má spojitou inverzi).

Jsou to např. projekce z kartézského součinu metrických prostorů na souřadnicové prostory nebo podsoučiny, setkali jste se s regulárními zobrazeními a v tomto semestru i s holomorfními funkcemi.

Protože zachovávání otevřených množin může mít více významů, nejdříve přesná definice:

DEFINICE. Zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory se nazývá otevřené, jestliže pro každou otevřenou množinu G v X je $f(G)$ otevřená množina v $f(X)$.

Následující tvrzení neplatí bez předpokladu úplnosti:

VĚTA. (**Věta o otevřeném zobrazení**) Spojité lineární zobrazení Banachova prostoru na Banachův prostor je otevřené.

Věta o otevřeném zobrazení má zajímavé důsledky:

DŮSLEDEK.

1. Každé spojité lineární zobrazení mezi Banachovými prostory, které je prosté a na, je homeomorfismus.

2. Dva Banachovy prostory se srovnatelnými topologiemi jsou totožné.

Úplnost obou prostorů ve větě o otevřením zobrazení je nutná.

Platí také následující tvrzení, které lze do jisté míry chápat jako částečné obrácení věty o otevřeném zobrazení.

VĚTA. Nechť $f : X \to Y$ je spojité lineární a otevřené zobrazení Banachova prostoru na normovaný prostor. Pak Y je Banachův prostor.

Jestliže se předchozí věta dá dohromady s větou o otevřeném zobrazení, získá se následující důsledek:

DŮSLEDEK. Nechť f je spojité lineární zobrazení Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y. Pak nastane právě jedna z následujících možností:

1. $f(X)$ je Banachův prostor;

2. $f(X)$ je 1.kategorie v sobě.

První případ nastane, je-li f otevřené, druhý pokud f není otevřené zobrazení.

Spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory má vždy uzavřený graf v $X \times Y$.

Zobrazení s uzavřeným grafem však nemusí být spojité ani v případě, že X, Y jsou normované prostory a f je lineární (viz *Otázky*.

VĚTA. (**Věta o uzavřeném grafu**) Nechť $f : X \to Y$ je lineární zobrazení mezi Banachovými prostory, které má uzavřený graf. Pak je f spojité.

Poslední tvrzení v této části se bude týkat vztahu bodové a stejnoměrné omezenosti funkcionálů na Banachově prostoru.

VĚTA. (Věta o stejnoměrné omezenosti) Nechť $f_n : X \to Y$ je posloupnost spojitých lineárních zobrazení z Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y, která je bodově omezená (tj. $\{f_n(x)\}_n$ je omezená pro každé $x \in X$). Pak je i posloupnost norem $\{||f_n||\}$ omezená.

DŮSLEDEK. Nechť $f_n : X \to Y$ je posloupnost spojitých lineárních zobrazení z Banachova prostoru X do normovaného prostoru Y.

1. Jestliže pro každé $x \in X$ existuje $\lim f_n(x)$, označte ji $f(x)$, je zobrazení f spojité a lineární.
2. Je-li Y Banachův a pro každé $x \in X$ je posloupnost $\{f_n(x)\}$ cauchyovská, pak f_n konverguje bodově ke spojité lineární funkci $X \to Y$.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

DUÁLNÍ PROSTORY

Pro každé spojité lineární zobrazení f mezi normovanými prostory $X \to Y$ byla zavedena norma $||f||$ a snadno se ukáže, že lineární prostor $B(X,Y)$ všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y (jako podprostor Y^X) spolu s $||f||$ je normovaný (viz též *Příklady*).

V další části se však omezíme jen na případ $Y = \mathbb{R}$, tj. na lineární podprostor algebraického duálu $X^{\#}$.

DEFINICE. Pro normovaný prostor X se normovaný prostor $B(X,\mathbb{R})$ značí X' a nazývá duální prostor prostoru X.

Uvědomte si, že důsledkem Hahnovy-Banachovy věty je $X' \neq 0$ pro $X \neq 0$.

Následující tvrzení plyne přímo z obecnějšího tvrzení pro úplný obor hodnot (viz *Příklady*).

VĚTA. Duální prostor je úplný.

V první části této kapitoly byl lineární prostor vnořen do svého druhého algebraického duálu pomocí zobrazení e_X definovaného rovností $(e_X(x))(f) = f(x)$.

