<u>Zápočet</u> pro praktikum M701 Matematika na počítačích.
Autor: Petr Smetana

<u>Příklad č. 1:</u>

Vyšetření průběhu funkce f(x) = 4x-14x^2.

Definiční obor je reálná osa, obor hodnot je také reálná osa.

```
> f := x ->  4*x-14*x^3;
```

$$f := x \to 4\,x - 14\,x^3$$

Podíváme se na to, jak funkce vypadá v nekonečnu:

```
> Limit (f(x),x=infinity)=limit (f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} 4\,x - 14\,x^3 = -\infty$$

```
> Limit (f(x),x=-infinity) = limit (f(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to (-\infty)} 4\,x - 14\,x^3 = \infty$$

Zjistíme si body podezřelé z extrému:

```
> df1:= D(f);
```

$$df1 := x \to 4 - 42\,x^2$$

```
> a:=[solve (df1(x)=0,x)];
```

$$a := \left[-\frac{\sqrt{42}}{21}, \frac{\sqrt{42}}{21} \right]$$

V těchto bodech je buď maximum nebo minimum, ověříme to druhou derivací:

```
> df2:=D(df1);
```

$$df2 := x \to -84\,x$$

```
> b1:= df2(a[1]);
```

$$b1 := 4\sqrt{42}$$

```
> b2:= df2(a[2]);
```

$$b2 := -4\sqrt{42}$$

Druhá derivace je **záporná** v bodě a1= (1/21)*sqrt(42) a **kladná** v bodě a2= -(1/21)*sqrt(42), což znamená,
že funkce f(x) má v bodě **a1 lokální maximum** a v bodě **a2 lokální minimum**.

Zjistíme si konvexnost a konkávnost:

```
> i1:=solve(df1(x)>0,x);
```

$$i1 := \mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(-\frac{\sqrt{42}}{21} \right), \mathrm{Open}\left(\frac{\sqrt{42}}{21} \right) \right)$$

```
> i2:=solve(df1(x)<0,x);
```

$$i2 := \mathrm{RealRange}\left(-\infty, \mathrm{Open}\left(-\frac{\sqrt{42}}{21}\right)\right), \mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(\frac{\sqrt{42}}{21}\right), \infty\right)$$

```
> evalf((-1/21)*42^(1/2));
```

$$-0.3086066999$$

```
> evalf((1/21)*42^(1/2));
```

$$0.3086066999$$

(Tj. funkce je **rostoucí** na intervalu i1= (-0.3086066999 , 0.3086066999), **klesající** na zbylých částech (i2).)

```
> df2:= D(df1);
```

$$df2 := x \to -84\,x$$

```
> i3:=solve(df2(x)>0,x);
> i4:=solve(df2(x)<0,x);
```

$$i3 := \mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(0))$$

$$i4 := \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \infty)$$

```
> df2(-1);
```

$$84$$

```
> df2(1);
```

$$-84$$

Druhá derivace je **záporná** na intervalu i4= (0 , nekonečno), což znamená, že funkce je tomto intervalu **konkávní** a
kladná na intervalu i3= (-nekonečno , 0), takže je na něm **konvexní**.
Inflexní bod je 0.
Ověříme si, zda je to pravda, nakreslením grafu:

Hodnota funkce f(x) v bodech **a** je:

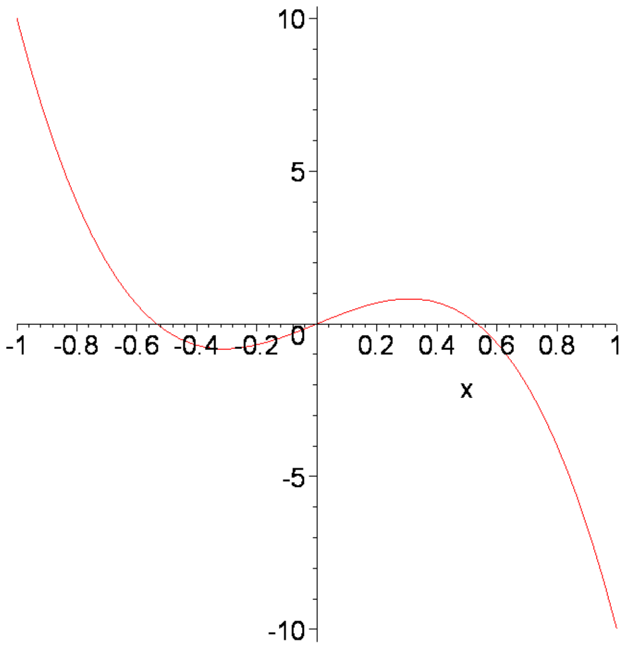
```
> evalf(f(a[1]));
```

$$-0.8229511998$$

```
> evalf(f(a[2]));
```

$$0.8229511998$$

```
> plot (f(x),x=-1..1);
```



==
====================

<u>Příklad č. 2:</u>

Vyšetření průběhu funkce g(x) = 2x^3 - 3x^2

Definiční obor je reálná osa, obor hodnot je také reálná osa.

```
> g := x -> 2*x^3 - 3*x^2 ;
```

$$g := x \rightarrow 2\,x^3 - 3\,x^2$$

Podíváme se na to, jak funkce vypadá v nekonečnu:

```
> Limit (g(x),x=infinity)=limit (g(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2\,x^3 - 3\,x^2 = \infty$$

```
> Limit (g(x),x=-infinity) = limit (g(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} 2\,x^3 - 3\,x^2 = -\infty$$

Zjistíme si body podezřelé z extrému:

```
> dg1:= D(g);
```

$$dg1 := x \rightarrow 6\,x^2 - 6\,x$$

```
> a:=[solve (dg1(x)=0,x)];
```

$$a := [0, 1]$$

V těchto bodech je buď maximum nebo minimum, ověříme to druhou derivací:

```
> dg2:=D(dg1);
```

$$dg2 := x \rightarrow 12\,x - 6$$

```
> b1:= dg2(a[1]);
```

$$b1 := -6$$

```
> b2:= dg2(a[2]);
```

$$b2 := 6$$

Druhá derivace je **záporná** v bodě a1 = 0 (b1 = -6) a **kladná** v bodě a2 = 1 (b2 = 6), což znamená, že funkce g(x)
má v bodě **a1 lokální maximum** a v bodě **a2 lokální minimum**.

Zjistíme si konvexnost a konkávnost:

```
> i1:=solve(dg1(x)>0,x);
```

$$i1 := \mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(0)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(1), \infty)$$

```
> i2:=solve(dg1(x)<0,x);
```

$$i2 := \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \mathrm{Open}(1))$$

(Tj. funkce je **rostoucí** na intervalech i1 = (-nekonečno , 0) a (1 , nekonečno), **klesající** na zbylé části (i2).)

```
> dg2:= D(dg1);
```

$$dg2 := x \to 12\,x - 6$$

```
> i3:=solve(dg2(x)>0,x);
> i4:=solve(dg2(x)<0,x);
```

$$i3 := \mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(\frac{1}{2}\right), \infty\right)$$

$$i4 := \mathrm{RealRange}\left(-\infty, \mathrm{Open}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

```
> dg2(-1);
```

$$-18$$

```
> dg2(1);
```

$$6$$

Druhá derivace je **záporná** na intervalu i4, což znamená, že funkce je tomto intervalu **konkávní** a
kladná na intervalu i3, takže je na něm **konvexní**.
Inflexní bod je 0,5.

Ověříme si, zda je to pravda, nakreslením grafu:

Hodnota funkce f(x) v bodech **a** je:

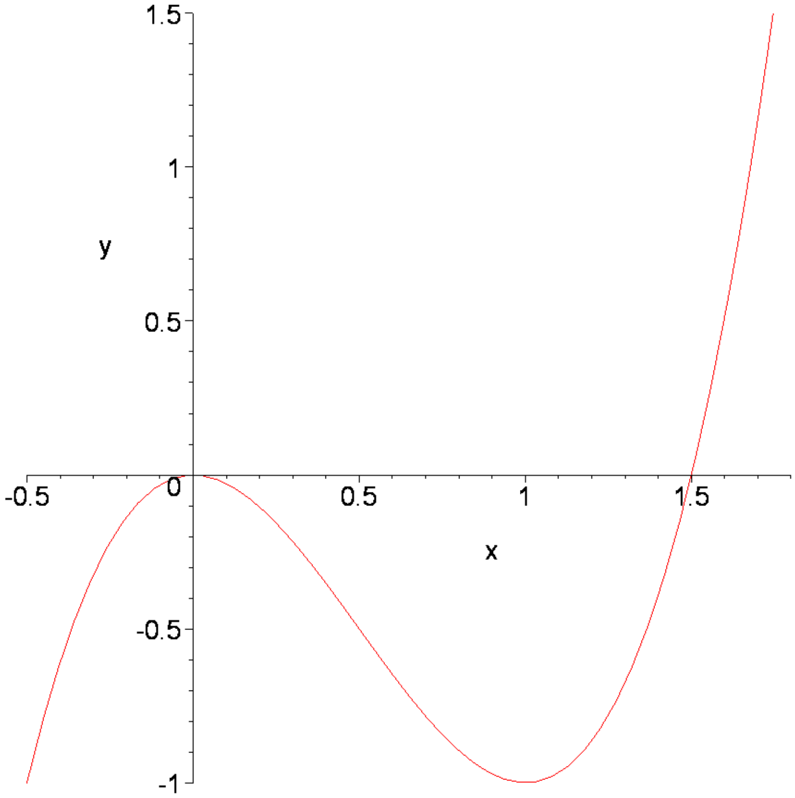
```
> evalf(g(0));
```

$$0.$$

```
> evalf(g(1));
```

$$-1.$$

```
> plot (g(x),x=-0.5..1.8,y=-1..1.5);
```



==
====================

<u>Příklad č. 3:</u>

Vyšetření průběhu funkce f(x) = (1+x^2)/(1+x^3).

