

Limity funkcí

Příklady řešené pomocí Maple V

[Spočtěte následující limity:

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$, (Demidovič 411).

[**Řešení:**

[Nejprve si zdefinujeme naši funkci, abychom se neupsali:

[> **f:=x->(x^2-1)/(2*x^2-x-1):**

[a) V takto jednoduchém případě stačí dosadit a dostáváme 1. Pro jistotu to necháme Maple spočítat:

[> **limit(f(x), x=0);**

1

[Příklad b) nás jasně navádí na L'Hospitala, a skutečně, po jedné derivaci dostáváme výsledek: 2/3. Maple také:

[> **limit(f(x), x=1);**

$\frac{2}{3}$

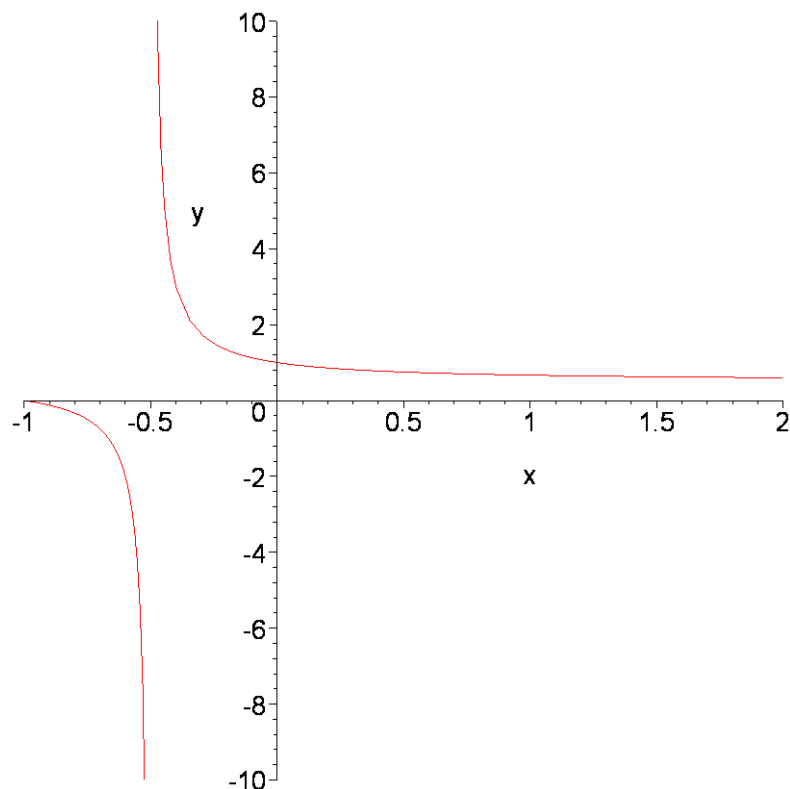
[c) O výsledné limitě rozhodují koeficienty u nejvyšší mocniny - x^2 . Dostáváme 1/2.

[> **limit(f(x), x=infinity);**

$\frac{1}{2}$

[Tak je snad vše v pořádku. Příště už budeme věřit tomu, co nám Maple spočítá. Můžeme si to ještě třeba ověřit obrázkem. Obrázek nám může také říct něco nového, zajímavého:

[> **plot(f(x), x=-1..2, y=-10..10, discontinuous);**



[I obrázek vypadá přesvědčivě. Zajímavější to ale bude v bodě -0,5:

```
> limit(f(x), x=-.5);
```

Float(undefined)

```
> limit(f(x), x=-.5, left);
```

Float(-∞)

```
> limit(f(x), x=-.5, right);
```

Float(∞)

[I v tomto případě snad můžeme počítači věřit...

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ (Demidovič 412).

[**Řešení:**

[Opět si nejprve zadefinujeme funkci:

```
> f:=x->((1+x)*(1+2*x)*(1+3*x)-1)/x;
```

