Průběh funkce

Chci vyšetřit průběh funkcí $f4(x) := (|x|^3 + b^3)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$, kde b >= 0

Pro práci v Maple je výhodné, zavedu-li f4(x) jako funkci dvou proměnných

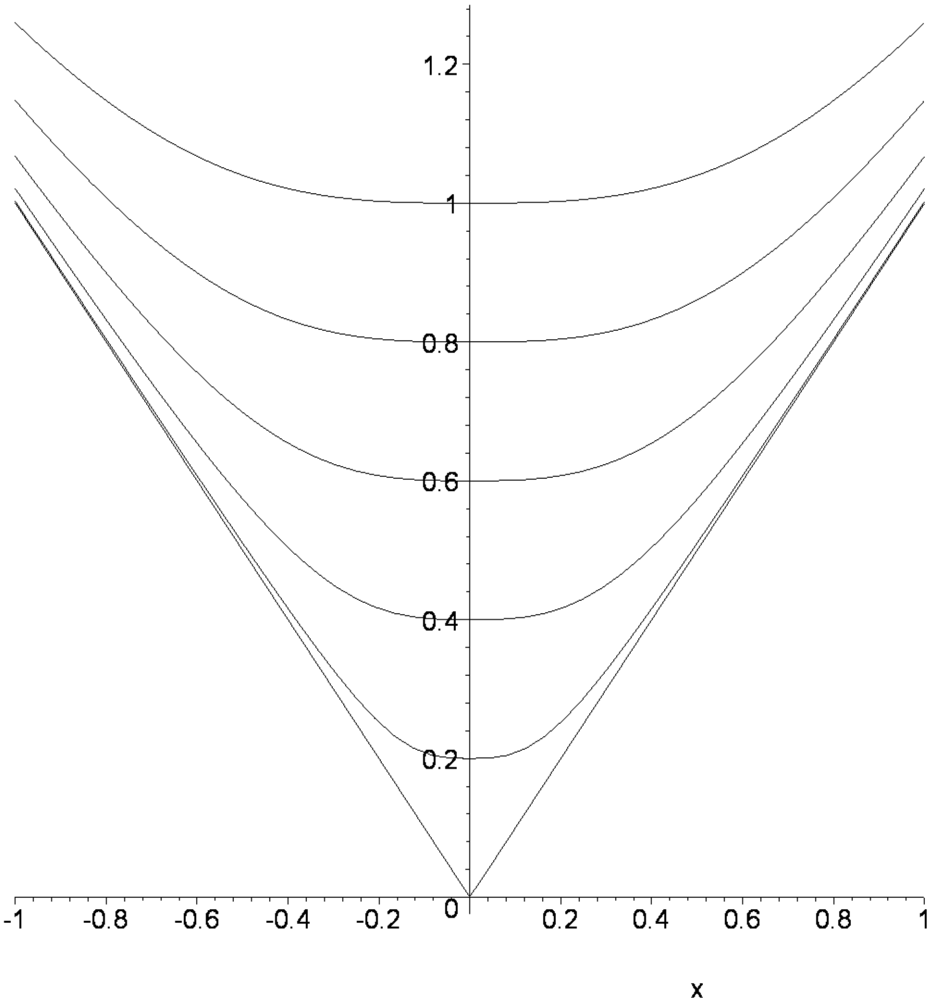
```
> f4(x,b):= ((abs(x)^3+b^3))^(1/3);
  fce4:= unapply(f4(x,b), x,b);
```

$$f4(x, b) := (|x|^3 + b^3)^{(1/3)}$$

$$fce4 := (x, b) \rightarrow (|x|^3 + b^3)^{(1/3)}$$

Nejprve zakreslím průběh pro několik hodnot parametru b. Jelikož f4(x) je sudá, podívám se na okolí bodu 0.

```
> plot([seq(fce4(x,i/5),i=0..5)],x=-1..1,color=black);
```



Vyšetříme monotonii:

Derivace f4 je $\dfrac{|x|^2 \operatorname{abs}(1, x)}{(|x|^3 + b^3)^{\left(\frac{2}{3}\right)}}$, kde abs(1,x) značí signum x. Pro všechna reálná x mohu zjednodušit na $\dfrac{x^2 \operatorname{abs}(1, x)}{(|x|^3 + b^3)^{\left(\frac{2}{3}\right)}}$

To zapíšu do nové funkce:

```
> g4(x,b):=x^2*abs(1,x)/(abs(x)^3+b^3)^(2/3);
```

$$g4(x, b) := \frac{x^2 \operatorname{abs}(1, x)}{(|x|^3 + b^3)^{(2/3)}}$$

Příkaz solve v tomto případě selže:

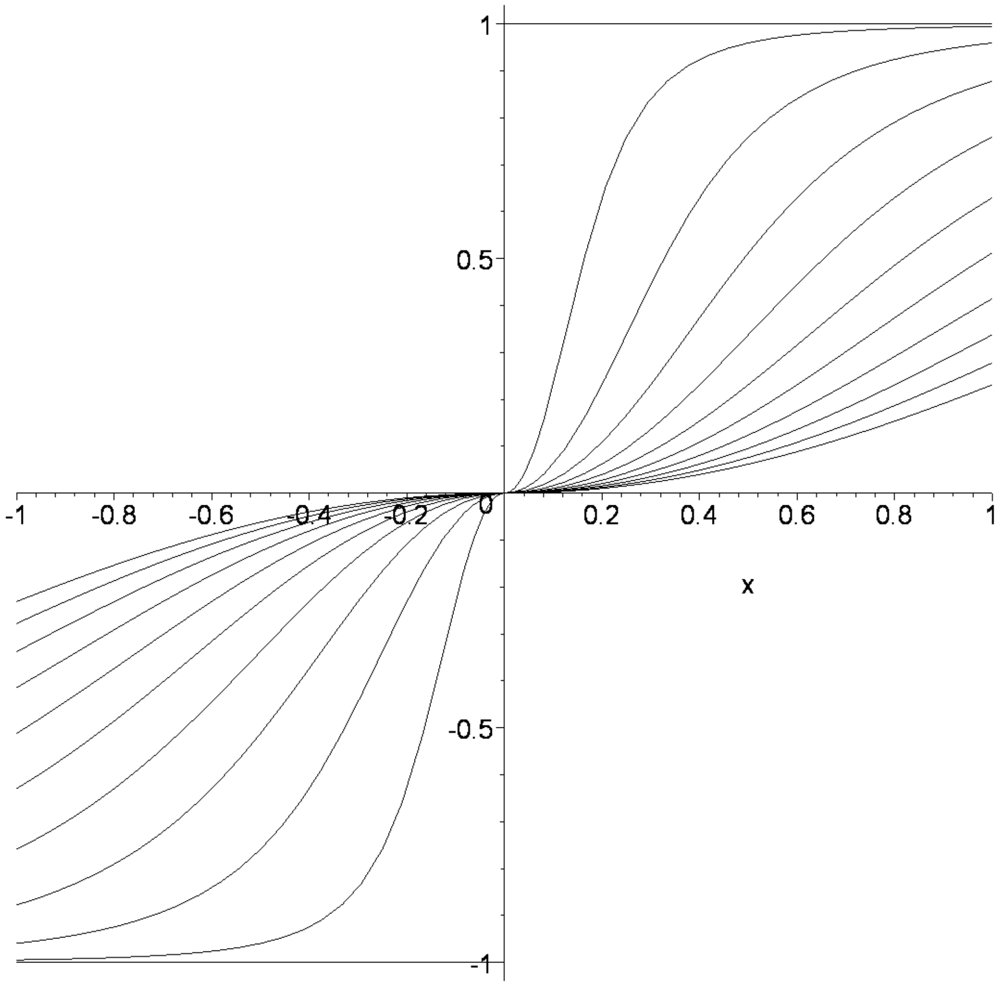
```
> solve({g4(x,0)>0,b>0},x);
Warning, solutions may have been lost
```

Budu proto počítat:

Stačí, když vyšetřím nerovnici $0 < (x^3 + b^3)^{\left(\frac{2}{3}\right)}$. Ta zjevně platí pro všechna reálná x.
Je proto f4 klesající na $(-\infty, 0)$ a rostoucí na $(0, \infty)$.

"Podívám" se ještě na průběh derivace pro několik hodnot parametru:

```
> plot( [seq( D[1](fce4)(x,i/5),
  i=0..10)],x=-1..1,color=black);
```



Konvexnost / konkávnost:

Z předchozího obrázku se zdá, že pro b>0 je první derivace rostoucí pro všechna x. Ověřím to:
Druhá derivace f4 je pro x>0

```
> simplify(diff(x^2/(x^3+b^3)^(2/3),x));
```

$$\frac{2\,x\,b^3}{(x^3+b^3)^{(5/3)}}$$

pro x<0

```
> x_neg:=simplify(diff(-x^2/((-x)^3+b^3)^(2/3),x));
```

$$x\_neg := -\frac{2\,x\,b^3}{(-x^3+b^3)^{(5/3)}}$$

Pro kladná x je situace jasná, funkce $\frac{2\,x\,b^3}{(x^3+b^3)^{\left(\frac{5}{3}\right)}}$ je tu stále kladná, tedy f4 je na $(0, \infty)$ konvexní.

U záporných x zjednodušíme $\frac{2\,x\,b^3}{(x^3-b^3)\,(-x^3+b^3)^{\left(\frac{2}{3}\right)}} > 0$ na $\frac{x^3}{(x^3-b^3)^3\,(-x^3+b^3)^2} > 0$,
z čehož x - b < 0, což ale platí pro všechna záporná x. Funkce f4 je tedy konvexní i na $(-\infty, 0)$.

Pomocné výpočty

```
> x_neg/2/b^3;
```

$$-\frac{x}{(-x^3+b^3)^{(5/3)}}$$

```
> "5^3";
>
```

"5^3"

Nyní pro x = 0:
Předně je zde f4 spojitá. Důkaz: Derivace zleva i zprava v x=0 je nulová:

```
> limit( g4(x,b), x=0, left);
```

$$0$$

derivace zprava v x=0

```
> limit( g4(x,b), x=0, right);
```

$$0$$

```
>
```

f4 má tedy v x=0 derivaci a je tam tedy spojitá. Zároveň tato derivace je nulová a z předchozího
tak plyne, že f4 má v x=0 minimum. Tím také mám, že f4 je konvexní na celém $(-\infty, \infty)$. Z toho
také dostávám, že v $+\infty$ a $-\infty$ je limita f4 rovna $+\infty$.