Definiční obor není celá reálná osa, obor hodnot je reálná osa.

```
> h := x -> (1+x^2)/(x^3+1);
```

$$h := x \rightarrow \frac{1+x^2}{x^3+1}$$

Podíváme se na to, jak funkce vypadá v nekonečnu:

```
> Limit (h(x),x=infinity)=limit (h(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x^3+1} = 0$$

```
> Limit (h(x),x=-infinity) = limit (h(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{1+x^2}{x^3+1} = 0$$

Podíváme se na body nespojitosti (tj. jmenovatel je roven 0) a spočítáme limity zleva a zprava:

```
> k1:=solve(1+x^3=0,x);
```

$$k1 := -1, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} I \sqrt{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2} I \sqrt{3}$$

```
> Limit (h(x),x=k1[1])=limit (h(x),x=k1[1],left);
```

$$\lim_{x \to (-1)} \frac{1+x^2}{x^3+1} = -\infty$$

```
> Limit (h(x),x=k1[1])=limit (h(x),x=k1[1],right);
```

$$\lim_{x \to (-1)} \frac{1+x^2}{x^3+1} = \infty$$

Zjistíme si body podezřelé z extrému:

```
> dh1:= D(h);
```

$$dh1 := x \to \frac{2x}{x^3+1} - \frac{3(1+x^2)x^2}{(x^3+1)^2}$$

```
> a:=[solve (dh1(x)=0,x)];
```

$$a := \left[0, (\sqrt{2}+1)^{(1/3)} - \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}, -\frac{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}{2} + \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}} + \frac{1}{2} I \sqrt{3}\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)} + \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right), -\frac{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}{2} + \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}} - \frac{1}{2} I \sqrt{3}\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)} + \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right)\right]$$

```
> evalf(a);
```

$$[0., 0.5960716383, -0.2980358191 + 1.807339496\, I, -0.2980358191 - 1.807339496\, I]$$

V těchto bodech je buď maximum nebo minimum, ověříme to druhou derivací:

```
> dh2:=D(dh1);
```

$$dh2 := x \to \frac{2}{x^3+1} - \frac{12x^3}{(x^3+1)^2} + \frac{18(1+x^2)x^4}{(x^3+1)^3} - \frac{6(1+x^2)x}{(x^3+1)^2}$$

```
> b1:= dh2(a[1]);
```

$$b1 := 2$$

```
> b2:= dh2(a[2]);
```

$$b2 := \frac{2}{\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)} - \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right)^3 + 1} - \frac{12\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)} - \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right)^3}{\left(\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)} - \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right)^3 + 1\right)^2}$$

$$+\frac{18\left(1+\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)}-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right)^2\right)\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)}-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right)^4}{\left(\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)}-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right)^3+1\right)^3}$$

$$-\frac{6\left(1+\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)}-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right)^2\right)\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)}-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right)}{\left(\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)}-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right)^3+1\right)^2}$$

```
> evalf(b2);
```

$$-1.650457678$$

```
> evalf(a[2]);
```

$$0.5960716383$$

Druhá derivace je **záporná** v bodě a2= 0.5960716383 a **kladná** v bodě a1 = 0, což znamená, že funkce h(x) má
v bodě **a2 lokální maximum** a v bodě **a1 lokální minimum**.

Zjistíme si konvexnost a konkávnost:

```
> i1:=solve(dh1(x)>0,x);
```

$$i1 := \mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}(0), \mathrm{Open}\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)}-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right)\right)$$

```
> i2:=solve(dh1(x)<0,x);
```

$$i2 := \mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(-1)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-1), \mathrm{Open}(0)),$$
$$\mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left((\sqrt{2}+1)^{(1/3)}-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{(1/3)}}\right), \infty\right)$$

```
> evalf((2^(1/2)+1)^(1/3)-1/(2^(1/2)+1)^(1/3));
```

$$0.5960716383$$

(Tj. funkce je **rostoucí** na intervalu i1 = (0 , 0.5960716383) , **klesající** na zbylých částech (i2).)

```
> dh2:= D(dh1);
```

$$dh2 := x \to \frac{2}{x^3+1}-\frac{12\,x^3}{(x^3+1)^2}+\frac{18\,(1+x^2)\,x^4}{(x^3+1)^3}-\frac{6\,(1+x^2)\,x}{(x^3+1)^2}$$

```
> i3:=solve(dh2(x)>0,x);
> i4:=solve(dh2(x)<0,x);
```

$i3 := \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-1), \mathrm{Open}(\mathrm{RootOf}(\_Z^6 - 7\_Z^3 + 1 + 6\_Z^4 - 3\_Z, index = 1))),$
$\quad \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(\mathrm{RootOf}(\_Z^6 - 7\_Z^3 + 1 + 6\_Z^4 - 3\_Z, index = 2)), \infty)$

$i4 := \mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(-1)), \mathrm{RealRange}($
$\quad \mathrm{Open}(\mathrm{RootOf}(\_Z^6 - 7\_Z^3 + 1 + 6\_Z^4 - 3\_Z, index = 1)),$
$\quad \mathrm{Open}(\mathrm{RootOf}(\_Z^6 - 7\_Z^3 + 1 + 6\_Z^4 - 3\_Z, index = 2)))$

```
> dh2(-2);
```

$$\frac{-446}{343}$$

```
> dh2(0.3);
> dh2(-0.5);
```

$$-0.073247332$$
$$11.24198251$$

```
> dh2(1);
```

$$\frac{-1}{2}$$

Druhá derivace je **záporná** na intervalech i4 -> (-nekonečno , -1) a (0.2905536286 , nekonečno), což znamená, že funkce je na tomto
intervalu **konkávní** a **kladná** na intervalu i3= (-1 , 0.2905536286), takže je na něm **konvexní**.
Inflexní bod je 0.2905536286.

Ověříme si, zda je to pravda, nakreslením grafu:

Hodnota funkce h(x) v bodech **a** je:

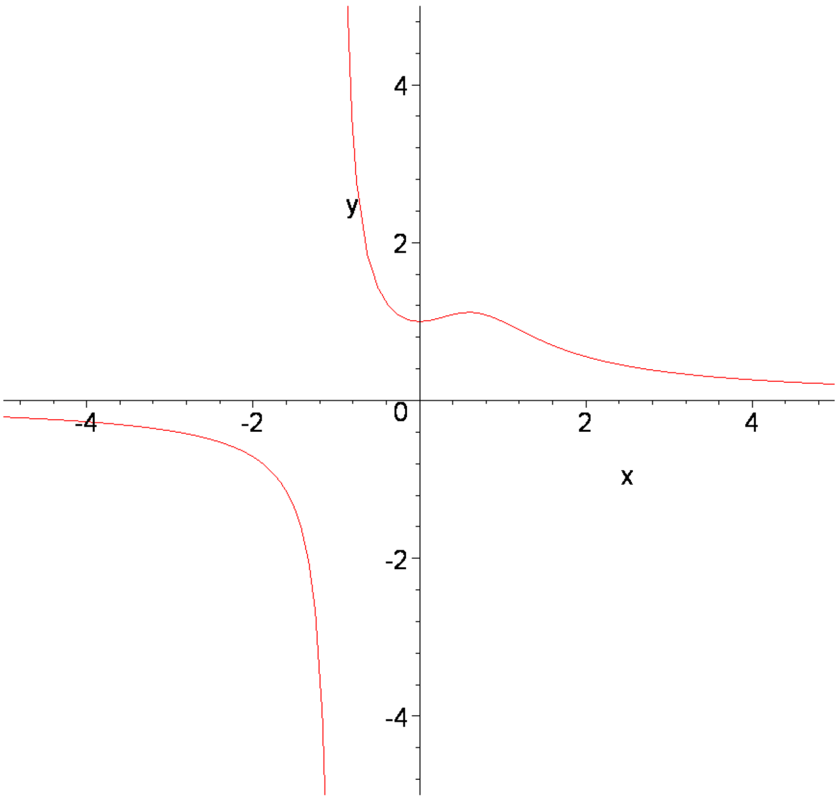
```
> evalf(h(a[1]));
```

$$1.$$

```
> evalf(h(a[2]));
```

$$1.118433800$$

```
> plot (h(x),x=-5..5,y=-5..5,color=red,discont=true);
```



==

Příklad č. 4:

Vyšetření průběhu funkce f(x) = (x^2-1)/(x^2-x-12)

Definiční obor není celá reálná osa, obor hodnot je reálná osa.

```
> f := x -> (x^2 - 1)/(x^2-x -12);
```

$$f := x \to \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 12}$$

Podíváme se na to, jak funkce vypadá v nekonečnu:

```
> Limit (f(x),x=infinity)=limit (f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 12} = 1$$

```
> Limit (f(x),x=-infinity) = limit (f(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 12} = 1$$

Podíváme se na kritické body, tj. body, kdy je jmenovatel funkce f (x) roven 0:

```
> k:=[solve((x^2-x -12),x)];
```

$$k := [4, -3]$$

Funkce je **nespojitá** v bodech k1= -3 a k2= 4, spočítáme si limity v těchto bodech:

```
> Limit (f(x),x=k[1])=limit (f(x),x=-3,left);
```

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-1}{x^2-x-12} = \infty$$

```
> Limit (f(x),x=k[1])=limit (f(x),x=-3,right);
```

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-1}{x^2-x-12} = -\infty$$

```
> Limit (f(x),x=k[2])=limit (f(x),x=4,left);
```

$$\lim_{x \to (-3)} \frac{x^2-1}{x^2-x-12} = -\infty$$

```
> Limit (f(x),x=k[2])=limit (f(x),x=4,right);
```

$$\lim_{x \to (-3)} \frac{x^2-1}{x^2-x-12} = \infty$$

Zjistíme si body podezřelé z extrému:

```
> df1:= D(f);
```

$$df1 := x \to \frac{2x}{x^2-x-12} - \frac{(x^2-1)(2x-1)}{(x^2-x-12)^2}$$

```
> a:=[solve (df1(x)=0,x)];
```

$$a := [-11-2\sqrt{30}, -11+2\sqrt{30}]$$

```
> evalf(a);
```

$$[-21.95445115, -0.04554885]$$

V těchto bodech je buď maximum nebo minimum, ověříme to druhou derivací:

```
> df2:=D(df1);
```

$$df2 := x \to \frac{2}{x^2-x-12} - \frac{4x(2x-1)}{(x^2-x-12)^2} + \frac{2(x^2-1)(2x-1)^2}{(x^2-x-12)^3} - \frac{2(x^2-1)}{(x^2-x-12)^2}$$

```
> b1:= df2(a[1]);
```

$$b1 := \frac{2}{(-11-2\sqrt{30})^2-1+2\sqrt{30}} - \frac{4(-11-2\sqrt{30})(-23-4\sqrt{30})}{((-11-2\sqrt{30})^2-1+2\sqrt{30})^2} + \frac{2((-11-2\sqrt{30})^2-1)(-23-4\sqrt{30})^2}{((-11-2\sqrt{30})^2-1+2\sqrt{30})^3} - \frac{2((-11-2\sqrt{30})^2-1)}{((-11-2\sqrt{30})^2-1+2\sqrt{30})^2}$$

```
> evalf(b1);
```

$$0.000090526244$$

```
> b2:= df2(a[2]);
```

$$b2 := \frac{2}{(-11+2\sqrt{30})^2-1-2\sqrt{30}} - \frac{4(-11+2\sqrt{30})(-23+4\sqrt{30})}{((-11+2\sqrt{30})^2-1-2\sqrt{30})^2} + \frac{2((-11+2\sqrt{30})^2-1)(-23+4\sqrt{30})^2}{((-11+2\sqrt{30})^2-1-2\sqrt{30})^3} - \frac{2((-11+2\sqrt{30})^2-1)}{((-11+2\sqrt{30})^2-1-2\sqrt{30})^2}$$

```
> evalf(b2);
```

$$-0.1533599973$$

Druhá derivace je **záporná** v bodě a1= -0.04554885 a **kladná** v bodě a2= -21.95445115, což znamená, že
funkce f(x) má v bodě **a1 lokální maximum** a v bodě **a2 lokální minimum**.

