Daniel Čech, BI48

Matematická analýza - zápočtové příklady

```
> with(plots):
> with(plottools):
```

řešené příklady jsou povětšinou ze sbírky Vybrané úlohy z matematické analýzy pana doc. Zajíčka

Konvergence číselných řad

```
>
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

```
> limit (log((n+1)/n)*arcsin(1/n),n=infinity);
```

$$0$$

```
>
```

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\arcsin\left(\frac{1}{n+1}\right)} - 1\right)$$

```
> limit(n*(log((n+1)/n)*arcsin(1/n)/(log((n+2)/(n+1))*arcsin(1/(n+1)))-1),n = infinity);
```

$$2$$

2>1, proto řada konverguje

```
>
>
> limit ((-1)^n*sin(n)^2/n,n=infinity);
```

$$0$$

to je splněno, takze žada konverguje

```
>
```

ověření nutné podmínky konvergence:

```
> limit (ln(ln(n))^(-ln(n)),n=infinity);
```

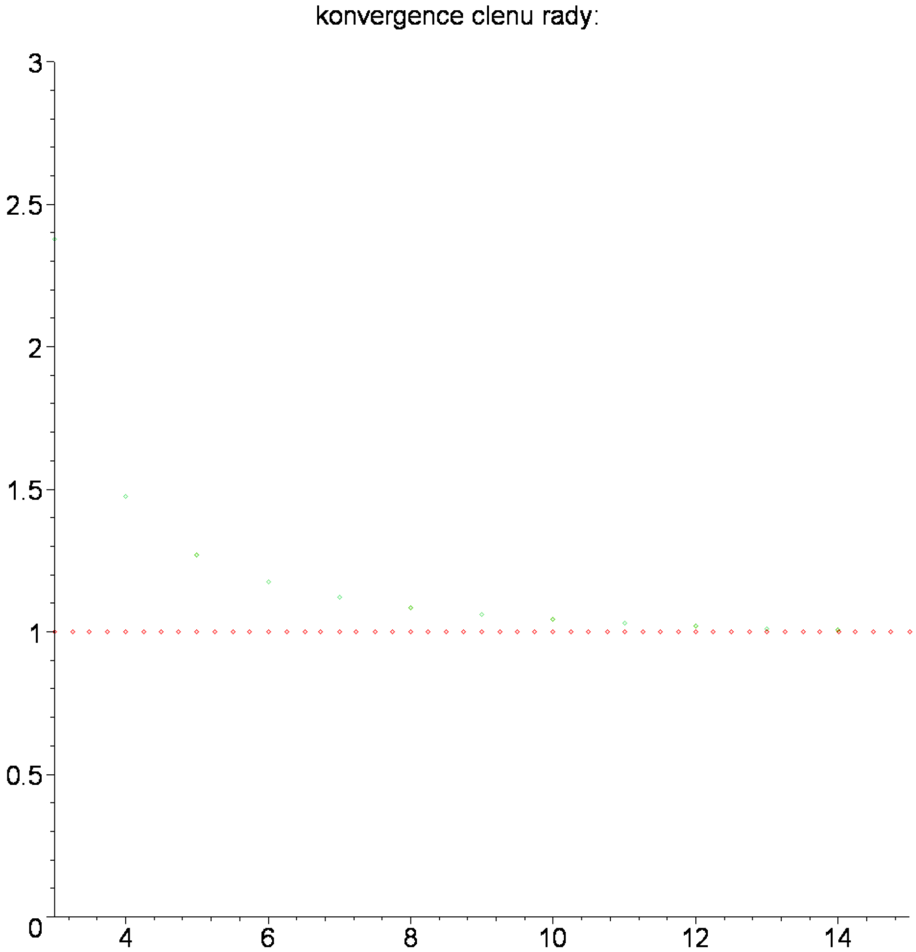
$$0$$

Zkusím Cauchyovo odmocninové kritérium:

$$\mathrm{surd}(n, \ln(\ln(n))^{(-\ln(n))}) = \ln(\ln(n))^{\left(-\frac{\ln(n)}{n}\right)}$$

```
> f := proc (n)
    ln(ln(n))^(-ln(n)/n);
  end:

> X := [seq(i, i=3..15)]:
> Y := map(f, X):
> XY := zip((x,y) -> [x,y], X, Y):
> plot({XY,1}, 3..15, 0..3, style=point,title=`konvergence clenu rady:`);
```




```
> limit(f(n),n=infinity);
```

$$1$$

```
>
```

Posloupnosti funkcí

35/398

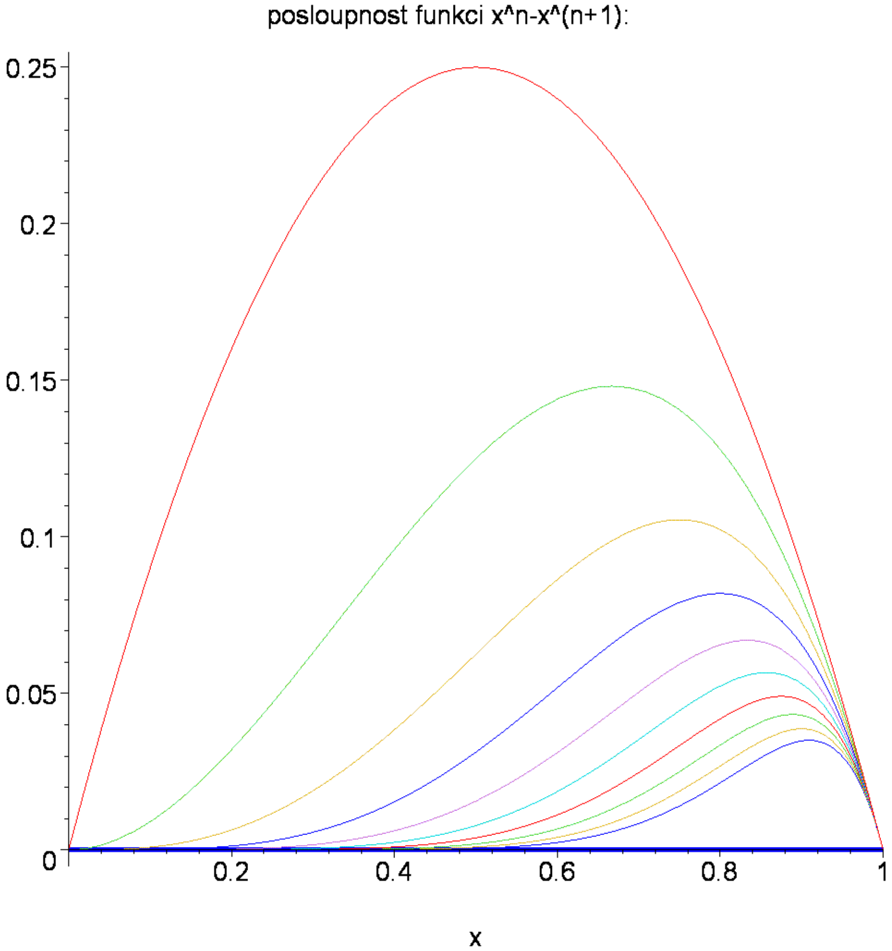
```
>
```

na intervalu (0,1)