Otázkou je, zda pro normovaný prostor X je každé $e_X(x)$ spojité na X', tj. zda leží v druhém duálu $(X')'$.

Pro jednoduchost se značí druhý duál $(X')'$ jako X''.

VĚTA. Je-li X normovaný prostor, je e_X prosté spojité lineární zobrazení, které zachovává normu (tj. $||e_X(x)|| = ||x||$).

Zobrazení e_X se nazývá *přirozené vložení* X do X''.

V další části bude často X ztotožňován se svým obrazem $e_X(X)$ v X'' a tedy chápán jako podprostor X''.

Případy, kdy e_X je zobrazení na celý prostor X'' jsou velmi důležité (pak X je isomorfní X'').

Protože duální prostory jsou vždy úplné, může tato situace nastat jen pro Banachovy prostory X:

DEFINICE. Banachův prostor X se nazývá reflexivní, jestliže přirozené vložení $e_X : X \to X''$ je zobrazení na.

Reflexivita znamená, že pro každý spojitý lineární funkcionál F na X' existuje $x \in X$ tak, že $F(f) = f(x)$ pro každé $f \in X'$.

Nyní bude uvedeno několik vět z mnoha tvrzení o duálních a reflexivních prostorech, které pomáhají při zjišťování reflexivity.

VĚTA. Jestliže X není separabilní, není ani X' separabilní.

VĚTA. Banachův prostor X je reflexivní právě když X' je reflexivní.

VĚTA. Je-li X je reflexivní, je i každý jeho uzavřený lineární podprostor reflexivní.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4 4

HILBERTOVY PROSTORY

V euklidovských prostorech je ze všech uvedených norem nejpřirozenější norma v $l_2(n)$, která odpovídá běžně užívané geometrické vzdálenosti.

Tato norma $||\{x_i\}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ je vlastně odmocnina ze skalárního součinu vektoru x se sebou.

Podobně lze nahlížet na normu v l_2 a v L_2 (viz dále).

Skalární součin umožňuje definovat i kolmost vektorů, což byla důležitá vlastnost souboru funkcí $\sin(kx), \cos(kx)$ v kapitole o Fourierových řadách.

Tato kapitola bude věnována obecnému pohledu na prostory se skalárním součinem a na obecné Fourierovy řady.

DEFINICE. Komutativní bilineární funkce $(x, y) : X \times X \to \mathbb{R}$ se nazývá vnitřní součin na X, jestliže pro každé $x \neq 0$ je$(x, x) > 0$.

Vnitřní součin určuje normu způsobem naznačeným v úvodu této části:

VĚTA. Funkce $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ je norma na X.

Prostor s vnitřním součinem bude chápan jako normovaný prostor s právě definovanou normou. Pokud se řekne o normovaném prostoru, že má vnitřní součin, znamená to, že jeho norma je určena tímto součinem.

Podobně jako tomu je u normovaných prostorů, jsou úplné prostory s vnitřním součinem velmi důležité a mají svůj název.

DEFINICE. Úplný prostor s vnitřním součinem se nazývá Hilbertův prostor.

Zřejmě je každý Hilbertův prostor Banachovým prostorem. Vnitřní součin, který má Hilbertův prostor navíc, je velmi silná podmínka (např. implikuje, že každý Hilbertův prostor je reflexivní – viz dále).

Z vnitřního součinu plyne (stejně jako u skalárního součinu vektorů) pojem kolmosti prvků:

DEFINICE. Nechť X je prostor s vnitřním součinem. Dva prvky $x, y \in X$ se nazývají kolmé (nebo ortogonální), jestliže $(x, y) = 0$.

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá ortogonální, jestliže každé dva její prvky jsou na sebe kolmé. Ortogonální množina se nazývá ortonormální, jestliže má každý její prvek normu rovnou 1.

Dvě podmnožiny A, B prostoru X se nazývají navzájem ortogonální, jestliže každý prvek z A je kolmý na každý prvek z B.

Snadno se dokáží následující tvrzení:

POZOROVÁNÍ. Nechť X je prostor s vnitřním součinem.