Zjistíme si konvexnost a konkávnost:

```
> i1:=solve(df1(x)>0,x);
```

$$i1 := \text{RealRange}(\text{Open}(-11-2\sqrt{30}), \text{Open}(-3)), \text{RealRange}(\text{Open}(-3), \text{Open}(-11+2\sqrt{30}))$$

```
> i2:=solve(df1(x)<0,x);
```

$$i2 := \text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(-11-2\sqrt{30})), \text{RealRange}(\text{Open}(-11+2\sqrt{30}), \text{Open}(4)), \text{RealRange}(\text{Open}(4), \infty)$$

(Tj. funkce je **rostoucí** na intervalech i1 -> (-21.95445115 , -3) a (-3 , -0.04554885), **klesající** na intervalech i2 -> (-nekonečno , -21.95445115), (-0.04554885 , 4) a (4 , nekonečno).)

```
> df2:= D(df1);
```

$$df2 := x \to \frac{2}{x^2-x-12} - \frac{4x(2x-1)}{(x^2-x-12)^2} + \frac{2(x^2-1)(2x-1)^2}{(x^2-x-12)^3} - \frac{2(x^2-1)}{(x^2-x-12)^2}$$

```
> i3:=solve(df2(x)>0,x);
> i4:=solve(df2(x)<0,x);
```

$$i3 := \text{RealRange}(\text{Open}(-2\,15^{(2/3)}-4\,15^{(1/3)}-11), \text{Open}(-3)), \text{RealRange}(\text{Open}(4), \infty)$$

$$i4 := \text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(-2\,15^{(2/3)}-4\,15^{(1/3)}-11)), \text{RealRange}(\text{Open}(-3), \text{Open}(4))$$

```
> inb:=[solve(df2(x)=0,x)];
```

$$inb := \left[-2\,15^{(2/3)}-4\,15^{(1/3)}-11,\ 15^{(2/3)}+2\,15^{(1/3)}-11+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\,(-2\,15^{(2/3)}+4\,15^{(1/3)}),\ 15^{(2/3)}+2\,15^{(1/3)}-11-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\,(-2\,15^{(2/3)}+4\,15^{(1/3)})\right]$$

```
> evalf(inb);
```

$$[-33.02925229, 0.01462614-1.991473649\,I, 0.01462614+1.991473649\,I]$$

```
> df2(-4);
```

$$\frac{583}{256}$$

```
> df2(5);
```

$$\frac{137}{32}$$

```
> df2(1);
```

$$\frac{-7}{36}$$

```
> df2(-34);
```

$$\frac{-1127}{817345876}$$

```
> inb:=evalf(inb[1]);
```

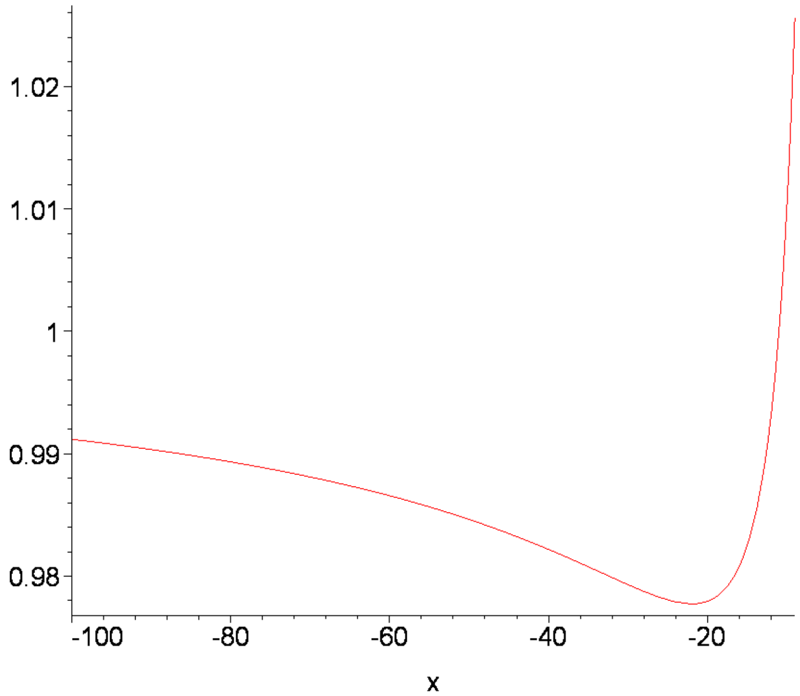
$$inb := -33.02925229$$

Druhá derivace je **záporná** na intervalech i4 -> (-nekonečno , -33.02925229) a (-3 , 4), což znamená, že funkce je tomto intervalu **konkávní** a
kladná na intervalu i3 -> (-33.02925229 , -3) a (4 , nekonečno), takže je na něm **konvexní**.
Inflexní bod je -33.02925229.

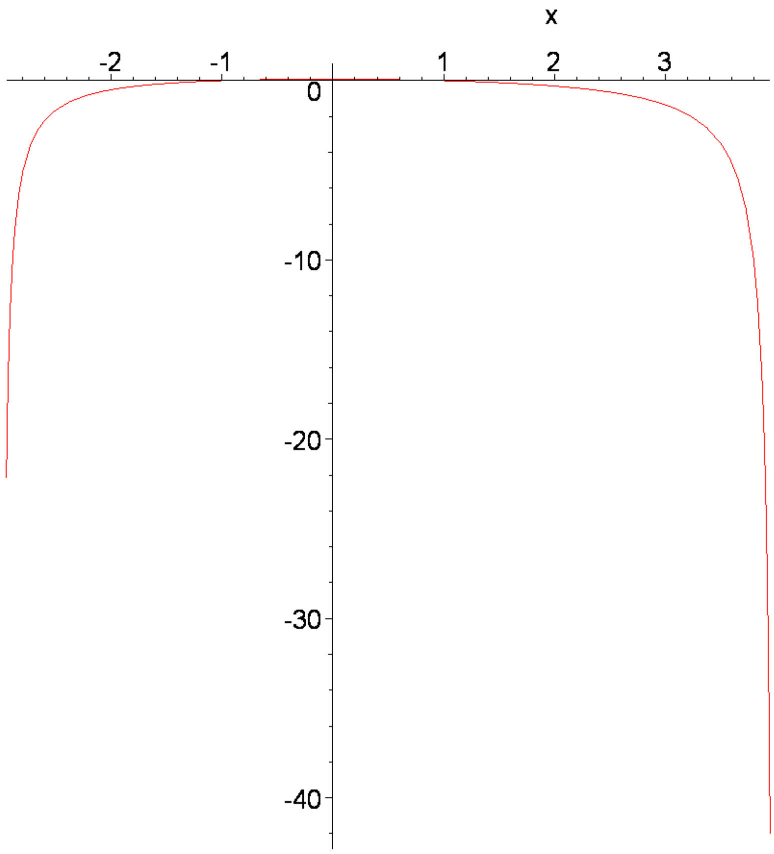
Ověříme si, zda je to pravda, nakreslením grafu:

Vzhledem k nespojitosti funkce jsou zde tři grafy podle jednotlivých intervalů spojitosti, je zde pěkně vidět inflexní bod inb = -33.02925229,
zda je funkce konvexní či konkávní, apod.

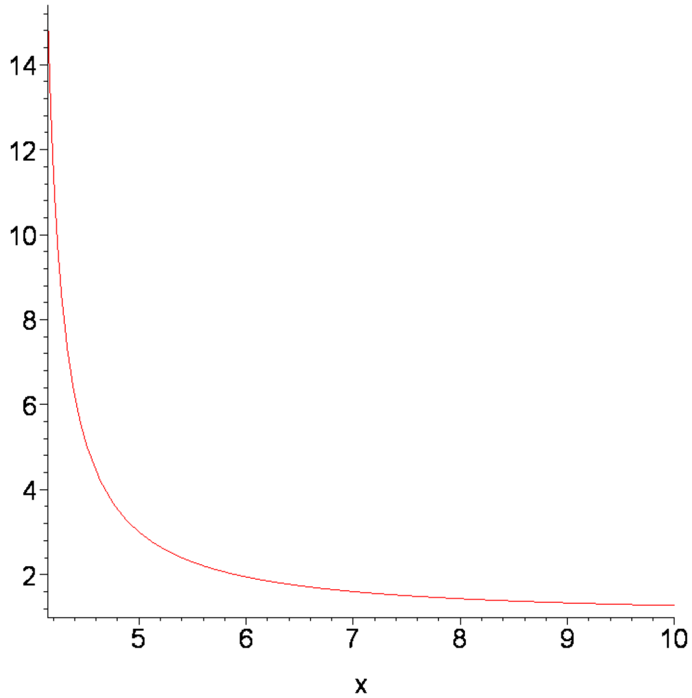
```
> plot (f(x),x=-100..-9, color=red , discont=true);
```




```
> plot (f(x),x=-2.95..3.95, color=red , discont=true);
```




```
> plot (f(x),x=4.15..10, color=red , discont=true);
```



===
====================

<u>Příklad č. 5:</u>

Vyšetření průběhu funkce g(x) = sin(x^2)+cos(x).

Definiční obor je reálná osa, obor hodnot je také reálná osa.

```
> g := x -> sin(x^2)+cos(x) ;
```

$$g := x \to \sin(x^2) + \cos(x)$$

Tato funkce nemá limity a protože je sudá, stačí ji počítat na intervalu např. (0, Pi). (Funkce je symetrická kolem osy y.)