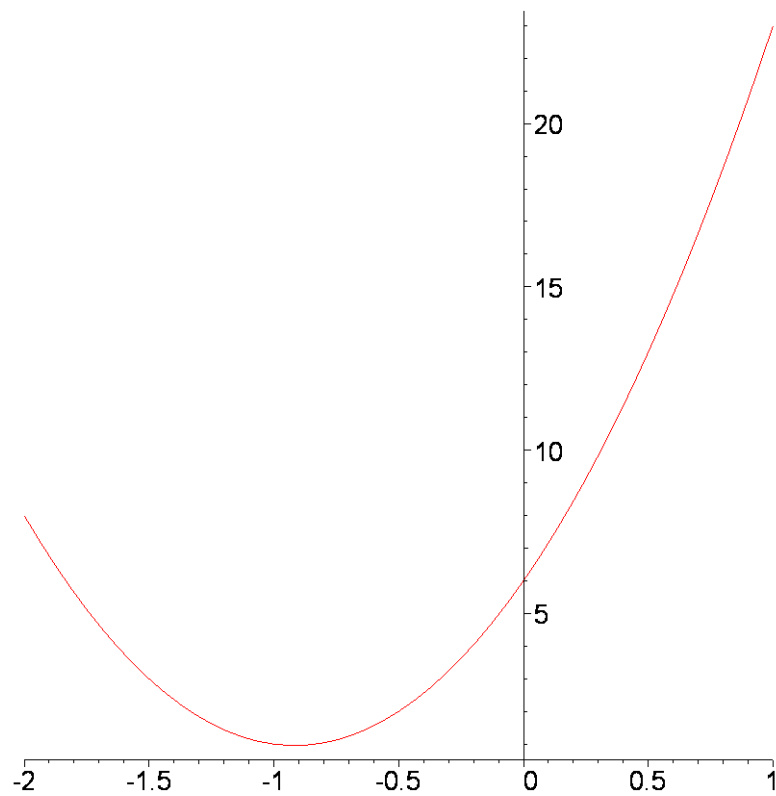
[potom necháme Maple spočítat příslušnou derivaci:

```
> limit(f(x), x=0);
```

6

[a nakonec si (pro lepší názor a pro kontrolu) nakreslíme obrázek:

```
> plot(f, -2..1);
```



3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$ (Demidovič 413).

[**Řešení:**

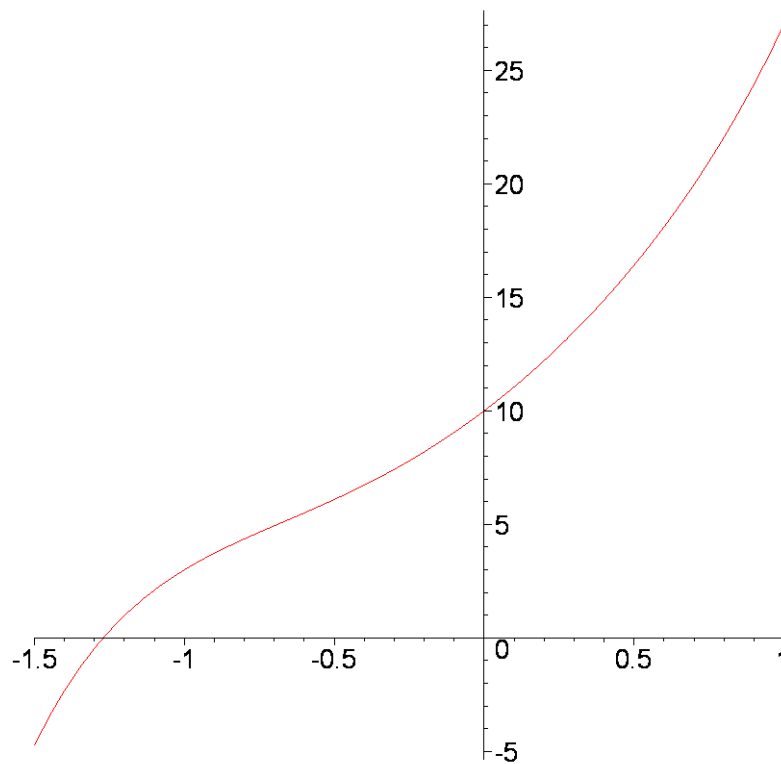
[Postup je stejný jako v předchozím příkladě (a většině příkladů dalších):

[> `f:=x->((1+x)^5-(1+5*x))/x^2+x^5:`

[> `limit(f(x),x=0);`

10

[> `plot(f, -1.5..1);`



4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ (Berman 276).