```
> posl1:=plot({seq(x^n-x^(n+1),n=1..10)},x=0..1):
>
```

limitni funkce f(x)= $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$

```
> f1:=plot({limit(x^n-x^(n+1),n=infinity)},x=0..1,color=blue,thickness=5):
> display(posl1,f1,title=`posloupnost funkci x^n-x^(n+1):`);
```

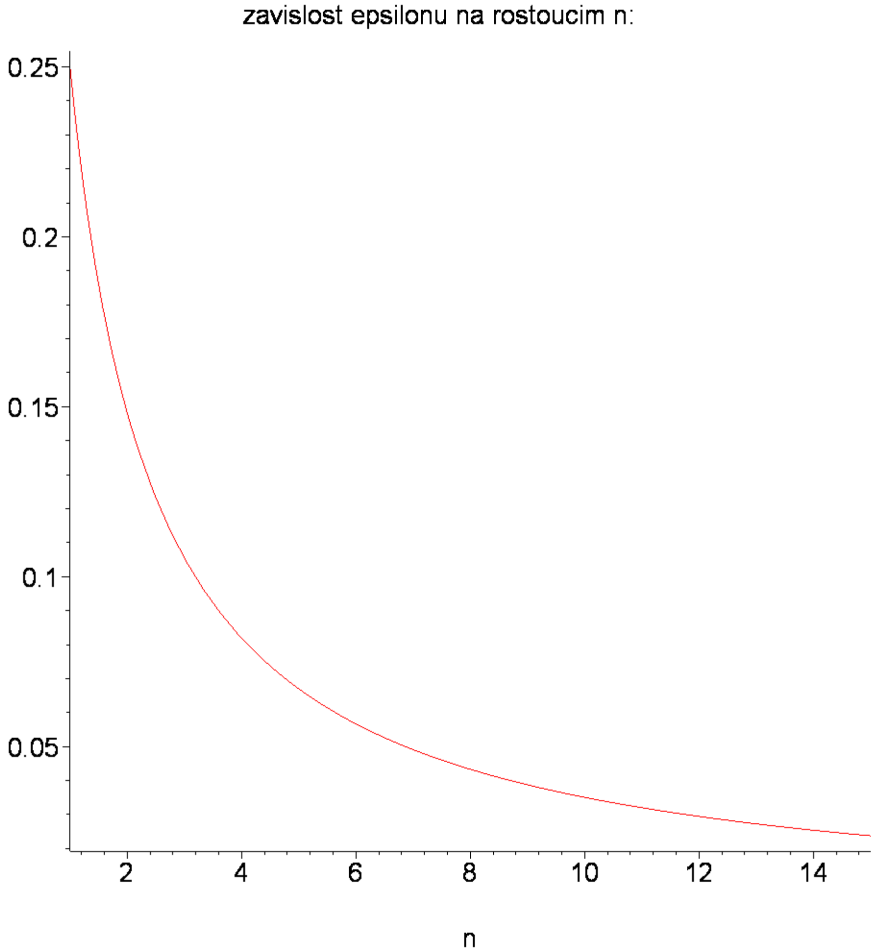


maximum n-té funkce na intervalu <0,1>

```
> solve(diff(x^n-x^(n+1),x)=0,x);
```

$$\frac{n}{n+1}$$

```
> plot((n/(n+1))^n-(n/(n+1))^(n+1),n=1..15,title=`zavislost epsilonu na rostoucim n:`);
```



maximum posloupnosti zřetelně konverguje k nule, ověřím limitu pro σ_n

```
> limit((n/(n+1))^n-(n/(n+1))^(n+1),n=infinity);
```

$$0$$

posloupnost funkcí proto stejnoměrně konverguje na <0,1>

```
>
> limit(sin(n*x)/n,n=infinity);
```

$$0$$

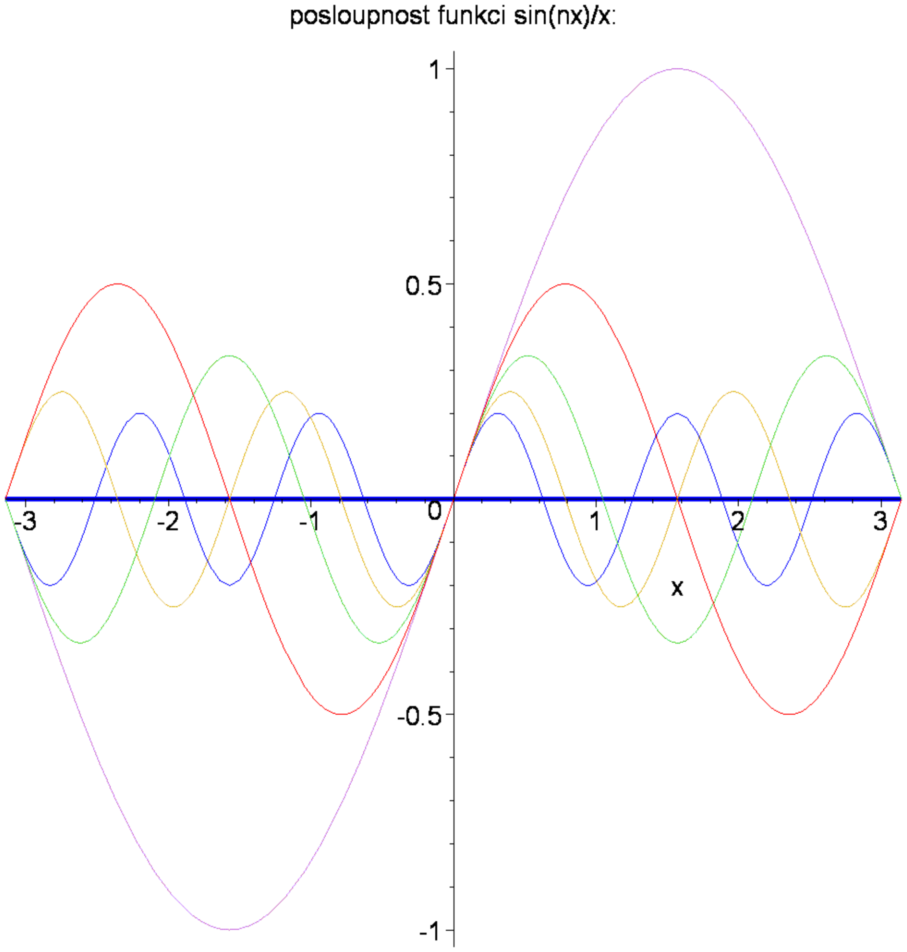
```
> bod:=solve(diff(sin(n*x)/n,x)=0,x);
```

$$bod := \frac{\pi}{2\,n}$$