Spočítáme si derivaci a zjistíme nulové body:

```
> dg1:= D(g);
```

$$dg1 := x \to 2\cos(x^2)\,x - \sin(x)$$

```
> a1:=fsolve (dg1(x)=0,x=0..1);
```

$$a1 := 0.$$

```
> a2:=fsolve (dg1(x)=0,x=1..2);
```

$$a2 := 1.071801348$$

```
> a3:=fsolve (dg1(x)=0,x=2..2.5);
```

$$a3 := 2.212343044$$

```
> a4:=fsolve (dg1(x)=0,x=2.5..Pi);
```

$$a4 := 2.791506840$$

V těchto bodech je buď maximum nebo minimum, ověříme to druhou derivací:

```
> dg2:=D(dg1);
```

$$dg2 := x \to -4\sin(x^2)\,x^2 + 2\cos(x^2) - \cos(x)$$

```
> b1:= dg2(a1);
```

$$b1 := 1.$$

```
> b2:= dg2(a2);
```

$$b2 := -3.851147736$$

```
> b3:= dg2(a3);
```

$$b3 := 20.21480710$$

```
> b4:= dg2(a4);
```

$$b4 := -30.04896079$$

Druhá derivace je **záporná** v bodech a2 = 1.071801348 a a4 = 2.791506840 a **kladná** v bodech a1 = 0 a a3 = 2.212343044, což znamená, že funkce g(x) má v bodech **a2, a4 lokální maximum** a v bodech **a1, a3 lokální minimum**.

```
> dg2:= D(dg1);
```

$$dg2 := x \to -4\sin(x^2)\,x^2 + 2\cos(x^2) - \cos(x)$$

Inflexní body:

```
> inb1:=fsolve(dg2(x)=0,x=0..1);
```

$inb1 := 0.7131447905$

```
> inb2:=fsolve(dg2(x)=0,x=1..2);
```

$inb2 := 1.809757812$

```
> inb3:=fsolve(dg2(x)=0,x=2..3);
```

$inb3 := 2.528463001$

```
> inb4:=fsolve(dg2(x)=0,x=3..3.5);
```

$inb4 := 3.074292412$

Konvexnost, konkávnost:

```
> dg2(0.5);
```

0.8128383221

```
> dg2(1.1);
```

-4.275938767

```
> dg2(2.1);
```

16.74887671

```
> dg2(2.9);
```

-28.65724295

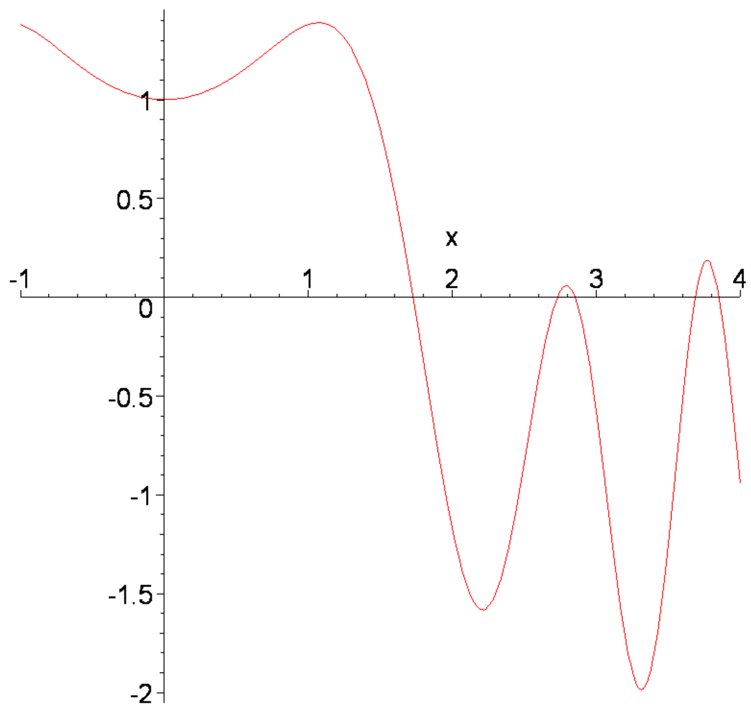
```
> dg2(3.1);
```

6.112638504

Druhá derivace je **záporná** na intervalech (0.7131447905 , 1.809757812) a (2.528463001 , 3.074292412),
což znamená, že funkce je těchtoto intervalech **konkávní** a
kladná na intervalech (0 , 0.7131447905) , (1.809757812 , 2.528463001) a (3.074292412 , Pi), takže je
na něm **konvexní**.
Inflexní body jsou 0.7131447905, 1.809757812, 2.528463001 a 3.074292412.

Ověříme si, zda je to pravda, nakreslením grafu (nakreslíme ho trochu větší):

```
> plot (g(x),x=-1..4);
```



===
=====================

Příklad č. 6:

Vyšetření průběhu funkce u(x) = (x^2-1)^2 / ((x^2+x-1))^3 + 3*x + 5.

Definiční obor je nemusí být celá reálná osa, obor hodnot je reálná osa.

```
> u := x -> (x^2-1)^2/((x^2+x-1))^3 + 3*x + 5;
```

$$u := x \to \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+x-1)^3} + 3\,x + 5$$

Podíváme se na to, jak funkce vypadá v nekonečnu:

```
> Limit (u(x),x=infinity)=limit (u(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+x-1)^3} + 3\,x + 5 = \infty$$

```
> Limit (u(x),x=-infinity) = limit (u(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+x-1)^3} + 3\,x + 5 = -\infty$$

Podíváme se na případné body nespojitosti a spočítáme si v nich limity zleva a zprava:

```
> bn:=solve((x^2+x-1)=0,x);
```

$$bn := \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

```
> [evalf(bn)];
```

$$[0.6180339880, -1.618033988]$$

```
> Limit (u(x),x=bn[1])=limit (u(x),x=bn[1],right);
```

$$\lim_{x \to \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1/2\right)} \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+x-1)^3} + 3x + 5 = \infty$$

```
> Limit (u(x),x=bn[1])=limit (u(x),x=bn[1],left);
```

$$\lim_{x \to \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1/2\right)} \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+x-1)^3} + 3x + 5 = -\infty$$

```
> Limit (u(x),x=bn[2])=limit (u(x),x=bn[2],right);
```

$$\lim_{x \to \left(-1/2 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+x-1)^3} + 3x + 5 = -\infty$$

```
> Limit (u(x),x=bn[2])=limit (u(x),x=bn[2],left);
```

$$\lim_{x \to \left(-1/2 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+x-1)^3} + 3x + 5 = \infty$$

Zjistíme si body podezřelé z extrému:

```
> du1:= D(u);
```

$$du1 := x \to \frac{4\,(x^2-1)\,x}{(x^2+x-1)^3} - \frac{3\,(x^2-1)^2\,(2\,x+1)}{(x^2+x-1)^4} + 3$$

```
> a1:=fsolve (du1(x)=0,x=-1..0.5);
```

$$a1 := 0.$$

```
> a2:=fsolve (du1(x)=0,x=0.5..2);
```

$$a2 := 0.9013394452$$

V těchto bodech je buď maximum nebo minimum, ověříme to druhou derivací:

```
> du2:=D(du1);
```

$$du2 := x \to \frac{8\,x^2}{(x^2+x-1)^3} - \frac{24\,(x^2-1)\,x\,(2\,x+1)}{(x^2+x-1)^4} + \frac{4\,(x^2-1)}{(x^2+x-1)^3} + \frac{12\,(x^2-1)^2\,(2\,x+1)^2}{(x^2+x-1)^5} - \frac{6\,(x^2-1)^2}{(x^2+x-1)^4}$$

```
> b1:= du2(a1);
```

$$b1 := -14.00000000$$

```
> b2:= du2(a2);
```

$$b2 := 76.72433838$$

Druhá derivace je **záporná** v bodě a1 = 0 (b1 = -14) a **kladná** v bodě a2 = 0.9013394452 (b2 = 76.72433838),
což znamená, že funkce u(x) má v bodě **a1 lokální maximum** a v bodě **a2 lokální minimum**.

Zjistíme si konvexnost a konkávnost:

```
> i1:=solve (du1(x)>0,x);
```

$$i1 := \text{RealRange}\left(-\infty, \text{Open}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right), \text{RealRange}\left(\text{Open}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right), \text{Open}(0)\right),$$
$$\text{RealRange}(\text{Open}(\text{RootOf}(-26\,\_Z^4-14\,\_Z^3+28\,\_Z^2+8\,\_Z-14+3\,\_Z^7+12\,\_Z^6+6\,\_Z^5, \mathit{index}=1)), \infty$$

```
> i2:=solve(du1(x)<0,x);
```

$$i2 := \text{RealRange}\left(\text{Open}(0), \text{Open}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)\right), \text{RealRange}\left(\text{Open}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right),\right.$$
$$\left.\text{Open}(\text{RootOf}(-26\,\_Z^4-14\,\_Z^3+28\,\_Z^2+8\,\_Z-14+3\,\_Z^7+12\,\_Z^6+6\,\_Z^5, \mathit{index}=1))\right)$$

(Tj. funkce je **rostoucí** na intervalech i1 -> (-nekonečno , -1.618033989), (-1.618033989 , 0) a (0.9013394452 , nekonečno),
klesající na zbylých částech (i2 -> (0 , 0.6180339890) a (0.6180339890 , 0.9013394452)).)

```
> du2:= D(du1);
```

$$du2 := x \rightarrow \frac{8\,x^2}{(x^2+x-1)^3} - \frac{24\,(x^2-1)\,x\,(2\,x+1)}{(x^2+x-1)^4} + \frac{4\,(x^2-1)}{(x^2+x-1)^3} + \frac{12\,(x^2-1)^2\,(2\,x+1)^2}{(x^2+x-1)^5}$$
$$-\frac{6\,(x^2-1)^2}{(x^2+x-1)^4}$$

```
> i3:=solve(du2(x)>0,x);
> i4:=solve(du2(x)<0,x);
```

$$i3 := \text{RealRange}\left(-\infty, \text{Open}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right), \text{RealRange}\left(\text{Open}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right),\right.$$
$$\left.\text{Open}(\text{RootOf}(7+13\,\_Z-10\,\_Z^3-5\,\_Z^4-\_Z^2+3\,\_Z^6-3\,\_Z^5, \mathit{index}=1))\right),$$
$$\text{RealRange}(\text{Open}(\text{RootOf}(7+13\,\_Z-10\,\_Z^3-5\,\_Z^4-\_Z^2+3\,\_Z^6-3\,\_Z^5, \mathit{index}=2)), \infty)$$
$$i4 := \text{RealRange}\left(\text{Open}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right), \text{Open}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)\right), \text{RealRange}($$
$$\text{Open}(\text{RootOf}(7+13\,\_Z-10\,\_Z^3-5\,\_Z^4-\_Z^2+3\,\_Z^6-3\,\_Z^5, \mathit{index}=1)),$$
$$\text{Open}(\text{RootOf}(7+13\,\_Z-10\,\_Z^3-5\,\_Z^4-\_Z^2+3\,\_Z^6-3\,\_Z^5, \mathit{index}=2)))$$

```
> fsolve(du2(x)=0,x=0..2);
```

