Asteroida

Asteroida je rovinná křivka, kterou získáme jako speciální případ hypocykloidy. Kotálíme-li kružnici s poloměrem r po kružnici

s poloměrem R $(r < R)$ tak, že menší kružnice leží ve vnitřní oblasti větší (leží-li vně, dostáváme epycykloidu), potom jeden pevný bod

kotálející se kružnice opisuje právě hypocykloidu.

Její rovnici snadno odvodíme, přičteme-li ke středu menší kružnice vektor v velikosti r správného směru.

{ spuštění .... EDIT - WORKSHEET - EXECUTE)

```
>
> restart;
> with(plots):
> with(plottools):
>
```

Střed menší kružnice má souřadnice $S = [(R-r)\cos(t), (R-r)\sin(t)]$.

Vektor v má souřadnice $v = \{r\cos\left(t - \frac{tR}{r}\right), r\sin\left(t - \frac{tR}{r}\right)\}$.

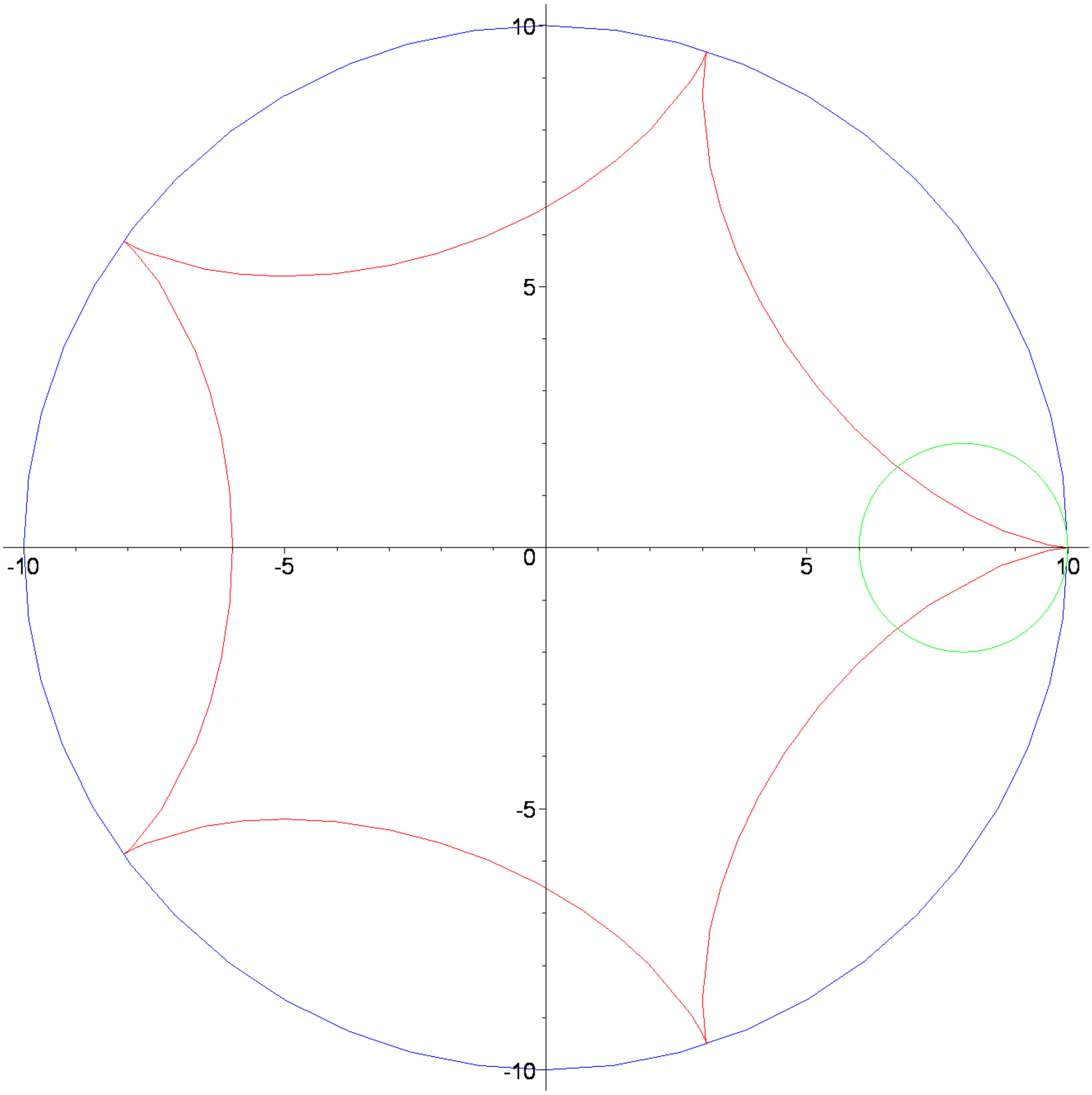
Parametrizace hypocykloidy je potom: .