```
> f2:=seq(sin(n*x)/n,n=1..5):
> h1:=plot({f2},x=-Pi..Pi):
> sigma1:=limit(sin(n*bod)/n,n=infinity);
```

$$\sigma 1 := 0$$

```
> h2:=plot(sigma1,x=-Pi..Pi,thickness=5,color=blue):
  display(h1,h2,title=`posloupnost funkci sin(nx)/x:`);
```



$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0$

posloupnost funkcí stejnoměrně konverguje k nule

Řady funkcí

Luděk Zajíček: Vybrané úlohy z matematické analýzy 35/411

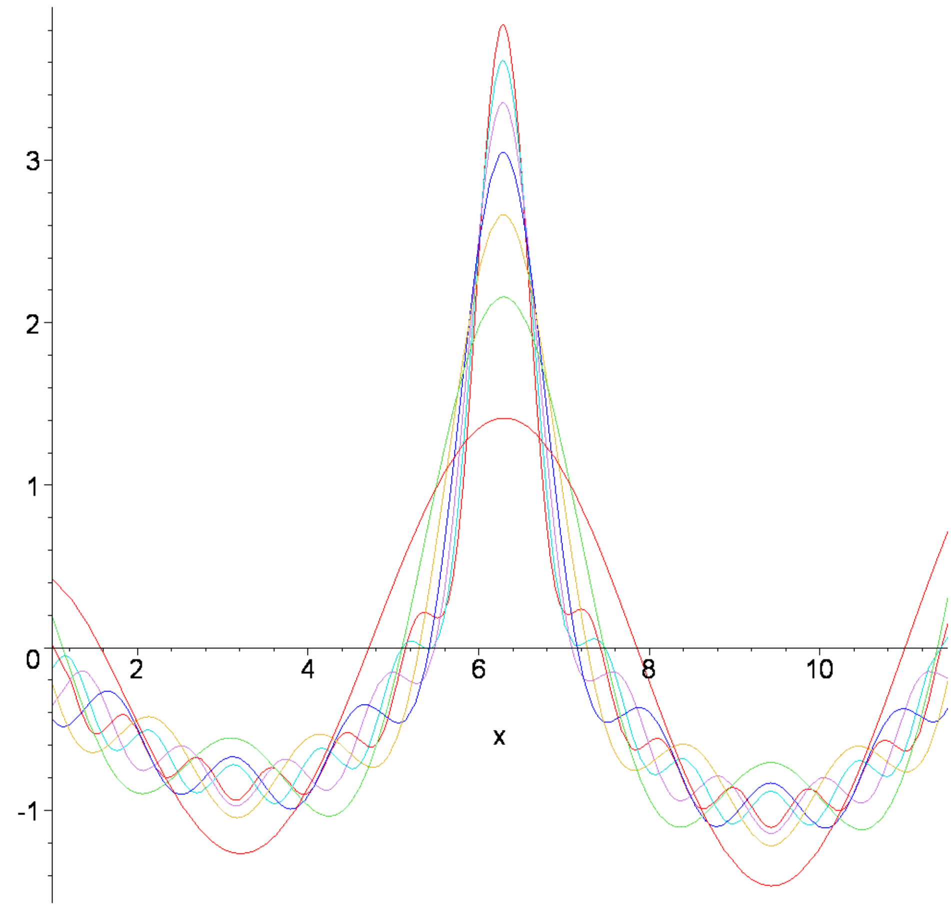
```
>
> limit(cos(n*x)*arctan(n*x)/n,n=infinity);
```

$$0$$

splněna nutná podmínka konvergence

```
> fn:=proc(n)
  cos(n*x)*arctan(n*x)/n;
  end:
  plot({seq(sum(fn(n),
  n=1..v),v=1..7)},x=1..11.5,title=`konvergence castecnych
  souctu:`);
```

konvergence castecnych souctu:




```
> solve(fn(n+1)/fn(n)<1);
Warning, solutions may have been lost
```

řada funkcí bodově konverguje podle d'Alembertova kritéria na celém intervalu

ověření Bolzano-Cauchyovy podmínky pro stejnoměrnou konvergenci:

```
> solve(sum(fn(n), n=n0..n0+p)=epsilon);
```

$$\{ n = n, n0 = n0, p = p, x = x, \varepsilon = \sum_{n = n0}^{n0+p} \frac{\cos(n\,x)\arctan(n\,x)}{n} \}$$

řada nekonverguje stejnoměrně

```
>
> prvni:=diff(sum(sin(n*x)/(n^3),n = 1 .. infinity),x);
```

$$prvni := \frac{-1}{2} I\,(\mathrm{polylog}(2, \mathbf{e}^{(x\,I)})\,I + \mathrm{polylog}(2, \mathbf{e}^{(-I\,x)})\,I)$$

protože ale cosinus je spojitý na R a $\frac{1}{n^3}$ je konstatní - spojitá vzhledem k x pro všechny n přirozené; funkce má spojitou první derivaci na R

```
> diff(prvni,x);
```

$$\frac{-1}{2} I \left(\ln(1-\mathbf{e}^{(x I)}) - \ln(1-\mathbf{e}^{(-I x)})\right)$$

ze stejných důvodů je i druhá derivace spojitá na R

```
>
> limit(sum(x^2/(1+n^2*x^2), n=1..infinity),x=infinity);
```

$$\frac{\pi^2}{6}$$

```
> sum(1/n^2, n=1..infinity);
```

$$\frac{\pi^2}{6}$$

skutečně to platí...