1.098726636

```
> fsolve(du2(x)=0,x=2..3);
```

2.230129855

```
> fsolve(du2(x)=9999999999999999999,x=-3..-1);
```

-1.618156946

```
> fsolve(du2(x)=9999999999999999999,x=0..2);
```

0.6181176512

```
> du2(-3);
```

$$\frac{1096}{625}$$

```
> du2(-1);
```

-8

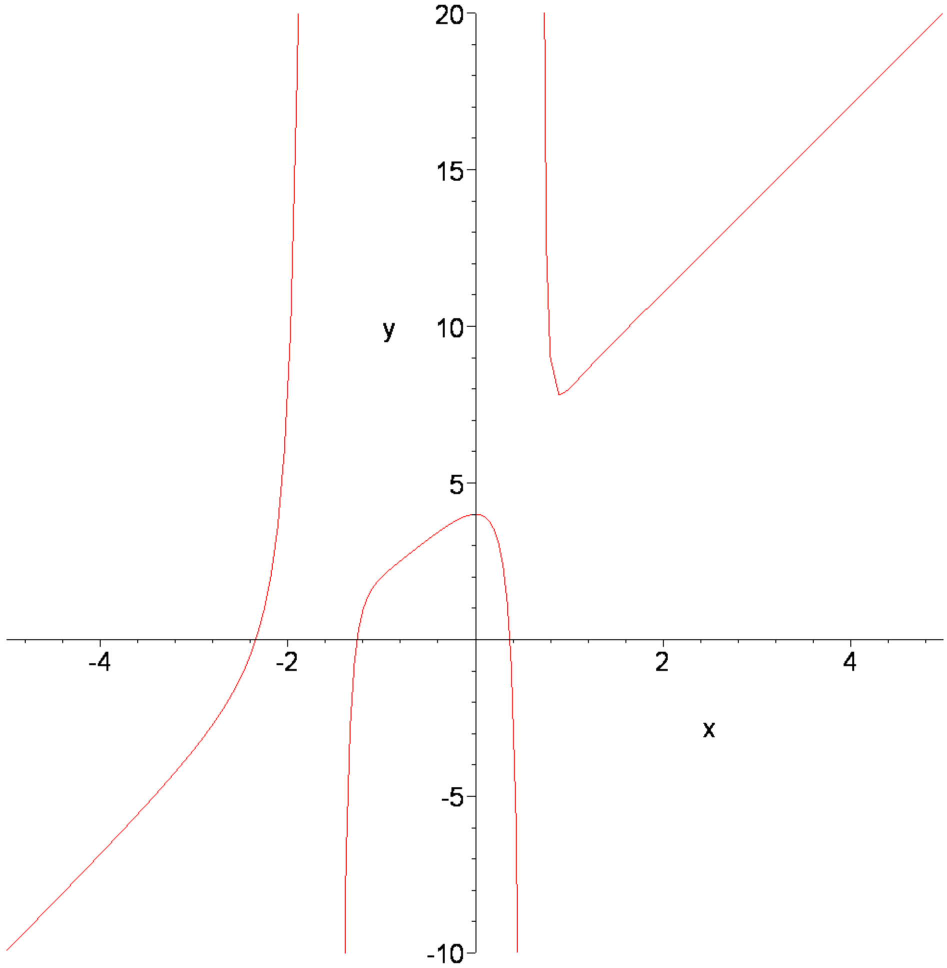
```
> du2(2);
```

$$\frac{-14}{625}$$

Druhá derivace je **záporná** na intervalech i4 -> (-1.618033989 , 0.6180339890), (1.098726636 , 2.230129855),
což znamená, že funkce je těchto intervalech **konkávní** a
kladná na intervalech i3 -> (-nekonečno , -1.61803398), (0.6180339890 , 1.098726636) a (2.230129855 , nekonečno),
takže je na nich **konvexní**.
Inflexní body jsou 1.098726636 a 2.230129855; v bodech -1.618033989 a 0.6180339890 sice dojde
ke změně konvexnosti a konkávnosti, ale druhá derivace je zde +/- nekonečno.

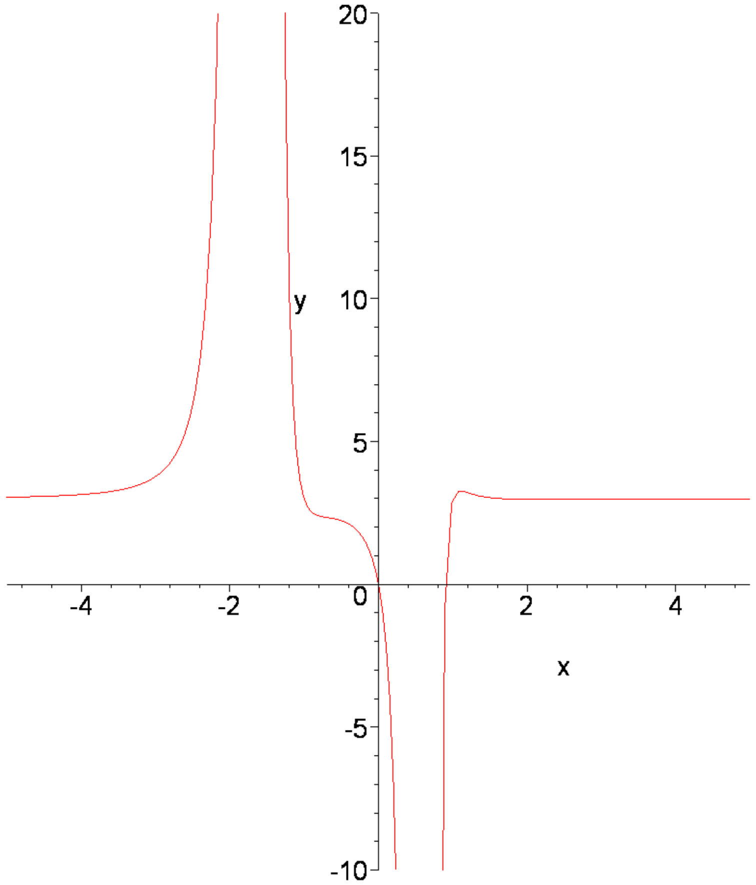
Ověříme si, zda je to pravda, nakreslením grafu:

```
> plot (u(x),x=-5..5,y=-10..20, color=red, discont=true);
```

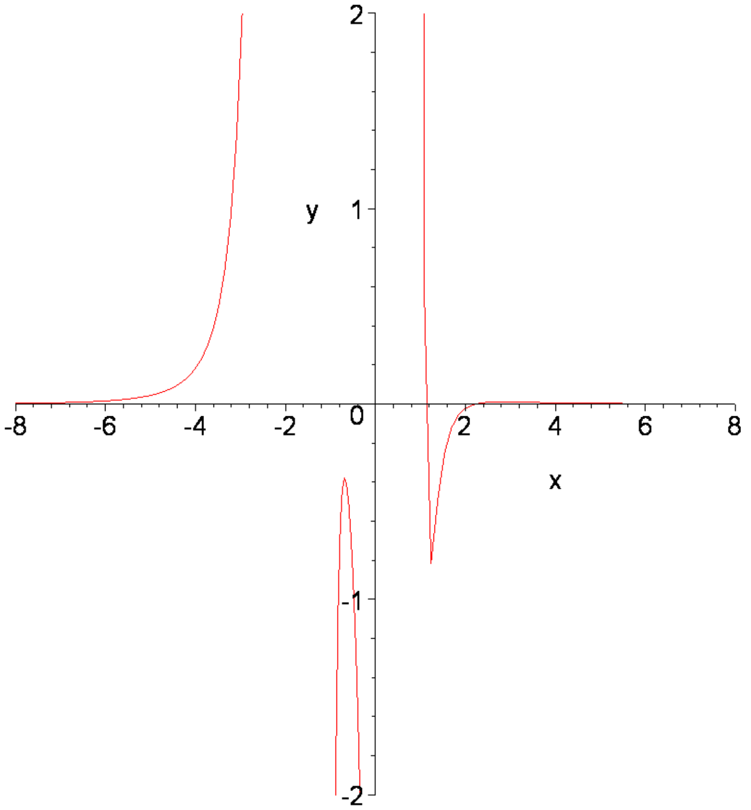


(Jako ukázku zde mám grafy první a druhé derivace - jsou zde pěkně vidět například extremální a inflexní body:)

```
> plot (du1(x),x=-5..5,y=-10..20, color=red, discont=true);
```




```
> plot (du2(x),x=-8..8,y=-2..2, color=red, discont=true);
```



===

<u>Příklad č. 7:</u>

Vyšetření průběhu funkce q(x) = x^2 / (x+1) .

Definiční obor je nemusí být celá reálná osa, obor hodnot je reálná osa.

```
> q := x -> x^2/(x+1);
```

$$q := x \to \frac{x^2}{x+1}$$

Podíváme se na to, jak funkce vypadá v nekonečnu:

```
> Limit (q(x),x=infinity)=limit (q(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty$$

```
> Limit (q(x),x=-infinity) = limit (q(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$$

Podíváme se na případné body nespojitosti a spočítáme si v nich limity zleva a zprava:

```
> bn:=solve((x+1)=0,x);
```

$$bn := -1$$

```
> Limit (q(x),x=bn)=limit (q(x),x=bn,right);
```

$$\lim_{x \to (-1)} \frac{x^2}{x+1} = \infty$$

```
> Limit (q(x),x=bn)=limit (q(x),x=bn,left);
```

$$\lim_{x \to (-1)} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$$

Zjistíme si body podezřelé z extrému:

```
> dq1:= D(q);
```

$$dq1 := x \to \frac{2\,x}{x+1} - \frac{x^2}{(x+1)^2}$$

```
> a:=[solve (dq1(x)=0,x)];
```

$$a := [0, -2]$$

V těchto bodech je buď maximum nebo minimum, ověříme to druhou derivací:

```
> dq2:=D(dq1);
```

$$dq2 := x \to \frac{2}{x+1} - \frac{4\,x}{(x+1)^2} + \frac{2\,x^2}{(x+1)^3}$$

```
> b1:= dq2(a[1]);
```

$$b1 := 2$$

```
> b2:= dq2(a[2]);
```

$$b2 := -2$$

Druhá derivace je **záporná** v bodě a2 = -2 (b2 = -2) a **kladná** v bodě a1 = 0 (b1 = 2), což znamená, že funkce q(x) má
v bodě **a2 lokální maximum** a v bodě **a1 lokální minimum**.