Řešení:

```
> f:=x->(x^3+x-2)/(x^3-x^2-x+1):
```

```
> limit(f(x),x=1);
```

undefined

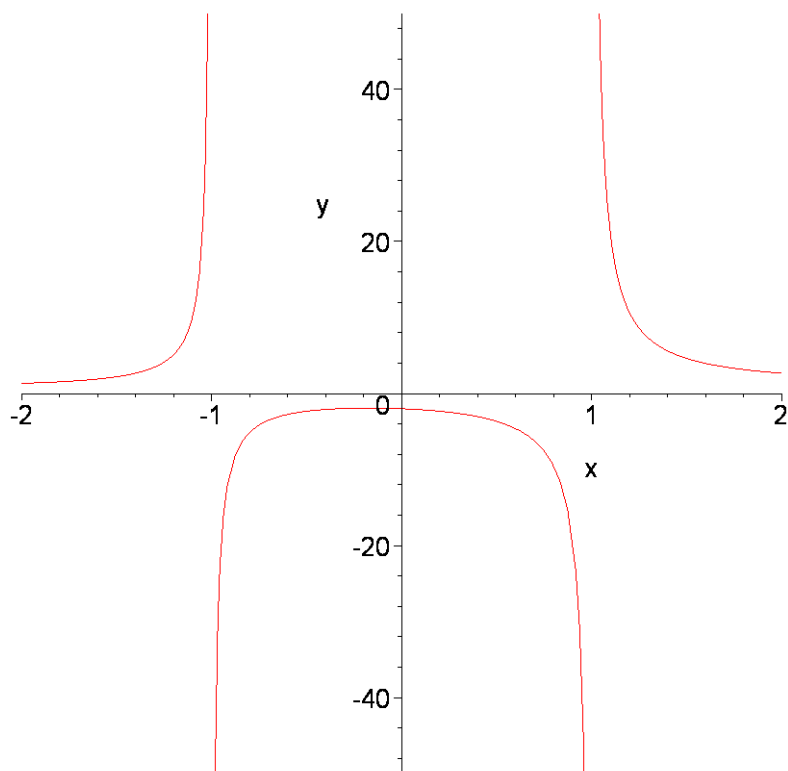
```
> limit(f(x),x=1,left);
```

$-\infty$

```
> limit(f(x),x=1,right);
```

∞

```
> plot(f(x), x=-2..2, y=-50..50, discont=true);
```



5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$, (Demidovič 416).

Řešení:

```
> f:=x->((2*x-3)^20*(3*x+2)^30)/(2*x+1)^50:
```

```
> limit(f(x),x=infinity);
```

[205891132094649](#)

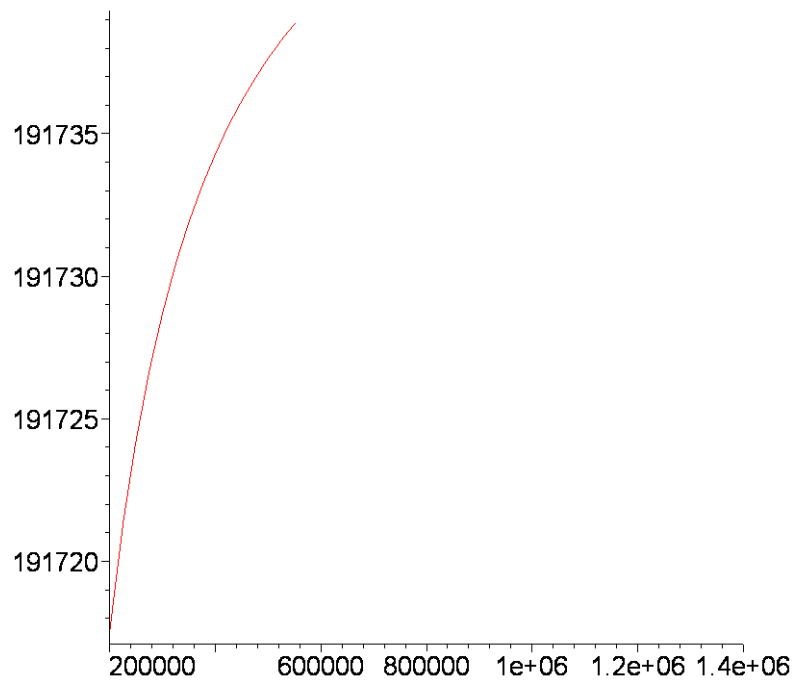
[1073741824](#)

```
> evalf("");
```

```
>
```

```
Warning, incomplete string; use " to end the string
```

```
> plot(f, 200000..1400000);
```



[[Chyba v zobrazení. Proč?]