```
>
> limit(sum((-1)^(n-1)*x^x/((1+x^n)*n),n = 1 .. infinity),x =
  1);
```

$$\frac{1}{2} \ln(2)$$

rovnost je splněna...

Mocninné řady

```
>
```

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

```
> sum(x^n/n!,n = 0 .. infinity);
```

$$\mathbf{e}^x$$

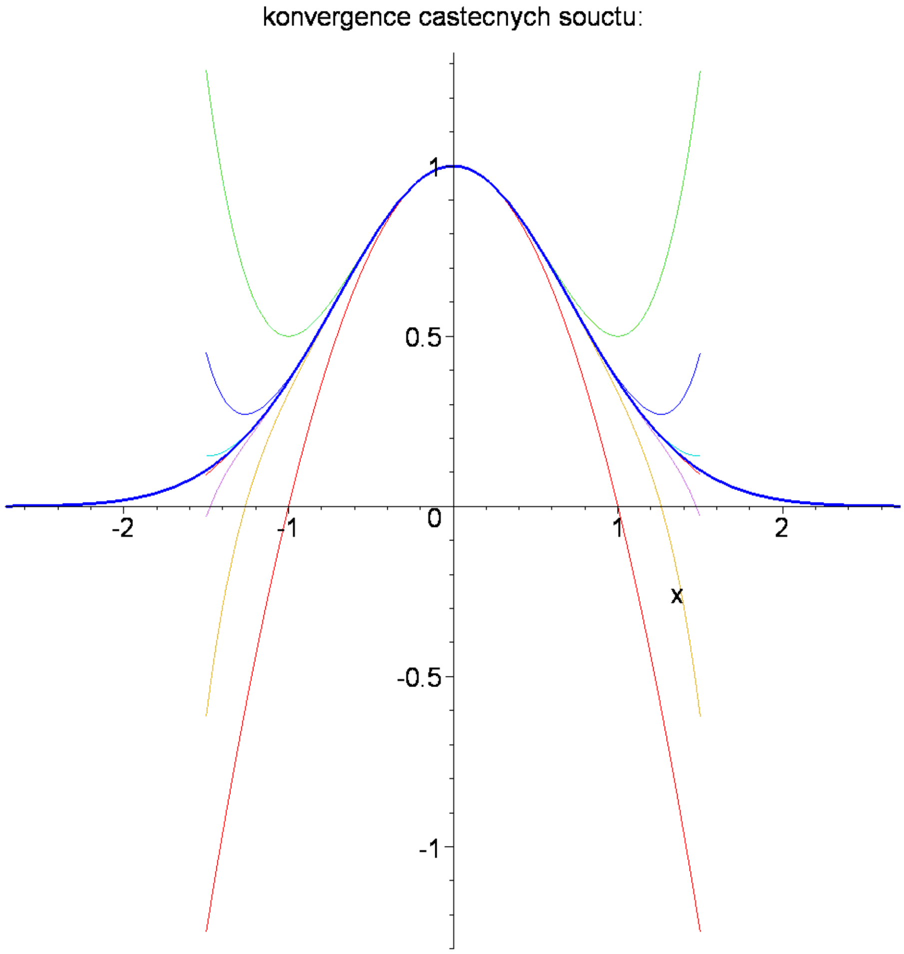
```
> sum((-x^2)^n/n!,n=0..infinity);
```

$$\frac{1}{\mathbf{e}^{(x^2)}}$$

$$\mathbf{e}^{(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$$

```
> limfunc:=plot(exp(-x^2),x=-exp(1)..exp(1),thickness=3,color=b
  lue):
> poslf:=plot({seq(sum((-x^2)^n/n!,
  n=0..v),v=1..7)},x=-1.5..1.5,title=`konvergence castecnych
  souctu:`):
```

```
> display(limfunc,poslf);
```



26/312

určete poloměr konvergence mocninné řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (n!)^2 x^n}{(2n+1)!}$$

```
> an:=n->(-2)^n*n!^2*x^n/(2*n+1)!;
```

$$an := n \rightarrow \frac{(-2)^n (n!)^2 x^n}{(2n+1)!}$$

d'Alembertovo podílové kritérium pro ověření poloměru konvergence:

```
> limit(an(n+1)/an(n),n=infinity);
```

$$-\frac{x}{2}$$

```
> solve(1/2*x=1,x);
```

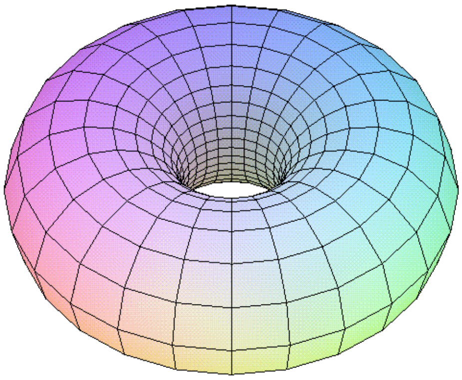
$$2$$

poloměr konvergence je 2

Vícerozměrný integrál

objem prstence s vnitřnim průměrem 1 a poloměrem řezu 1

```
> plot3d([1,x,y],x=0..2*Pi,y=0..2*Pi,coords=toroidal(10),scaling=constrained);
```



obsah řezu (kruhu) je:

```
> my:=Pi*1;
```

$$my := \pi$$

podle Pappovy věty je potom objem prstence roven: (při vzdálenosti těžiště 2 od osy)

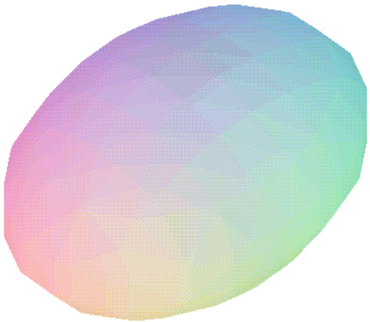
```
> obj:=2*Pi*2*my;
```

$$obj := 4\,\pi^2$$

vypočtěte objem elipsoidu zadaného implicitně rovnicí $x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2 \le 1$:

```
> implicitplot3d(x^2+2*y^2+3*z^2=1,x=-1..1,y=-1..1,z=-1..1,title=`elipsoid:`,style=PATCHNOGRID);
```

elipsoid:



stanovení integračních mezi pro Fubiniovu větu:

$|x| \leq \sqrt{1-2y^2-3z^2}$

$|y| \leq \sqrt{\frac{1-3z^2}{2}}$

$|z| \leq \sqrt{\frac{1}{3}}$

daly by se sice uplatnit nějaké speciální souřadné systémy (eliptické souřadnice), ale Maple by si s tím měl poradit...

$$\int_{-\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \int_{-\sqrt{\frac{1-3z^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{1-3z^2}{2}}} \int_{-\sqrt{1-2y^2-3z^2}}^{\sqrt{1-2y^2-3z^2}} 1 \, dx \, dy \, dz$$