Zjistíme si konvexnost a konkávnost:

```
> i1:=solve (dq1(x)>0,x);
```

$$i1 := \mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(-2)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \infty)$$

```
> i2:=solve(dq1(x)<0,x);
```

$$i2 := \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-2), \mathrm{Open}(-1)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-1), \mathrm{Open}(0))$$

(Tj. funkce je **rostoucí** na intervalech i1 -> (-nekonečno , -2) a (0 , nekonečno), **klesající** na zbylých částech (i2 -> (-2 , -1) a (-1 , 0)).)

```
> dq2:= D(dq1);
```

$$dq2 := x \rightarrow \frac{2}{x+1} - \frac{4\,x}{(x+1)^2} + \frac{2\,x^2}{(x+1)^3}$$

```
> i3:=solve(dq2(x)>0,x);
> i4:=solve(dq2(x)<0,x);
```

$$i3 := \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-1), \infty)$$

$$i4 := \mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(-1))$$

```
> dq2(-3);
```

$$\frac{-1}{4}$$

```
> dq2(0);
```

$$2$$

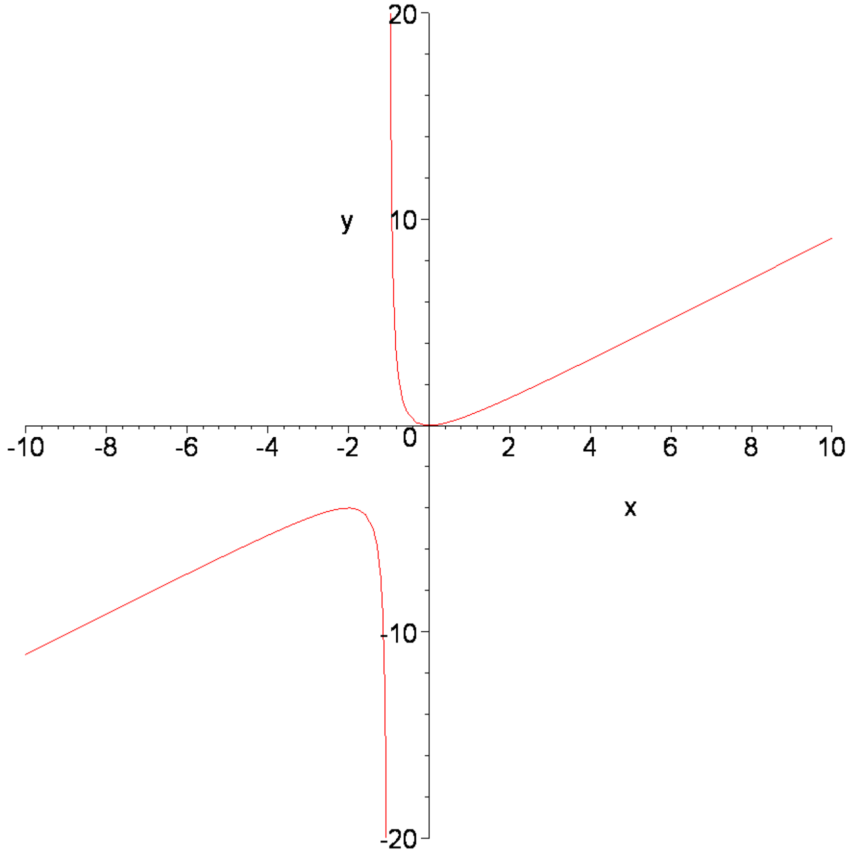
```
> dq2(2);
```

$$\frac{2}{27}$$

Druhá derivace je **záporná** na intervalu i3 = (-1 , nekonečno), což znamená, že funkce je tomto intervalu **konkávní** ;
kladná na intervalu i4 = (-nekonečno , -1), takže je na něm **konvexní**.
Inflexní body nejsou; ke změně konvexnosti a konkávnosti dojde v bodě -1, ale druhá derivace je zde +/- nekonečno.

Ověříme si, zda je to pravda, nakreslením grafu:

```
> plot (q(x),x=-10..10, y=-20..20, color=red, discont=true);
```



==
=====================

Příklad č. 8:

Vyšetření průběhu funkce g(x) = ln (ln (1+ |2-x|)).

Definiční obor je nemusí být celá reálná osa, obor hodnot je reálná osa.

```
> g := x -> ln(ln(1+abs(2-x)));
```

$$g := x \rightarrow \ln(\ln(1 + |2 - x|))$$

Podíváme se na to, jak funkce vypadá v nekonečnu:

```
> Limit (g(x),x=infinity)=limit (g(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \ln(\ln(1 + |x - 2|)) = \infty$$

```
> Limit (g(x),x=-infinity) = limit (g(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to (-\infty)} \ln(\ln(1 + |x - 2|)) = \infty$$

Podíváme se na případné body nespojitosti a spočítáme si v nich limity zleva a zprava. (Buď položíme
rovno 0 nebo interval, kde je logaritmus definován, tj. pro argument >0.):

```
> bn1:=solve((ln(1+abs(2-x)))=0,x);
```

$$bn1 := 2$$

Výraz 1+abs(2-x) je vždy kladný a větší než 0, což znamená, že vnitřní logaritmus je vždy definován.

```
> Limit (g(x),x=bn1)=limit (g(x),x=bn1,right);
```

$$\lim_{x \to 2} \ln(\ln(1+|x-2|)) = -\infty$$

```
> Limit (g(x),x=bn1)=limit (g(x),x=bn1,left);
```

$$\lim_{x \to 2} \ln(\ln(1+|x-2|)) = -\infty$$

Zjistíme si body podezřelé z extrému:

```
> dg1:= D(g);
```

$$dg1 := x \to -\frac{\mathrm{abs}(1, 2-x)}{(1+|2-x|)\ln(1+|2-x|)}$$

(Tímto si ověřujeme, zda je jmenovatel někde roven 0, tj. limita je +/- nekonečno:)

```
> a1:=solve (dg1(x)=-999999999999,x);
```

$$a1 := \frac{1}{999999999999} \frac{-1 + 2999999999997\,\mathrm{LambertW}\left(\frac{1}{999999999999}\right)}{\mathrm{LambertW}\left(\frac{1}{999999999999}\right)}$$

```
> evalf(");
>
Warning, incomplete string;  use " to end the string
```

```
> a2:=solve (dg1(x)=0,x);
```

$$a2 :=$$

V těchto bodech je pouze minimum a to sice limita do mínus nekonečna.

Zjistíme si konvexnost a konkávnost:

```
> i1:=solve (dg1(x)>0,x);
```

$$i1 := \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(2), \infty)$$

```
> i2:=solve(dg1(x)<0,x);
```

$$i2 := \mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(2))$$

(Tj. funkce je **rostoucí** na intervalu i1 = (2 , nekonečno) a **klesající** na zbylé části (i2 = (-nekonečno , 2)).)

```
> dg2:= D(dg1);
```

$$dg2 := x \to -\frac{\mathrm{signum}(1, 2-x)}{(1+|2-x|)\ln(1+|2-x|)} - \frac{\mathrm{abs}(1, 2-x)^2}{(1+|2-x|)^2 \ln(1+|2-x|)} - \frac{\mathrm{abs}(1, 2-x)^2}{(1+|2-x|)^2 \ln(1+|2-x|)^2}$$

```
> i3:=solve(dg2(x)>0,x);
> i4:=solve(dg2(x)<0,x);
```

$$i3 :=$$

$$i4 := \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(2), \infty), \mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(2))$$

```
> evalf(dg2(-3));
```

$$-0.02415550272$$

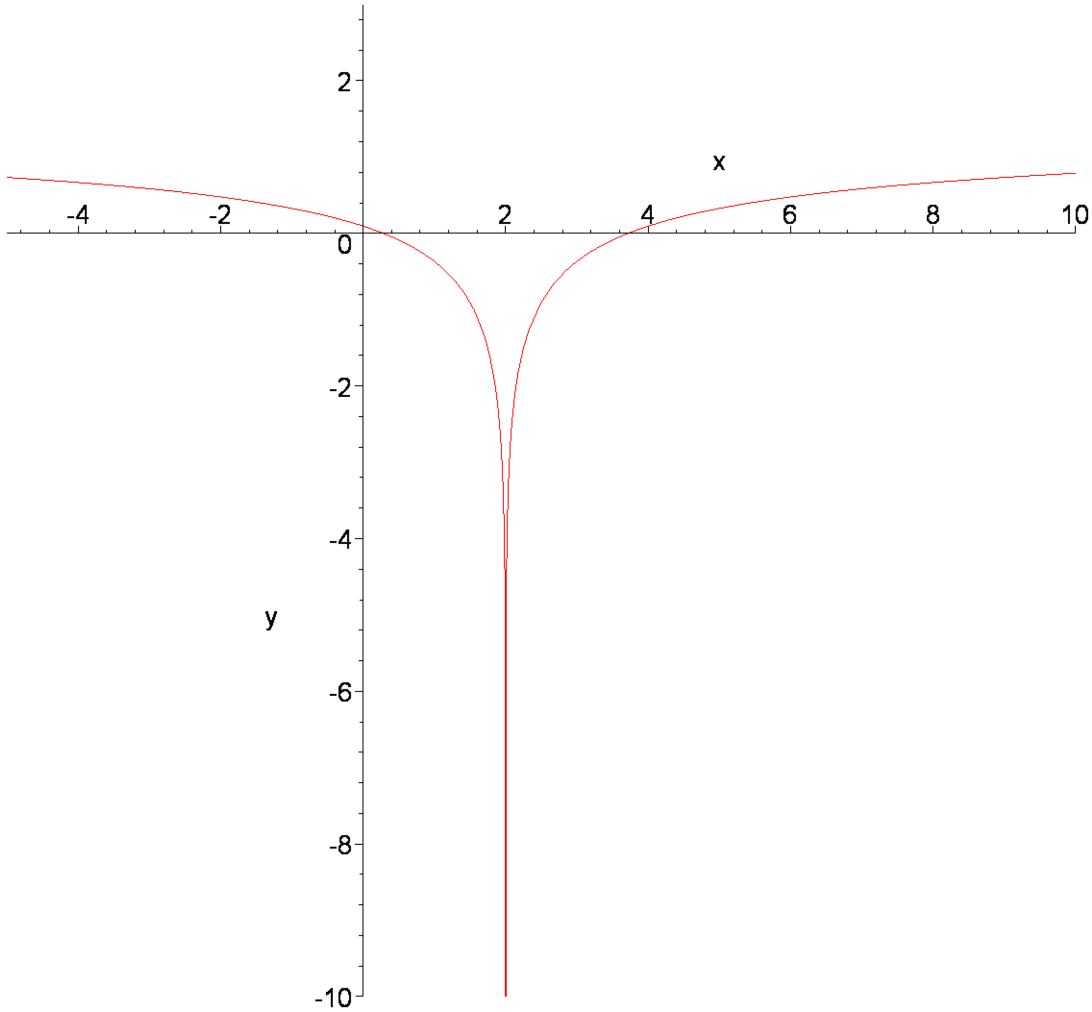
```
> evalf(dg2(3));
```

$$-0.8810160054$$

Druhá derivace je **záporná** na intervalech i4 -> (-nekonečno , 2) a (2 , nekonečno), což znamená,
že funkce je těchto intervalech **konkávní** a protože tyto intervaly pokrývají reálnou osu, funkce je
všude (kromě bodu 2) **konkávní**.
Inflexní body tím pádem neexistují, pouze v bodě 2 je první derivace rovna +/- nekonečnu.