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{root}_3(1+x^2) - \text{root}_4(1-2x)}{x+x^2}$, (Berman 303*).

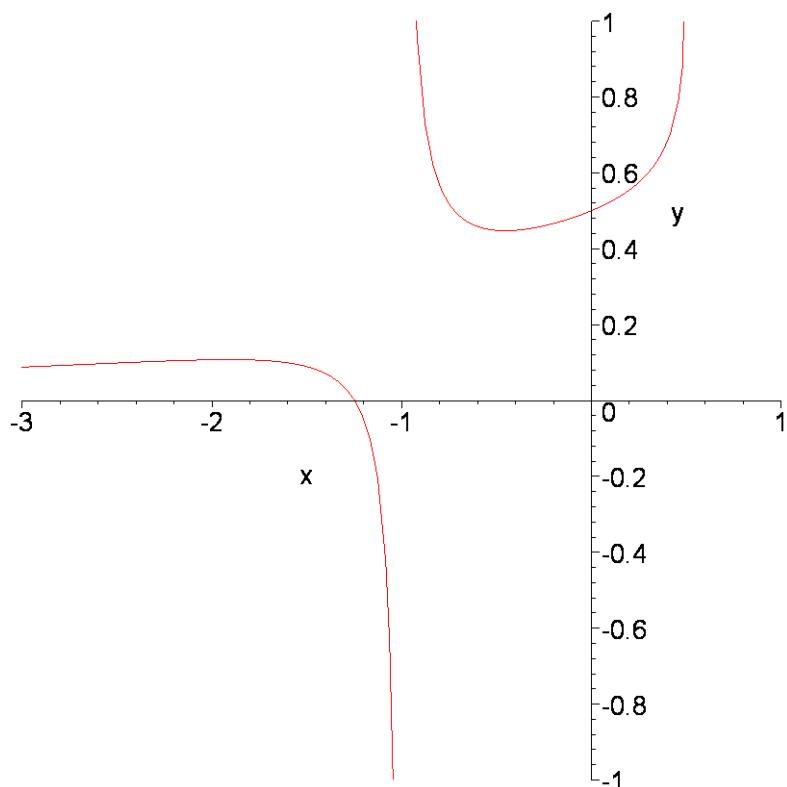
[**Řešení:**

[> `f:=x->(root[3](1+x^2)-root[4](1-2*x))/(x+x^2):`

[> `limit(f(x),x=0);`

$\frac{1}{2}$

[> `plot(f(x), x=-3..1, y=-1..1, discontinuous=true);`



7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, m a n celá (Berman 280).

Řešení:

```
> f:=x->(x^m-1)/(x^n-1):
```

```
> limit(f(x),x=1);
```

$$\frac{m}{n}$$

Tak i tohle Maple V umí...

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{root}_n(x) - 1}{\text{root}_m(x) - 1}$, m a n celá (Berman 302).

Řešení:

```
> f:=x->(root[n](x)-1)/(root[m](x)-1):
```

```
> limit(f(x),x=1);
```

Error, (in root[n]) root expects its index, n, to be of type integer, but received n

Tak teď už musíme zapracovat my. $\text{root}_n(x) = x^{\left(\frac{1}{n}\right)}$

```
> f:=x->(x^(1/n)-1)/(x^(1/m)-1):
```

```
> limit(f(x),x=1);
```

$$\frac{m}{n}$$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2}$, m i n přirozená (Demidovič 414).

Řešení:

> `f:=x->((1+m*x)^n-(1+n*x)^m)/x^2:`

> `limit(f(x),x=0);`

$$-\frac{1}{2}m^2n + \frac{1}{2}n^2m$$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin(a)^2}{x}$, (Demidovič 492).

Řešení:

> `f:=x->(sin(a+x)*sin(a+2*x)-sin(a)^2)/x:`

> `limit(f(x),x=0);`

$$3 \sin(a) \cos(a)$$

11. $\lim_{a \rightarrow b} \frac{\sin(a)^2 - \sin(b)^2}{a^2 - b^2}$, (Berman 342).

Řešení:

> `f:=x->(sin(a)^2-sin(b)^2)/(a^2-b^2):`

> `limit(f(x),a=b);`

$$\frac{\cos(b) \sin(b)}{b}$$

12. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{3}\right)} \frac{\tan(x)^3 - 3 \tan(x)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$, (Demidovič 492).