```
> int(int(int(1, x=-sqrt(1-2*y^2-3*z^2)..sqrt(1-2*y^2-3*z^2)),
  y=-sqrt((1-3*z^2)/2)..sqrt((1-3*z^2)/2)),
  z=-sqrt(1/3)..sqrt(1/3));
```

$$\frac{2\sqrt{2}\,\pi\sqrt{3}}{9}$$

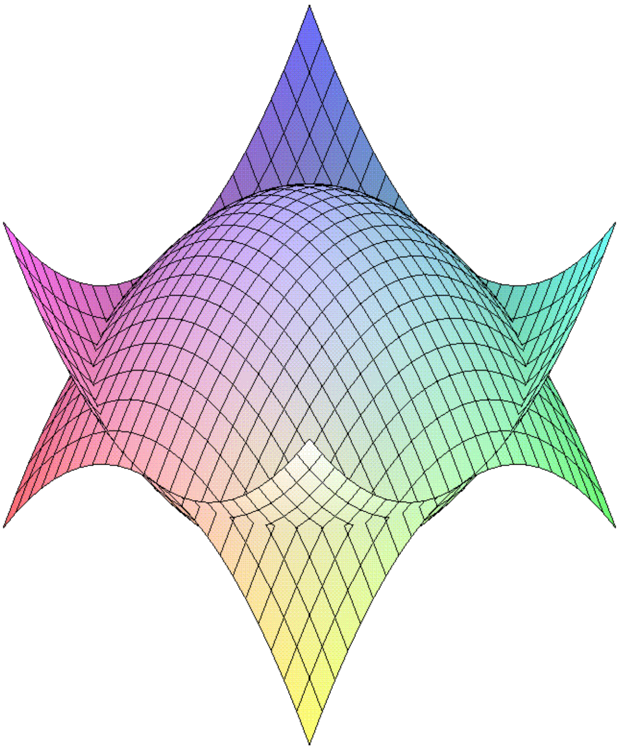
```
>
> int(6*Pi*2*sqrt(1-x^2), x=0..1);
```

$$3\pi^2$$

což je hledaný objem...

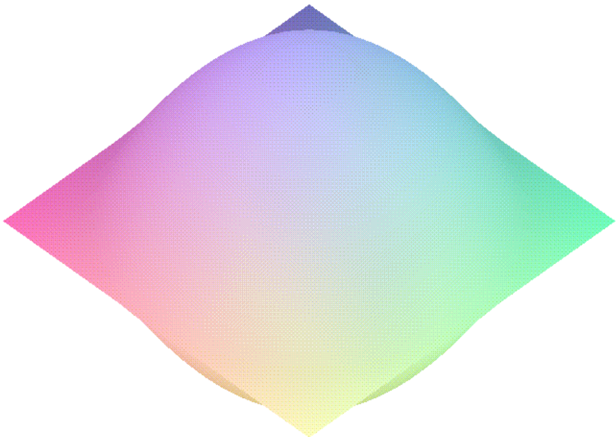
```
>
> f:=(x,y)->min(1,x^2+y^2)-1:
> g:=(x,y)->max(-1,-x^2-y^2)+1:
> plot3d({x^2+y^2-1,-x^2-y^2+1},x=-1..1,y=-1..1,title=`objem
  mezi parabolami:`);
```

objem mezi parabolami:



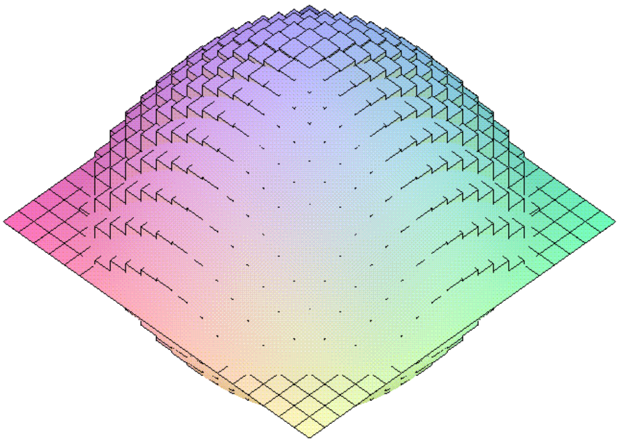
```
> grf3:=plot3d({g(x,y),f(x,y)},x=-1..1,y=-1..1,style=PATCHNOGRI
  D):
> display(grf3,title=`teleso:`,scaling=constrained);
```

teleso:



```
> k:=10:
> rez:=m->display(seq(cuboid([m/k,n/k,g((m+1)/k,(n+1)/k)],[(m
  +1)/k,(n +1)/k,f((m+ 1)/k,(n +1)/k)]), n=-(k)..(k-1))):
> REZ:=seq(rez(m), m=-(k)..(k-1)):
> REZANI:=display(grf3,REZ):
> display(REZANI,title=`aproximace krychlickami:`);
```

aproximace krychlickami:



přiložený soubor **animace.mws** obsahuje animaci řezů tohoto tělesa s volitelným zjemněním.

>

použiji polární souřadnice x=r.cos Φ ; y=r. sin Φ

>

```
> int(int(int(1, r=-sqrt(1-sqrt(1-z))..sqrt(1-sqrt(1-z))),
  Phi=0..2*Pi), z=0..1);
```

$$\int_0^1 4\sqrt{1-\sqrt{1-z}}\,\pi\,dz$$

integrál je příliš složitý, zkusím tedy využít toho že řezy tělesa jsou kruhy

```
> obj:=2*Pi*int(sqrt(z),z=0..1);
```

$$obj := \frac{4\,\pi}{3}$$

což je hledaný objem...

>

Funkce komplexní proměnné

>

$f := (x, y) \to (x^2 + 2\,I\,x\,y - y^2)\sqrt{x^2+y^2}$

$refunc := (x, y) \to (x^2 - y^2)\sqrt{x^2+y^2}$

$imfunc := (x, y) \to 2\, I\, x\, y \sqrt{x^2 + y^2}$