Ověříme si, zda je to pravda, nakreslením grafu:

```
> plot (g(x),x=-5..10, y=-10..3, color=red, discont=true);
```



===

<u>Příklad č. 9:</u>

Vyšetření průběhu funkce h(x) = sin(x)+ cos (3x) / 3 na intervalu (-2Pi , 2Pi).

Definiční obor je celá reálná osa, obor hodnot je interval (-4/3 , 4/3).

```
> h := x -> sin(x)+(1/3)*cos(3*x);
```

$$h := x \rightarrow \sin(x) + \frac{1}{3}\cos(3\,x)$$

Podíváme se na to, jak funkce vypadá v nekonečnu:

```
> Limit (h(x),x=infinity)=limit (h(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) + \frac{1}{3}\cos(3\,x) = \frac{-4}{3} .. \frac{4}{3}$$

```
> Limit (h(x),x=-infinity) = limit (h(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \sin(x) + \frac{1}{3}\cos(3\,x) = \frac{-4}{3} .. \frac{4}{3}$$

Zjistíme si body podezřelé z extrému:

```
> dh1:= D(h);
```

$$dh1 := x \rightarrow \cos(x) - \sin(3\,x)$$

```
> a1:=fsolve (dh1(x)=0,x=-2*Pi..-5.8);
```

$$a1 := -5.890486225$$

```
> a2:=fsolve (dh1(x)=0,x=-5.8..-4.4);
```

$$a2 := -5.497787144$$

```
> a3:=fsolve (dh1(x)=0,x=-4.4..-3.6);
```

$$a3 := -4.319689899$$

```
> a4:=fsolve (dh1(x)=0,x=-4.3..-2.4);
```

$$a4 := -2.748893572$$

```
> a5:=fsolve (dh1(x)=0,x=-2.4..-1.6);
```

$$a5 := -2.356194490$$

```
> a6:=fsolve (dh1(x)=0,x=-1.6..0);
```

$$a6 := -1.178097245$$

```
> a7:=fsolve (dh1(x)=0,x=0..0.5);
```

$$a7 := 0.3926990817$$

```
> a8:=fsolve (dh1(x)=0,x=0.5..1.6);
```

$$a8 := 0.7853981634$$

```
> a9:=fsolve (dh1(x)=0,x=1.6..2.4);
```

$$a9 := 1.963495408$$

```
> a10:=fsolve (dh1(x)=0,x=2.4..3.6);
```

$$a10 := 3.534291735$$

```
> a11:=fsolve (dh1(x)=0,x=3.6..4.4);
```

$$a11 := 3.926990817$$

```
> a12:=fsolve (dh1(x)=0,x=4.4..2*Pi);
```

$$a12 := 5.105088062$$

V těchto bodech je buď maximum nebo minimum, ověříme to druhou derivací:

```
> dh2:=D(dh1);
```

$$dh2 := x \rightarrow -\sin(x) - 3\cos(3\,x)$$

```
> b1:= dh2(a1);
```

$$b1 := -1.530733740$$

```
> b2:= dh2(a2);
```

$$b2 := 1.414213565$$

```
> b3:= dh2(a3);
```

$$b3 := -3.695518126$$

```
> b4:= dh2(a4);
```

$$b4 := 1.530733730$$

```
> b5:= dh2(a5);
```

$b5 := -1.414213564$

```
> b6:= dh2(a6);
```

$b6 := 3.695518130$

```
> b7:= dh2(a7);
```

$b7 := -1.530733730$

```
> b8:= dh2(a8);
```

$b8 := 1.414213562$

```
> b9:= dh2(a9);
```

$b9 := -3.695518129$

```
> b10:= dh2(a10);
```

$b10 := 1.530733745$

```
> b11:= dh2(a11);
```

$b11 := -1.414213561$

```
> b12:= dh2(a12);
```

$b12 := 3.695518134$

Druhá derivace je **záporná** v bodech **a1**, **a3**, **a5**, **a7**, **a9**, **a11**, tj. funkce h(x) má zde **lokální maximum** a
kladná v bodech **a2**, **a4**, **a6**, **a8**, **a10**, **a12**, což znamená, že funkce h(x) má zde **lokální minimum**.

Tedy funkce je **rostoucí** na intervalech (-2Pi , -5.89), (-5.498 , -4.32), (-2.749 , -2.356), (-1.178 , 0.393),
(0.785 , 1.963), (3.534 , 3.927), (5.105 , 2Pi)
a **klesající** na zbylých částech. (Zaokrouhleno na 3 desetinná mista, jinak jsou to po řadě body a1 až a12.)

Najdeme inflexní body, které budou vždy ležet mezi body maxima a minima, proto je použijeme jako meze
při hledání, kdy je druhá derivace nulová:

```
> i1:=fsolve(dh2(x)=0,x=a1..a2);
```

$i1 := -5.697847347$

```
> i2:=fsolve(dh2(x)=0,x=a2..a3);
```

$i2 := -4.824922806$

```
> i3:=fsolve(dh2(x)=0,x=a3..a4);
```

$i3 := -3.614396788$

```
> i4:=fsolve(dh2(x)=0,x=a4..a5);
```

$i4 := -2.556254693$

```
> i5:=fsolve(dh2(x)=0,x=a5..a6);
```

$i5 := -1.683330152$

```
> i6:=fsolve(dh2(x)=0,x=a6..a7);
```

$i6 := -0.4728041346$

```
> i7:=fsolve(dh2(x)=0,x=a7..a8);
```

$$i7 := 0.5853379602$$

```
> i8:=fsolve(dh2(x)=0,x=a8..a9);
```

$$i8 := 1.458262501$$

```
> i9:=fsolve(dh2(x)=0,x=a10..a11);
```

$$i9 := 3.726930614$$

```
> i10:=fsolve(dh2(x)=0,x=a11..a12);
```

$$i10 := 4.599855155$$

```
> i11:=fsolve(dh2(x)=0,x=a12..2*Pi);
```

$$i11 := 5.810381173$$

```
> c0:= dh2(-2*Pi+(i1-2*Pi)/2);
```

$$c0 := -2.204566759$$

```
> c1:= dh2(i1+(i2-i1)/2);
```

$$c1 := 2.138247569$$

```
> c2:= dh2(i2+(i3-i2)/2);
```

$$c2 := -3.868189764$$

```
> c3:= dh2(i3+(i4-i3)/2);
```

$$c3 := 3.013598083$$

```
> c4:= dh2(i4+(i5-i4)/2);
```

$$c4 := -2.138247569$$

```
> c5:= dh2(i5+(i6-i5)/2);
```

$$c5 := 3.868189764$$

```
> c6:= dh2(i6+(i7-i6)/2);
```

$$c6 := -3.013598084$$

```
> c7:= dh2(i7+(i8-i7)/2);
```

$$c7 := 2.138247570$$

```
> c8:= dh2(i8+(i9-i8)/2);
```

$$c8 := -0.7501859014$$

```
> c9:= dh2(i9+(i10-i9)/2);
```

$$c9 := -2.138247570$$

```
> c10:= dh2(i10+(i11-i10)/2);
```

$$c10 := 3.868189763$$

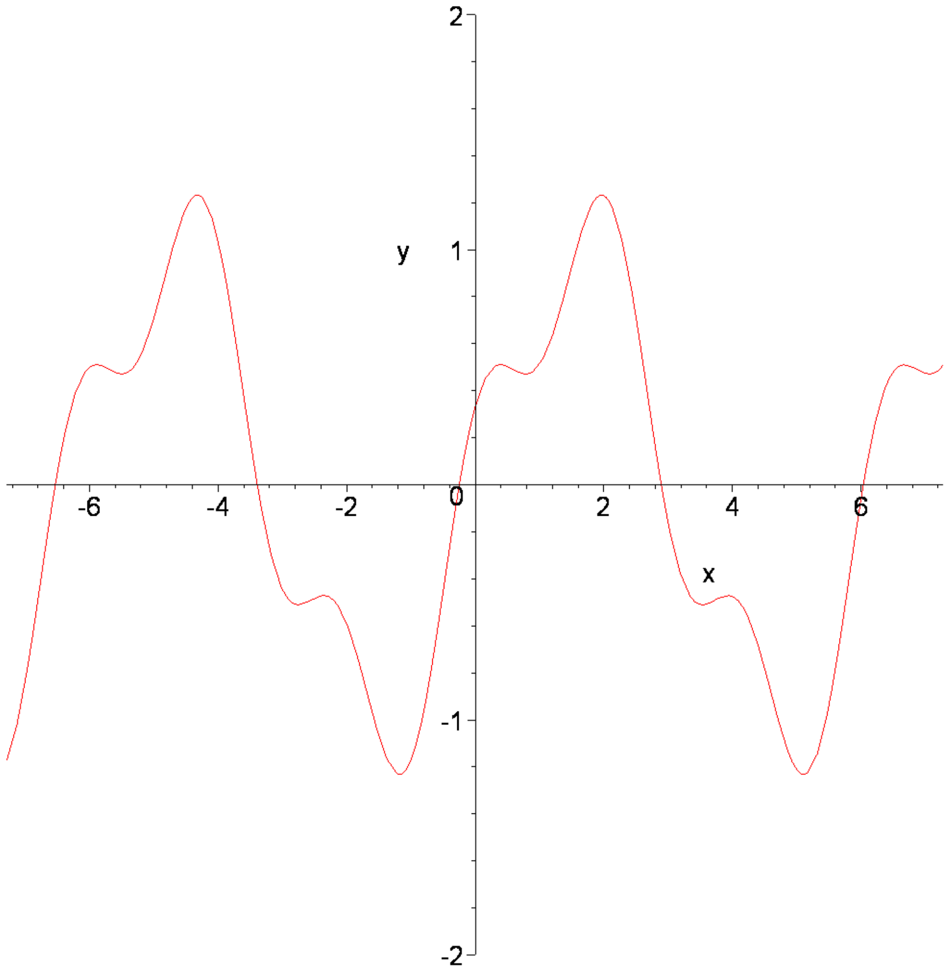
```
> c10:= dh2(i11+(2*Pi-i11)/2);
```

$$c10 := -2.042430896$$

Druhá derivace je **záporná** na intervalech (-2Pi , -5.698), (-4.825 , -3.614), (-2.556 , -1.683), (-0.473 , 0.585),
(1.458 , 3.727), (4.599 , 5.81),
což znamená, že funkce je těchto intervalech **konkávní** (Zaokrouhleno na 3 desetinná mista, jinak jsou to po řadě body i1 až i11.)
a **kladná** na zbylých intervalech, takže je na nich **konvexní**.
Inflexní body jsou body **i1** až **i11**.

