Kisoida

Kisoida je rovinná křivka, kterou odvodíme pomocí kružnice se středem v počátku a s poloměrem r.

Kružnice má parametrizaci: $\mathrm{p}(t) := [r\cos(t), r\sin(t)]$

Spočteme tečný vektor: $\frac{\partial}{\partial t}p = (-r\sin(t), r\cos(t))$

Hledanou křivku si označíme $\mathrm{k}(t)$ a budeme ji hledat jako křivku, jejíž body leží na tečnách ke kružnici a zároveň tak, aby byla kolmá na systém tečen kružnice.

Musí tedy platit $\mathrm{k}(t) = \mathrm{p}(t) + \mathrm{l}(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}p\right)$.

Budme nyní hledat vyjádření funkce $\mathrm{l}(t)$ tak, aby tečný vektor křivky $\mathrm{k}(t)$ byl kolmý na tečný vektor kružnice. Nejprve spočteme tečný vektor křivky $\mathrm{k}(t)$.

{ spuštění .... EDIT - WORKSHEET - EXECUTE }

```
> restart:
> with(plots):
> k(t):= p(t)+l(t)*Diff(p(t),t):
> Diff(k,t)=diff(k(t),t);
>
```

$$\frac{\partial}{\partial t}k = \left(\frac{d}{dt}\mathrm{p}(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}\mathrm{l}(t)\right)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{p}(t)\right) + \mathrm{l}(t)\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\mathrm{p}(t)\right)\right)$$

```
>
```

Aby jsme dosáhli kolmosti, tak tuto rovnici vynásobíme skalárně $\frac{\partial}{\partial t}p$ a položíme rovno nule, tedy

```
> 0=(1+Diff(l,t))*Diff(p,t)*Diff(p,t)+l(t)*Diff(p,t,t)*Diff(p,t);
```

$$0 = \left(1 + \left(\frac{\partial}{\partial t}l\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}p\right)^2 + \mathrm{l}(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}p\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}p\right)$$

Snadno spočteme, že $\left(\frac{\partial}{\partial t}p\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t}p\right) = 0$ a $\left(\frac{\partial}{\partial t}p\right)^2 = r^2$

Dosazením dostáváme rovnici, kterou snadno vyřešíme (aditivní konstanta je rovna nule)

```
> Diff(l(t),t)=-1;
```