$$h(t) = \left[(R-r)\cos(t) + r\cos\left(t - \frac{tR}{r}\right), (R-r)\sin(t) + r\sin\left(t - \frac{tR}{r}\right)\right]$$

Hypocykloida, pro konkrétní hodnoty r a R vypadá např. takto:

```
>
>
> R:=10:
> r:=2:
> inn:=0..2*Pi:
>
> A:=plot([(R-r)*cos(t)+r*cos(t-t*R/r),(R-r)*sin(t)+r*sin(t-t*R/r)
  ,t=inn]):
> B:=plot([R*cos(t),R*sin(t),t=inn],color=blue):
> C:=animate([(R-r)*cos(tt)+r*cos(t),(R-r)*sin(tt)+r*sin(t),t=inn]
  ,tt=inn,frames=50,color=green):
> U:=animate([(R-r)*cos(t)+tt*((R-r)*cos(t)-(R-r)*cos(t)+r*cos(t-t
  *R/r)),(R-r)*sin(t)+tt*((R-r)*sin(t)-(R-r)*sin(t)+r*sin(t-t*R/r)
  ),tt=0..1],t=inn,frames=50,color=black):
```

```
> display({A,B,C,U});
>
```



Modře je znázorněna větší kružnice ($R = 10$), zeleně menší ($r = 2$) a červěně výsledná hypocykloida vznikající z kocového bodu černě vyznačeného poloměru menší kružnice.

Animaci lze spustit kliknutím na obrázek a poté na horní liště kliknutím na ikonku PLAY

Při speciálním poměru poloměrů $R = 4\,r$ dostáváme již zmiňovanou asteroidu.