1. V X existuje maximální ortonormální množina.
2. Je-li X separabilní, je každá ortogonální podmnožina nejvýše spočetná.
3. Je-li a kolmý na množinu $B \subset X$, je kolmý i na uzavřený lineární obal množiny B.
4. Množina všech prvků X kolmých na danou množinu $B \subset X$, je uzavřený lineární podprostor v X.

Následující tvrzení je jednoduché a odpovídá geometrické představě, že vzdálenost bodu od roviny je vzdálenost bodu od paty kolmice z bodu na rovinu. Důkaz je také pomocí Pythagorovy věty (viz *Otázky*).

LEMMA. Nechť $A = \{u_1, ..., u_n\}$ je ortonormální množina v X a pro $x \in X$ se označí $x_A = \sum_i (x, u_i)u_i$. Pak $||x||^2 \geq ||x_A||^2 = \sum_i (x, u_i)^2$ a funkce $||x - y||$ proměnné $y \in A$ nabývá minima právě v bodě x_A. Toto minimum je vzdálenost x od lineárního obalu množiny A.

Předchozí tvrzení lze zobecnit na nekonečné množiny A. Je možné celou následující teorii vyložit pro obecné Hilbertovy množiny, ale výklad bude podán jen pro separabilní prostory, protože pak jsou ortonormální množiny nejvýše spočetné a sčítají se tedy nejvýše spočetné řady: součet nekonečné řady prvků v normovaném prostoru je, jako v $\mathbb{R}$, limita posloupnosti částečných součtů.

Nerovnost $||x||^2 \geq \sum_n (x, u_n)^2$ v následujícím tvrzení se nazývá Bessellova nerovnost.

LEMMA. Nechť $A = \{u_n\}_{\mathbb{N}}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru X a pro $x \in X$ se označí $x_A = \sum_n (x, u_n)u_n$. Pak $||x||^2 \geq ||x_A||^2 = \sum_n (x, u_n)^2$ a funkce $||x - y||$ proměnné $y \in A$ nabývá minima právě v bodě x_A. Toto minimum je vzdálenost x od lineárního obalu množiny A.

Předchozí lemma je základním tvrzením pro důkaz následujícího důležitého tvrzení o Fourierových řadách.

VĚTA. Nechť X je separabilní Hilbertův prostor a $A = \{u_n\}_{\mathbb{N}}$ je ortonormální množina v X. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. Pro každé $x \in X$ je $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)u_n$.
2. Pro každé $x \in X$ je $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)^2$.
3. Neexistuje nenulový prvek z X kolmý na A.
4. Lineární obal množiny A je hustý v X.

Z důkazu bude vidět, že pro ortonormální posloupnost $\{u_n\}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)u_n$ v Hilbertově prostoru vždy konverguje. Nazývá se Fourierova řada bodu x.

Rovnost v podmínce 2 se nazývá Parsevalova rovnost.

Ortonormální množina, pro kterou platí podmínka 3, se nazývá úplná.

Předchozí tvrzení říká, že Fourierova řada libovolného prvku $x \in X$ konverguje k x právě když je množina A úplná. Není-li A úplná, neplatí Parsevalova rovnost, ale vždy platí Bessellova nerovnost.

Má každý Hilbertův prostor úplnou ortonormální množinu?

VĚTA. Nechť X je Hilbertův prostor. Pak platí:

1. X má úplnou ortonormální množinu.
2. Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, má spočetnou úplnou ortonormální množinu.
3. Je-li X separabilní a nekonečně dimensionální, je isometricky isomorfní s l_2.

Poslední vlastnost říká, že i prostor L_2 je isometricky isomorfní prostoru l_2. Vlastně libovolné dva separabilní nekonečně dimensionální Hilbertovy prostory jsou isometricky isomorfní.

Jedním z důsledků předchozího isomorfismu mezi X a l_2 je fakt, že duální prostor X' je isomorfní s X a spojité lineární funkcionály jsou dané vnitřním součinem:

VĚTA. Pro spojitý lineární funkcionál f na separabilním Hilbertově prostoru existuje $u_f \in X$ tak, že $f(x) = (x, u_f)$. Naopak, každý funkcionál uvedeného tvaru je spojitý a lineární. Navíc platí $||f|| = ||u_f||$, takže zobrazení $f \to u_f$ je isometrický isomorfismus X na X'.

DŮSLEDEK. Hilbertovy prostory jsou reflexivní.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5 5 6