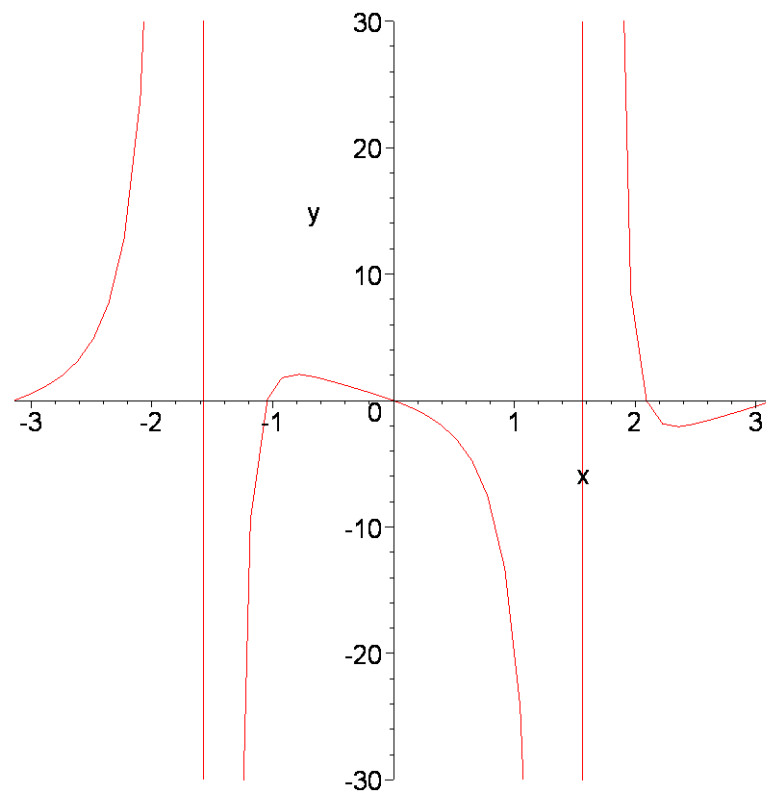
Řešení:

> `f:=x->(tan(x)^3-3*tan(x))/cos(x+Pi/6):`

> `limit(f(x),x=Pi/3);`

$$-24$$

> `plot(f(x),x=-Pi..Pi,y=-30..30);`



13. $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(a^n)}{\sin(a)^m}$, m a n přirozená (Berman 318).

Řešení:

```
> f:=a->sin(a^n)/sin(a)^m:
```

```
> limit(f(a),a=0);
```

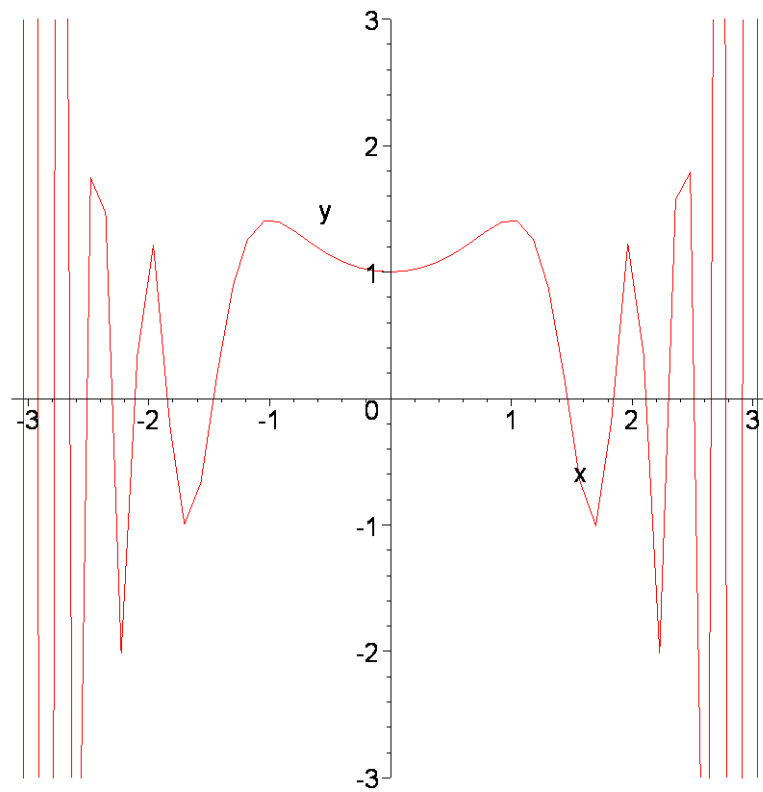
$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(a^n)}{\sin(a)^m}$$