$$\frac{d}{dt}\mathrm{l}(t) = -1$$

```
> l(t)=-t;
```

$$\mathrm{l}(t) = -t$$

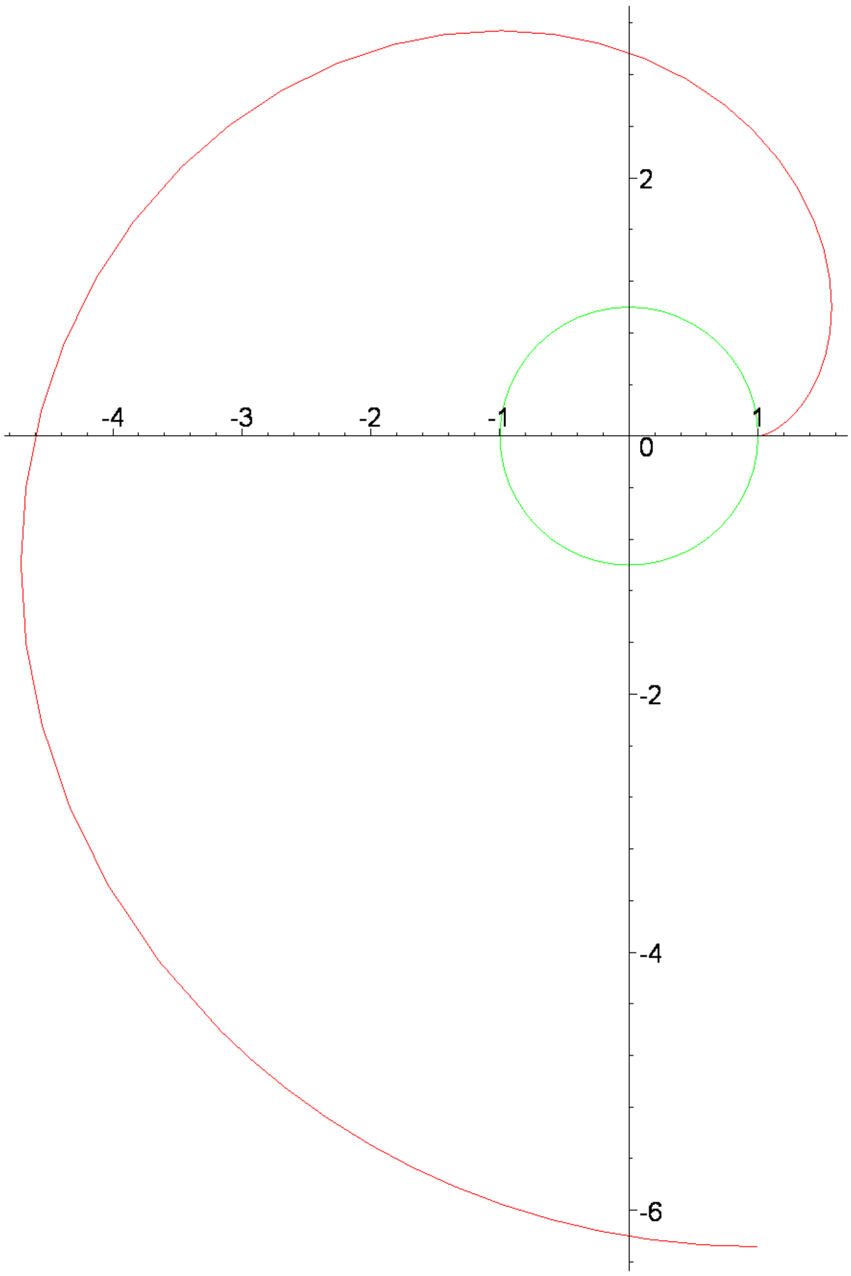
Můžeme tedy napsat rovnici kisoidy: $\mathrm{k}(t) = [r\cos(t) + t\, r\sin(t), r\sin(t) - t\, r\cos(t)]$.

Ještě si povšimneme vzdálenosti bodů $\mathrm{p}(t)$ a $\mathrm{q}(t)$. Je totiž rovna $|t|\, r$, což je právě délka oblouku kružnice příslušná parametru *t*.

Proto se také kisoida nazývá též odvynovka, protože ji lze získat také prakticky takto. Například na kruh (válec) namotáme provázek upevněný
v jednom bodě k povrchu a potom konec provázku při odvíjení (musí být stále napnutý) opisuje právě kisoidu.