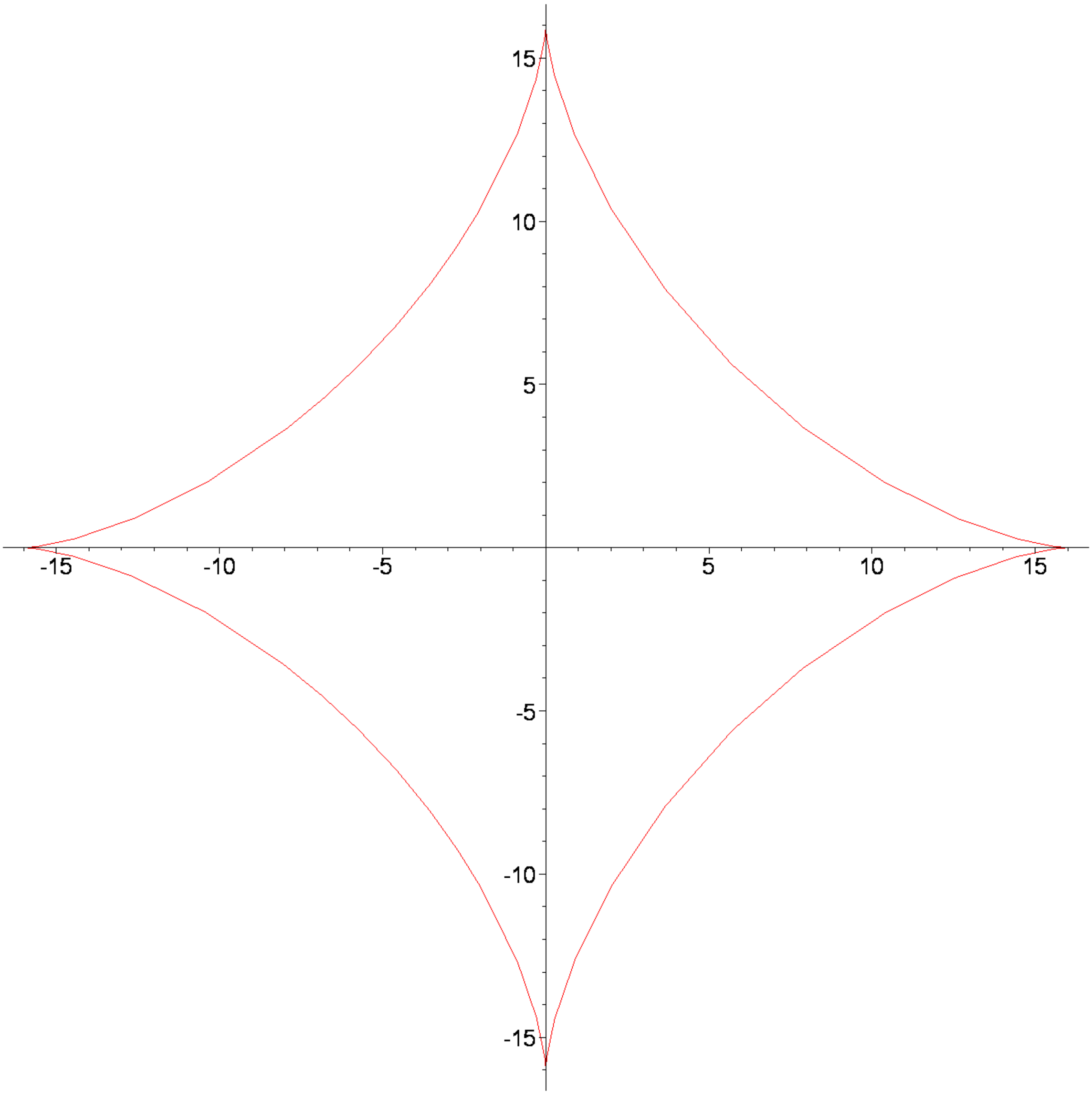
Dosazaním do rovnice pro hypocykloidu získáme její parametrizaci:

$\mathrm{a}(t) = [4\,r\cos^3 t, 4\,r\sin^3 t]$.

Snadno přejdeme k obecné rovnici $\left(\frac{x}{4\,r}\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)} + \left(\frac{y}{4\,r}\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)} = 1$, kterou můžeme upravit na tvat $x^{\left(\frac{2}{3}\right)} + y^{\left(\frac{2}{3}\right)} = a^{\left(\frac{2}{3}\right)}$.

Astroidu si nakreslíme:

```
> r:=4:
> R:=4*r:
> plot([(R-r)*cos(t)+r*cos(t-t*R/r),(R-r)*sin(t)+r*sin(t-t*R/r),t=
  inn]);
```



U této rovnice ještě zůstaneme a vytvoříme si následující animaci. Přidáním jednoho parametru a absolutní hodnoty dostaneme jednoparametrickou

soustavu $|x|^q + |y|^q = a^q$

Se změnou parametru q se bue měnit i výsledná křivka. Speciálně bude $q = 0$ .... úseky os *x* a *y*