Tak to je špatné... Nezbývá, než zkoušet:

```
> f:=a->sin(a^3)/sin(a)^3:
```

```
> limit(f(a),a=0);
```

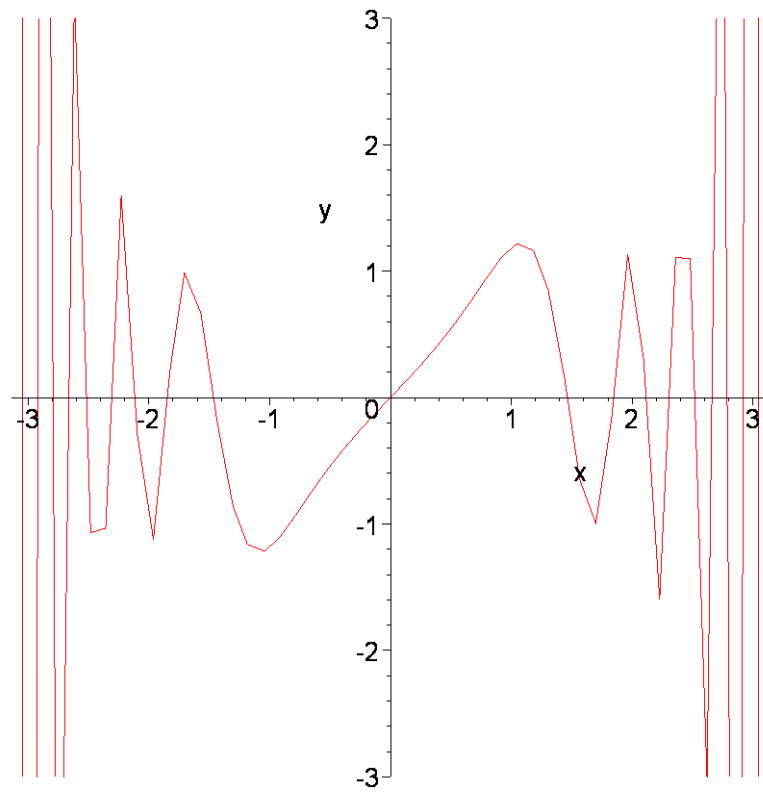
```
> plot(f(x), x=-Pi..Pi, y=-3..3 );
```



```

> f:=a->sin(a^3)/sin(a)^2:
> limit(f(a),a=0);
0
> plot(f(x), x=-Pi..Pi, y=-3..3 );

```



```

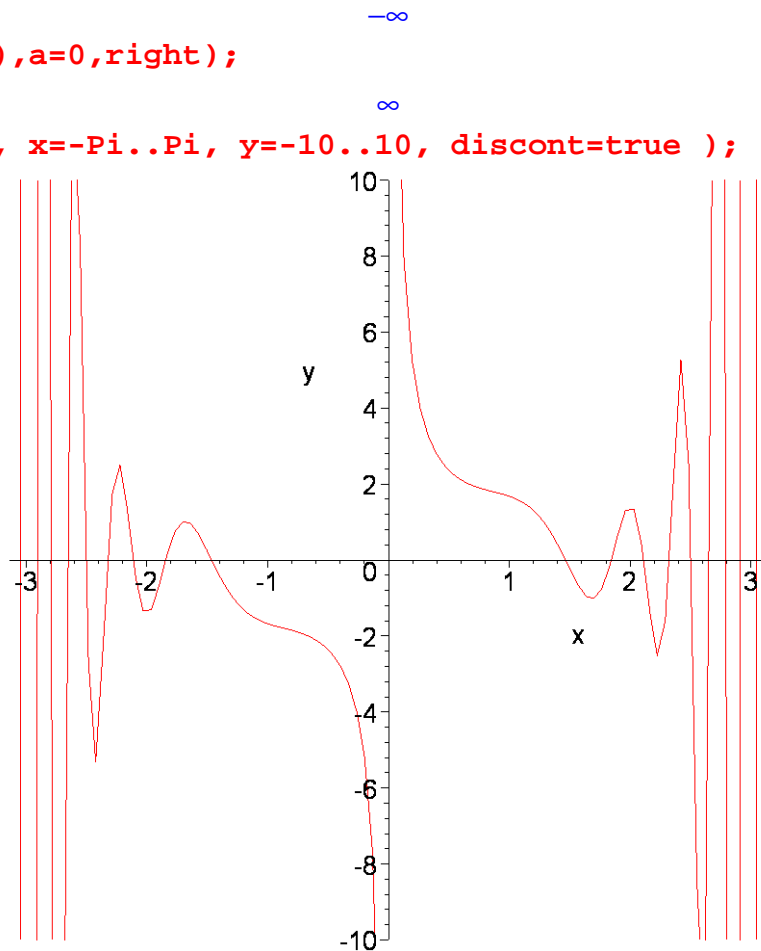
> f:=a->sin(a^3)/sin(a)^4:
> limit(f(a),a=0);
undefined