```
> refunc:=(x,y)->(x^2-y^2)*sqrt(x^2+y^2):
> imfunc:=(x,y)->2*I*x*y*sqrt(x^2+y^2):
> r1:=diff(refunc(x,y), x);
```

$$r1 := 2\, x \sqrt{y^2 + x^2} + \frac{(x^2 - y^2)\, x}{\sqrt{y^2 + x^2}}$$

```
> im1:=diff(imfunc(x,y),y);
```

$$im1 := 2\, I\, x \sqrt{y^2 + x^2} + \frac{2\, I\, x\, y^2}{\sqrt{y^2 + x^2}}$$

```
> re2:=diff(refunc(x,y),y);
```

$$re2 := -2\, y \sqrt{y^2 + x^2} + \frac{(x^2 - y^2)\, y}{\sqrt{y^2 + x^2}}$$

```
> im2:=diff(imfunc(x,y),x);
```

$$im2 := 2\, I\, y \sqrt{y^2 + x^2} + \frac{2\, I\, x^2\, y}{\sqrt{y^2 + x^2}}$$

```
> solve({r1=im1,r2=-im2});
```

$\{r2 = \text{-}2\, I\, y^2, x = 0, y = y\}, \{r2 = 2\, I\, y^2, x = 0, y = y\}, \{$

$r2 = \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{2} I\right) y^2\, \mathrm{RootOf}(13\, \_Z^2 - 2 - 10\, I, index = 1),$

$x = \mathrm{RootOf}(13\, \_Z^2 + 11 - 10\, I, label = \_L7)\, y, y = y\}, \{$

$r2 = \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{2} I\right) y^2\, \mathrm{RootOf}(13\, \_Z^2 - 2 - 10\, I, index = 2),$

$x = \mathrm{RootOf}(13\, \_Z^2 + 11 - 10\, I, label = \_L7)\, y, y = y\}$

což je výsledek...

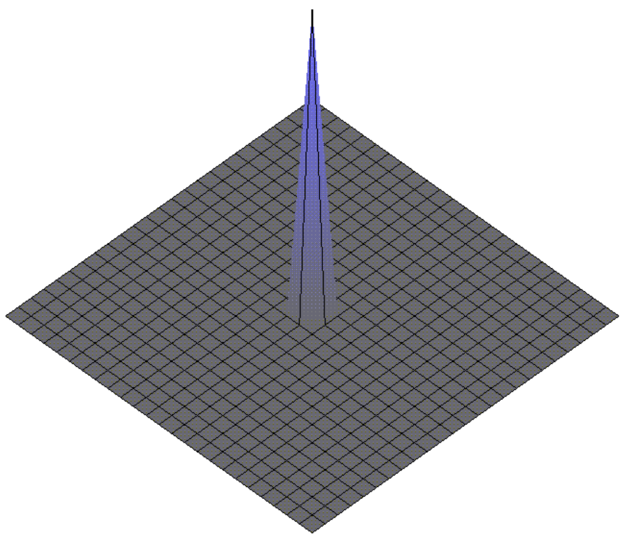
Křivkový integrál

vypočtěte křivkový integrál k funkci f(z)=$\frac{1}{|z|}$ pro různé křivky ψ

$|z|$ se rovná r v goniometrické reprezentaci - takže se jedná o reálnou funkci komplexní proměnné

```
> plot3d(1/sqrt(x^2+y^2),x=-1..1,y=-1..1,title=`realna cast 
  funkce 1/abs(z)`);
```

realna cast funkce 1/abs(z)



imaginární část funkce je identicky rovna nule na C, proto funkce není holomorfní a neexistuje tedy primitivní funkce

pro neuzavrené křivky neprochazející nulou je integral roven reálnému číslu: $(\frac{\Psi(b)^2}{2})-(\frac{\Psi(a)^2}{2})$

>

je kružnice o středu [1,0] a poloměru 1/2

nejdřív zjistím, kde má funkce póly:

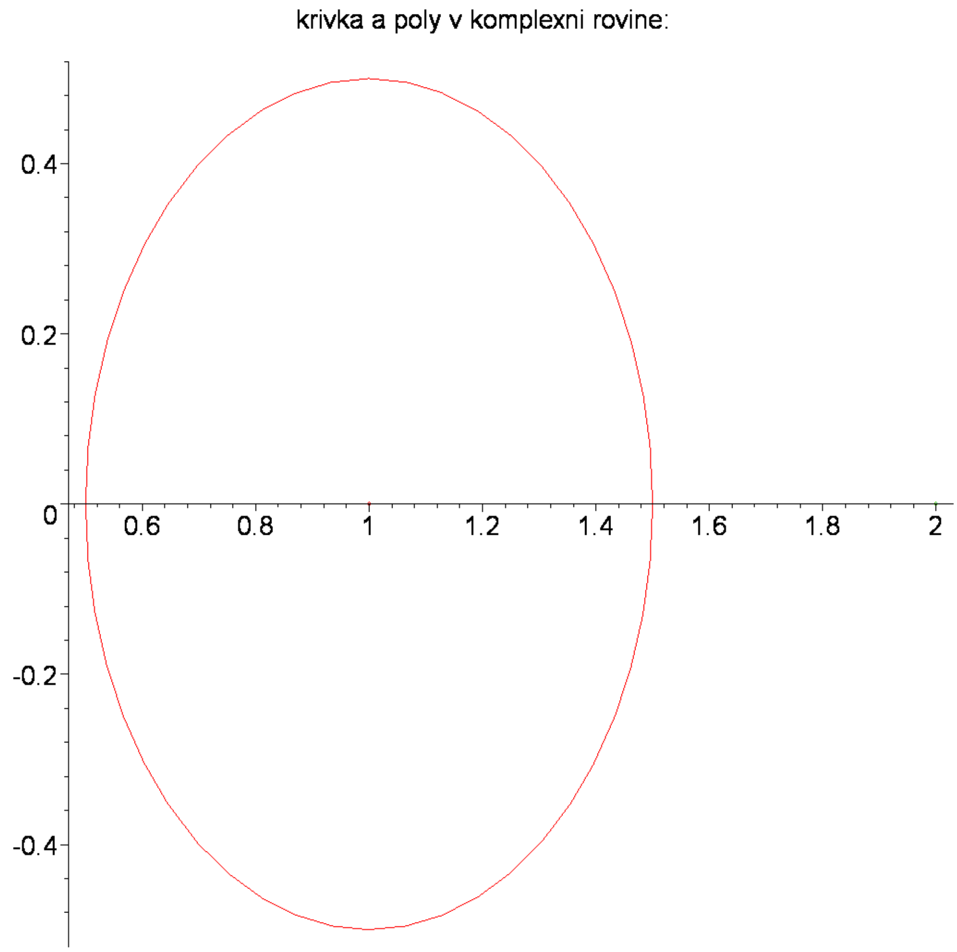
```
> solve(z^2-3*z+2=0);
```

$$2, 1$$

jinde se funkce jeví jako holomorfní

```
> psi:=plot([cos(x)/2+1,sin(x)/2,x=0..2*Pi],title=`krivka a
  poly v komplexni rovine:`):
  body:=plot({[1,0,x=0..1],[2,0,x=0..1]},thickness=4,style=poin
  t):
```

```
> display(psi,body);
```



z obrázku je patrné, že bod [1,0] má index ke křivce Ψ 1, zatímco [2,0] má 0.