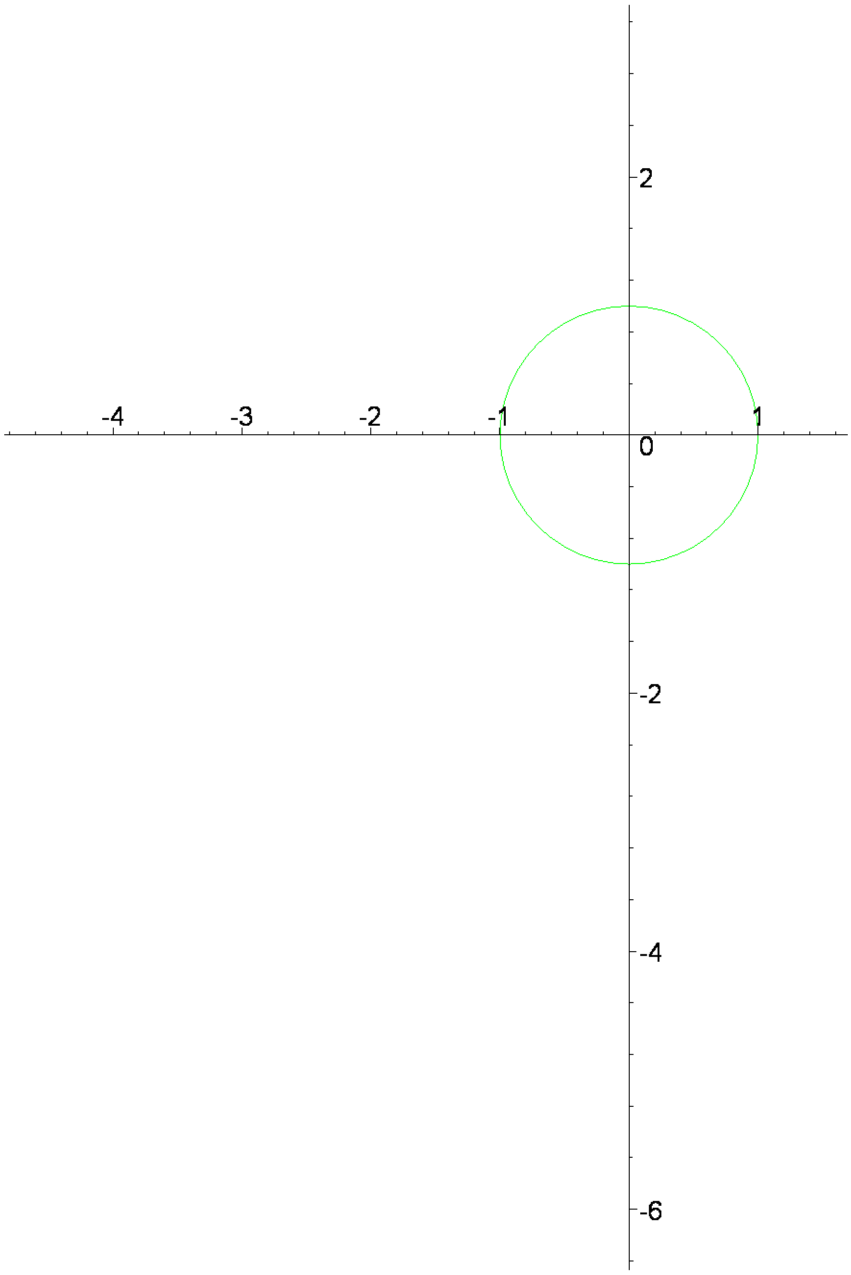
Nyní si tuto křivku nakreslíme.

```
> r:=1:
> A:=plot([r*cos(t)+t*r*sin(t), r*sin(t)-t*r*cos(t),t=0..2*Pi]):
> B:=plot([r*cos(t),r*sin(t),t=0..2*Pi],color=green):
> display({A,B},scaling=constrained);
```



Pro názornost vzniku kisoidy si ji vytvoříme ještě následující animací.

```
> C:=animate([r*cos(t)-tt*r*sin(t),r*sin(t)+tt*r*cos(t),tt=0..0.1]
  ,t=0..2*Pi,color=black):
> E:=animate([r*cos(t),r*sin(t),t=0..2*Pi],tt=0..1,color=green):
> bod:=animate([r*cos(t*s)+s*t*r*sin(t*s),r*sin(t*s)-s*t*r*cos(t*s
  ),s=0..1],t=0..2*Pi,color=red):
> F:=animate([r*cos(t)+tt*(r*cos(t)-r*cos(t)+t*r*sin(t)),r*sin(t)+
  tt*(r*sin(t)-r*sin(t)-t*r*cos(t)),tt=0..1],t=0..2*Pi,color=blue)
  :
> display(C,E,F,bod,scaling=constrained);
```



>

Animaci lze spustit kliknutím na obrázek a poté na ikonku PLAY na horní liště

Délka modré úsečky je právě délka oblouku kružnice od bodu [r,0] do bodu dotyku tečny. Po animaci je tedy rovna $2\,\pi\,r$.