```

```
> limit(f(a),a=0,left);
```

```
> limit(f(a),a=0,right);
```

```
> plot(f(x), x=-Pi..Pi, y=-10..10, discontin=true );
```



Grafy pro $[n,n]$ vypadají skoro stejně, jako pro $[3,3]$, pro $[n,m]$, $n>m$ jako pro $[3,2]$ a pro $[n,m]$, $n<m$ jako pro $[3,4]$. Skutečně, správný výsledek je 0 pro $n>m$, 1 pro $n=m$ a neex. pro $n<m$.

Takovéto příklady je lepší spočítat ručně. Pro kontrolu nám ale můžou dobře posloužit grafy...

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{m \cdot x}$, (Berman 354).

Řešení:

```
> f:=x->(1+k/x)^(m*x):
```

```
> limit(f(x),x=infinity);
```

$e^{(km)}$

15. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x(2)$, (Berman 354).

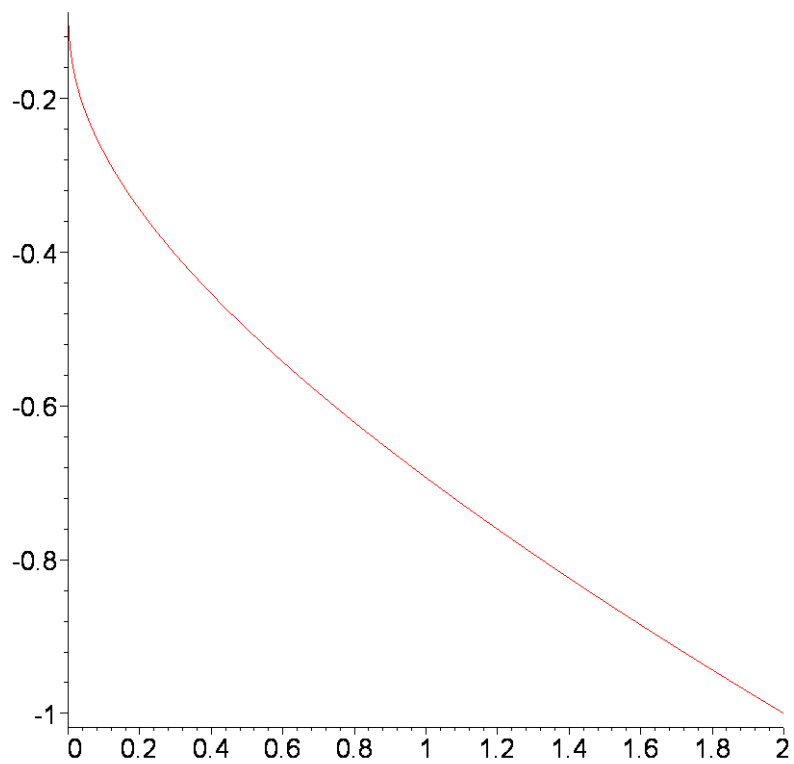
Řešení:

```
> f:=x->(1-x)*log[x](2):
```

```
> limit(f(x),x=1);
```

$-\ln(2)$

```
> plot(f, -0..2);
```



[**Použitá literatura:**

[**Demidovič:** B. P. Demidovič, Sbornik zadač i upražněnij po matematičeskomu analyzu, 9., vydání, Nauka, Moskva 1977

[**Berman:** G. N. Berman, Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analyza, 18. vydání, Nauka, Moskva 1975