```
>
> ### WARNING: persistent store makes one-argument readlib obsolete
  readlib(residue):
> 2*Pi*I*residue((z^2+3*i)*e^iz/(z^2-3*z+2),z=1);
```

$$2\,I\,\pi\,(-e^{iz}-3\,e^{iz}\,i)$$

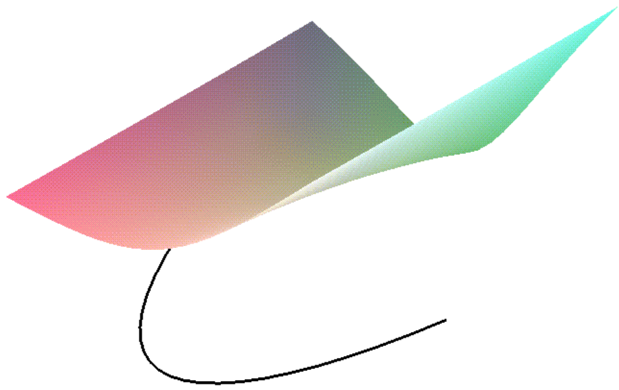
což je výsledek...

```
>
```

Křivka tvoří kruhový oblouk o poloměru 2 v rozmezí úhlů -Π/4 až Π/4

```
> krivka:=plot3d([2*cos(t),2*sin(t),0],t=-Pi/4..Pi/4,r=0..2,color=blue,thickness=3):
>
> grf:=plot3d(y+3*log(sqrt(x^2+y^2)),x=1..2,y=-2..2,title=`real na cast a krivka psi:`,style=PATCHNOGRID):
> display(krivka,grf);
```

realna cast a krivka psi:



integrál reálné časti je potom roven:

```
> prim1:=int(2*sin(t)+3*log(sqrt((2*cos(t))^2+(2*sin(t))^2)),t)
  ;
```

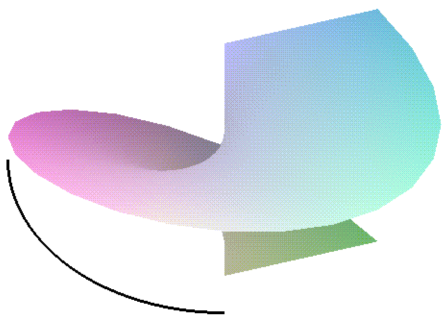
$$prim1 := -2\cos(t) - 3\,I\ln(2)\ln(\mathbf{e}^{(t\,I)})$$

```
> pr1:=-2*cos(Pi/4)+3*Pi/4*ln(2*(cos(Pi/4)^2+sin(Pi/4)^2)^(1/2)
  )-2*cos(-Pi/4)-3*Pi/4*ln(2*(cos(-Pi/4)^2+sin(-Pi/4)^2)^(1/2))
  ;
```

$$pr1 := -2\sqrt{2}$$

```
> grf1:=plot3d(2*x+arcsin(y/sqrt(x^2+y^2)),x=1..2,y=-2..2,title
  =`realna cast a krivka psi:`):
> grf2:=plot3d([r*cos(f),r*sin(f),f+r*cos(f)],r=0..2,f=-Pi..Pi,
  style=PATCHNOGRID,title=`imaginarni cast a krivka psi:`):
> display(grf2,krivka);
```

imaginarni cast a krivka psi:



integrál imaginární části se zpočítá jako:

```
> prim2:=int(4*sin(t)+arctan(sin(t)/cos(t)),t);
```

$$prim2 := -4\cos(t) + t\arctan\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right) - \frac{t^2}{2}$$

```
> pr2:=-4*cos(Pi/4)+Pi/4*arctan(sin(Pi/4)/cos(Pi/4))-1/2*(Pi/4)
  ^2-4*cos(-Pi/4)-Pi/4*arctan(sin(-Pi/4)/cos(-Pi/4))-1/2*(Pi/4)
  ^2;
```

$$pr2 := -4\sqrt{2} + \frac{\pi^2}{16}$$

celkově potom platí:

$\int_{\Psi}^{?} 2\,iz + 3\log(z)\,dz$ = -2*2^(1/2) +i(-4*2^(1/2)+1/16*Pi^2)

spočtěte křivkový integrál a situaci načrtněte:

$\int_{\Psi}^{?} e^{(z^2)}\,dz$, kde Ψ je úsečka z -1-i do 1+i

funkce je holomorfní na C

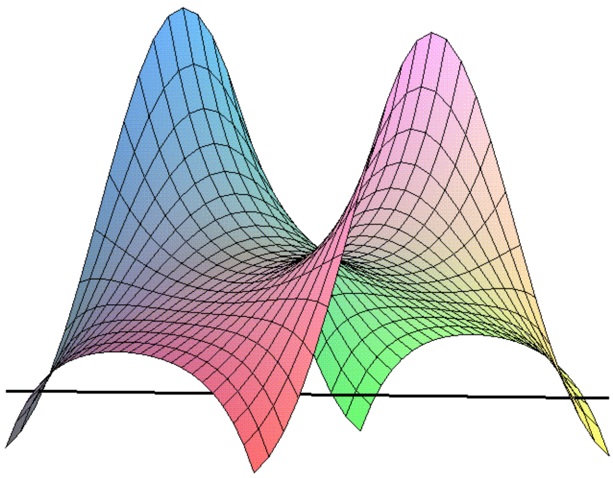
primitivní funkce k $e^{(z^2)}$