$q = 1$ .... čtverec

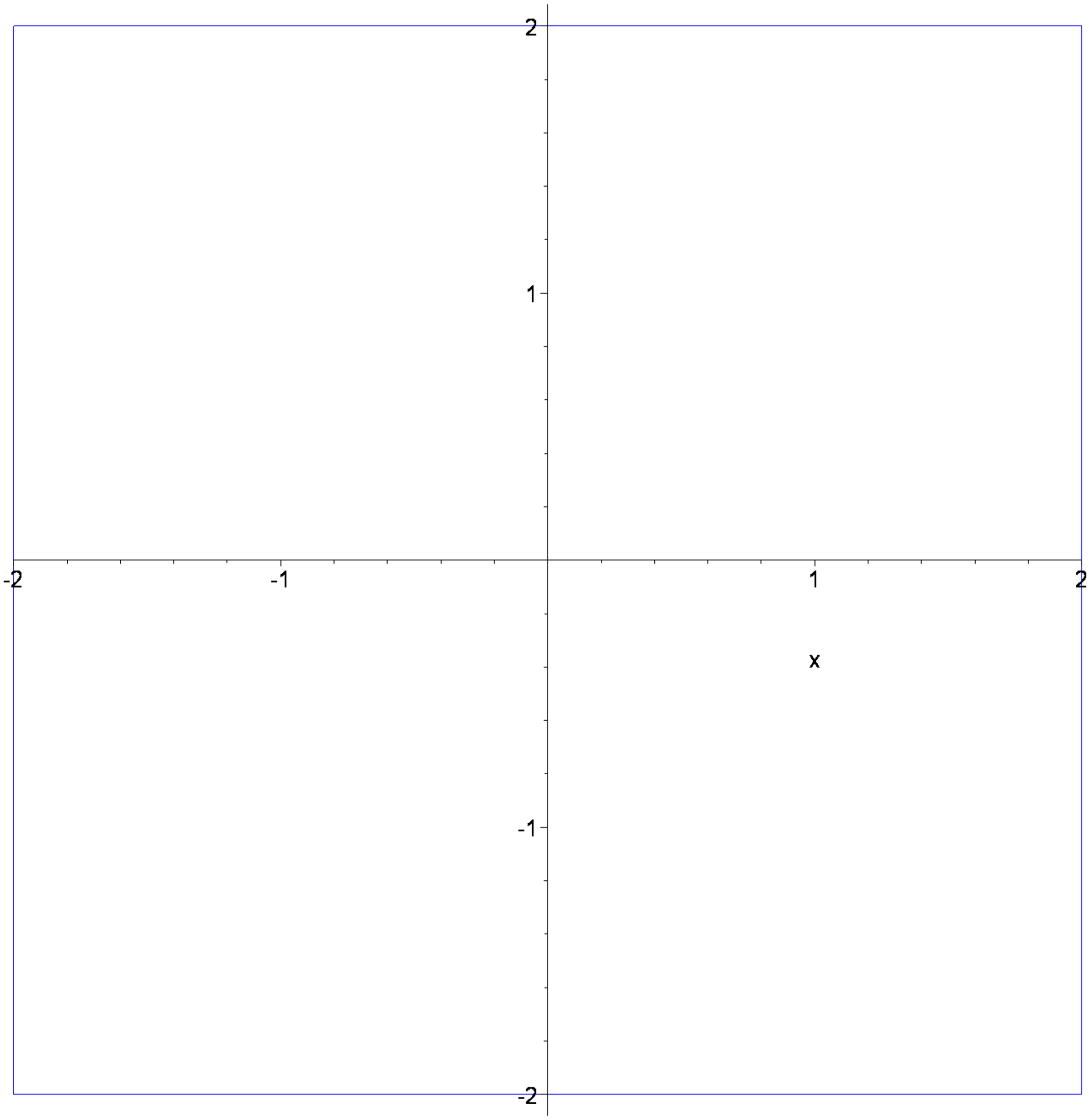
$q = \frac{2}{3}$........ astroida

q=2 .... kružnice

$q = \infty$ ......

čtverec

```
> f:=x -> exp(exp(q)-1)-1:
> minq:=0:
> maxq:=1:
> fr:=50:
> rang:=minq..maxq:
>
> a:=2:
>
> krivka1:=animate(abs((a^f(q)-abs(x^f(q))))^(1/f(q)),x=-a..a,q=ra
  ng,frames=fr,color=black):
>
> krivka2:=animate(-abs((a^f(q)-abs(x^f(q))))^(1/f(q)),x=-a..a,q=r
  ang,frames=fr,color=black):
>
> C1:=plot(a,x=-a..a,color=blue):
> C2:=plot(-a,x=-a..a,color=blue):
> C3:=plot([a,y,y=-a..a],color=blue):
> C4:=plot([-a,y,y=-a..a],color=blue):
>
> ctverec:=display(C1,C2,C3,C4):
>
> display(krivka1,krivka2,ctverec,scaling=constrained);
```



>

>

Animaci lze spustit kliknutím na obrázek a poté na ikonku PLAY na horní liště

Animace zachycuje změnu parametru q v intervalu $\langle 0, 4.5 \rangle$ a to nelineárně. . Kdyby q rostlo nadevšechny meze, křivka by přešla ve čtverec, který je v animaci znázorněn modře.