```
> int(exp(z^2),z);
```

$$\frac{-1}{2} I \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(z I)$$

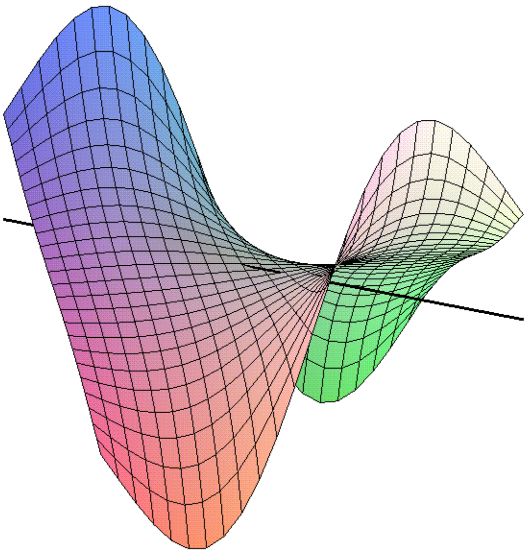
```
> krivka:=plot3d([-1+t,-1+t,0],t=0..2,r=0..2,color=blue,thickne
  ss=3):
> repart:=plot3d(exp(x^2-y^2)*cos(2*x*y),x=-1..1,y=-1..1,title=
  `realna cast a krivka:`):
> impart:=plot3d(exp(x^2-y^2)*sin(2*x*y),x=-1..1,y=-1..1,title=
  `imaginarni cast a krivka:`):
> display(repart,krivka);
```

realna cast a krivka:



```
> display(impart,krivka);
```

imaginarni cast a krivka:



```
> -1/2*I*Pi^(1/2)*erf(I*(1+I)) - 1/2*I*Pi^(1/2)*erf(I*(-1-I));
```

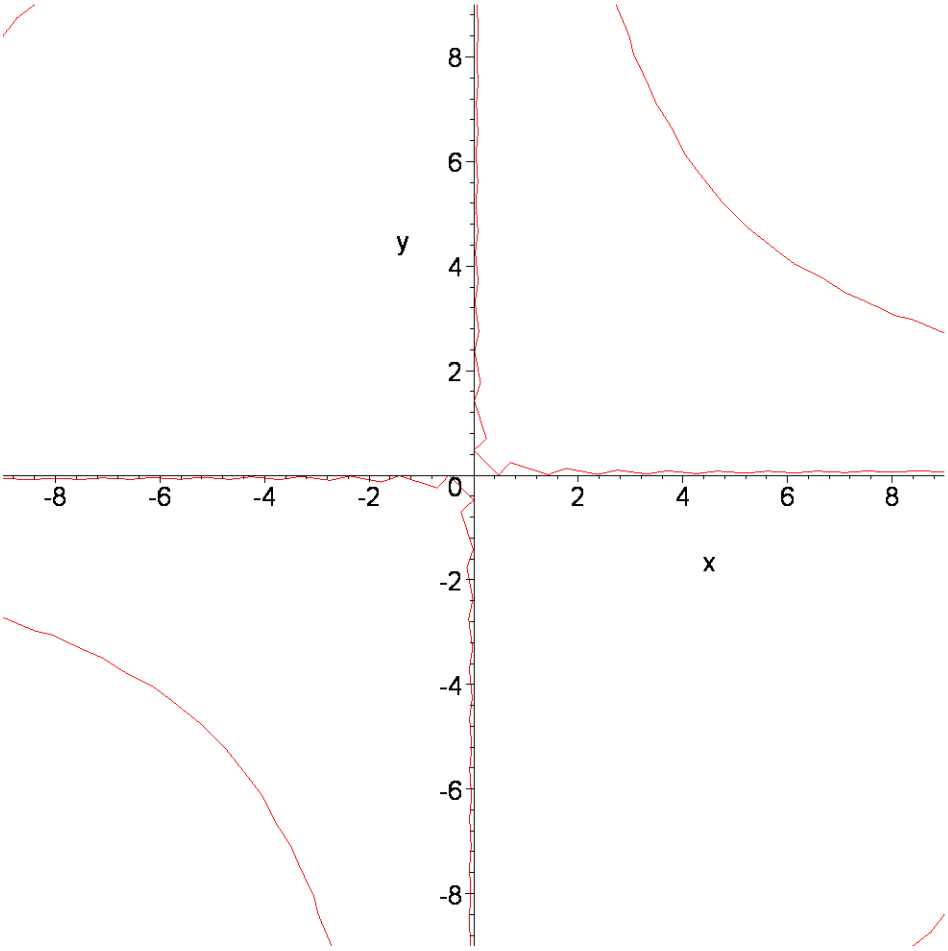
$$0$$

integrál je roven nule v důsledku sudosti / lichosti cosinu / sinu

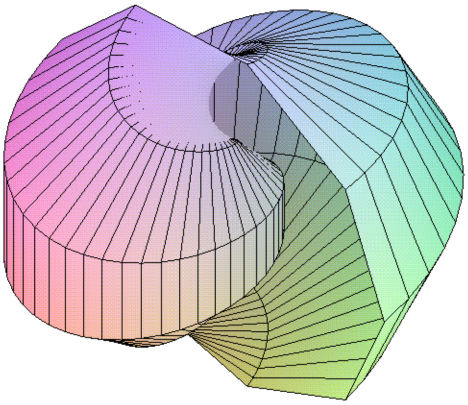
```
>
```

Nezařazeno

```
>
> l:=seq(implicitplot(sin(n/50*Pi*x*y)+cos(n/50*Pi*x*y)=1,x=-9..9,y=-9..9,grid=[20,20]),n=1..100):
> display(l,insequence=true);
```

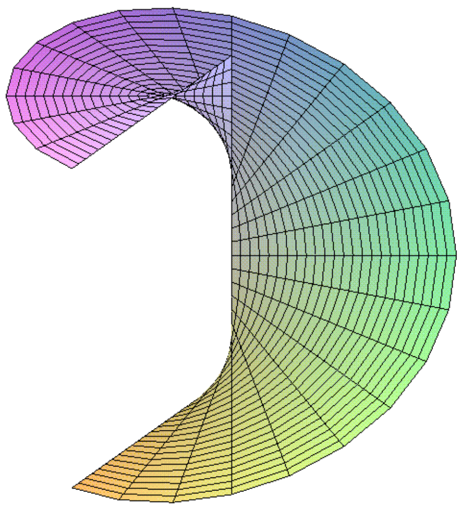



```
> tubeplot([sin(t),cos(t),0,t=0..2*Pi,radius=2*t]);
```



```
> animate3d([r*cos(t+n),r*sin(t+n),t],t=0..2*Pi,r=0..2,n=0..2*P
  i,title=`Im(Log(z))`);
```

Im(Log(z))



>

>

>