Ověříme si, zda je to pravda, nakreslením grafu (trochu delší interval):

```
> plot (h(x),x=-2*Pi-1..2*Pi+1,y=-2..2, color=red, discont=true);
```



===
=====================

Příklad č. 10:

Vyšetření průběhu funkce f(x) = (e^(x) + e^(-x)) ^ (1/2) / ln ((-(x^2) + x + 3)^2) .

Definiční obor je nemusí být celá reálná osa, obor hodnot je reálná osa.

```
> f := x -> sqrt(exp(x)+exp(-x))/(ln((-(x^2)+x+3)^2));
```

$$f := x \to \frac{\sqrt{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{(-x)}}}{\ln((-x^2+x+3)^2)}$$

Podíváme se na to, jak funkce vypadá v nekonečnu:

```
> Limit (f(x),x=infinity)=limit (f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{(-x)}}}{\ln((-x^2+x+3)^2)} = \infty$$

```
> Limit (f(x),x=-infinity) = limit (f(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{\sqrt{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{(-x)}}}{\ln((-x^2+x+3)^2)} = \infty$$

Podíváme se na případné body nespojitosti a spočítáme si v nich limity zleva a zprava. Pod odmocninou jsou
vždy kladná čísla, logaritmus je definován pro nezáporný argument, který je ale téměř vždy, protože závorka
je zde umocněna na druhou (celkem tedy x je umocněno na čtvrtou). Musíme proto najít taková x, pro která je
argument logaritmu nulový a to jsou body nespojitosti bn (budou dvě dvojnásobná, protože je to druhá mocnina
výrazy, kde je x na druhou). Dále jsou to body, v nichž je logaritmus roven 0, což jsou body nespojitosti bnl:

```
> bn:=[solve((-x^2+x+3)=0,x)];
```

$$bn := \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right]$$

```
> evalf(");
>
Warning, incomplete string;  use " to end the string
```

```
> bnl:=[solve(ln(-x^2+x+3)=0,x)];
```

$$bnl := [\text{-}1, 2]$$

Je vidět, že jsou to vlastně dvě x dvojnásobně vzatá, tj. logaritmus není definován v bodech -1.302775638
a 2.302775638.

```
> Limit (f(x),x=bnl[1])=limit (f(x),x=bnl[1],right);
```

$$\lim_{x \to (\text{-}1)} \frac{\sqrt{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{(-x)}}}{\ln((-x^2+x+3)^2)} = \infty$$

```
> Limit (f(x),x=bnl[1])=limit (f(x),x=bnl[1],left);
```

$$\lim_{x \to (\text{-}1)} \frac{\sqrt{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{(-x)}}}{\ln((-x^2+x+3)^2)} = -\infty$$

```
> Limit (f(x),x=bnl[2])=limit (f(x),x=bnl[2],right);
```

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{(-x)}}}{\ln((-x^2+x+3)^2)} = -\infty$$

```
> Limit (f(x),x=bnl[2])=limit (f(x),x=bnl[2],left);
```

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{(-x)}}}{\ln((-x^2+x+3)^2)} = \infty$$

Zjistíme si body podezřelé z extrému:

```
> df1:= D(f);
```

$$df1 := x \to \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^{x}-\mathbf{e}^{(-x)}}{\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,\ln\left((-x^{2}+x+3)^{2}\right)} - \frac{2\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,(-2\,x+1)}{\ln\left((-x^{2}+x+3)^{2}\right)^{2}\,(-x^{2}+x+3)}$$

(Tímto si ověřujeme, zda je jmenovatel někde roven 0 (je-li argument logaritmu roven 1), tj. limita je +/- nekonečno):

```
> a1:=[solve(-(x^2)+x+3=1,x)];
```

$$a1 := [-1, 2]$$

(Je to ověřeno už vlastně v bodech bnl[1] a bnl[2], toto je vlastně jen potvrzení.)

```
> z1:=fsolve (df1(x)=0,x=-5..-2);
```

$$z1 := -2.654280587$$

```
> z2:=fsolve (df1(x)=0,x=-2..1);
```

$$z2 := 0.2622861914$$

```
> z3:=fsolve (df1(x)=0,x=1..4);
```

$$z3 := 3.646682199$$

```
> df2 := D(df1);
```

$$df2 := x \to \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}{\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,\ln\left((-x^{2}+x+3)^{2}\right)} - \frac{1}{4}\,\frac{\left(\mathbf{e}^{x}-\mathbf{e}^{(-x)}\right)^{2}}{\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}^{\,3}\,\ln\left((-x^{2}+x+3)^{2}\right)}$$
$$- \frac{2\left(\mathbf{e}^{x}-\mathbf{e}^{(-x)}\right)(-2\,x+1)}{\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,\ln\left((-x^{2}+x+3)^{2}\right)^{2}\,(-x^{2}+x+3)} + \frac{8\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,(-2\,x+1)^{2}}{\ln\left((-x^{2}+x+3)^{2}\right)^{3}\,(-x^{2}+x+3)^{2}}$$
$$+ \frac{2\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,(-2\,x+1)^{2}}{\ln\left((-x^{2}+x+3)^{2}\right)^{2}\,(-x^{2}+x+3)^{2}} + \frac{4\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}}{\ln\left((-x^{2}+x+3)^{2}\right)^{2}\,(-x^{2}+x+3)}$$

```
> df2(z1);
```

$$0.5605009768$$

```
> df2(z2);
```

$$0.6454631455$$

```
> df2(z3);
```

$$0.9226018580$$

V těchto bodech je druhá derivace **kladná**, což znamená, že body **z1**= -2.654280587, **z2** = 0.2622861914 a
z3= 3.646682199 jsou **lokální minima**.

Zjistíme si konvexnost a konkávnost:

```
> ib1:=fsolve (df2(x)=0,x=-5..-1);
```

$$ib1 := -1.336405289$$

```
> ib2:=fsolve(df2(x)=0,x=-1.33..-1.2);
```

$$ib2 := -1.260240876$$

```
> ib3:=fsolve(df2(x)=0,x=-1.26..2.7);
```

$$ib3 := 2.259745991$$

```
> ib4:=fsolve(df2(x)=0,x=2.2..3);
```

$$ib4 := 2.336169299$$

```
> ix1:=fsolve (df1(x)=99999999999999999999,x=-3..-1.55);
```

$$ix1 := \mathrm{fsolve}\left(\frac{1}{2}\,\frac{e^x - e^{(-x)}}{\sqrt{e^x + e^{(-x)}}\,\ln((-x^2+x+3)^2)} - \frac{2\sqrt{e^x + e^{(-x)}}\,(-2x+1)}{\ln((-x^2+x+3)^2)^2\,(-x^2+x+3)} = 99999999999999999999, x, -3 .. -1.55\right)$$

```
> ix2:=fsolve (df1(x)=99999999999999999999,x=-1.54..-1);
```

$$ix2 := \mathrm{fsolve}\left(\frac{1}{2}\,\frac{e^x - e^{(-x)}}{\sqrt{e^x + e^{(-x)}}\,\ln((-x^2+x+3)^2)} - \frac{2\sqrt{e^x + e^{(-x)}}\,(-2x+1)}{\ln((-x^2+x+3)^2)^2\,(-x^2+x+3)} = 99999999999999999999, x, -1.54 .. -1\right)$$

```
> ix3:=fsolve (df1(x)=99999999999999999999,x=-1.3..2);
```

$$ix3 := \mathrm{fsolve}\left(\frac{1}{2}\,\frac{e^x - e^{(-x)}}{\sqrt{e^x + e^{(-x)}}\,\ln((-x^2+x+3)^2)} - \frac{2\sqrt{e^x + e^{(-x)}}\,(-2x+1)}{\ln((-x^2+x+3)^2)^2\,(-x^2+x+3)} = 99999999999999999999, x, -1.3 .. 2\right)$$

```
> ix4:=fsolve (df1(x)=99999999999999999999,x=2.1..2.4);
```

$$ix4 := \mathrm{fsolve}\left(\frac{1}{2}\,\frac{e^x - e^{(-x)}}{\sqrt{e^x + e^{(-x)}}\,\ln((-x^2+x+3)^2)} - \frac{2\sqrt{e^x + e^{(-x)}}\,(-2x+1)}{\ln((-x^2+x+3)^2)^2\,(-x^2+x+3)} = 99999999999999999999, x, 2.1 .. 2.4\right)$$

```
> ix5:=fsolve (df1(x)=-99999999999999999999,x=-3..-0.8);
```

$$ix5 := \mathrm{fsolve}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^{x}-\mathbf{e}^{(-x)}}{\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,\ln\left(\left(-x^{2}+x+3\right)^{2}\right)}-\frac{2\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,\left(-2\,x+1\right)}{\ln\left(\left(-x^{2}+x+3\right)^{2}\right)^{2}\,\left(-x^{2}+x+3\right)}=-999999999999999999999,\ x,\ -3\,..\,-0.8\right)$$

```
> ix6:=fsolve (df1(x)=-999999999999999999999,x=0..3);
```

$$ix6 := \mathrm{fsolve}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^{x}-\mathbf{e}^{(-x)}}{\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,\ln\left(\left(-x^{2}+x+3\right)^{2}\right)}-\frac{2\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,\left(-2\,x+1\right)}{\ln\left(\left(-x^{2}+x+3\right)^{2}\right)^{2}\,\left(-x^{2}+x+3\right)}=-999999999999999999999,\ x,\ 0\,..\,3\right)$$

```
> ix7:=fsolve (df1(x)=-999999999999999999999,x=2.31..2.7);
```

$$ix7 := \mathrm{fsolve}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{e}^{x}-\mathbf{e}^{(-x)}}{\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,\ln\left(\left(-x^{2}+x+3\right)^{2}\right)}-\frac{2\sqrt{\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{(-x)}}\,\left(-2\,x+1\right)}{\ln\left(\left(-x^{2}+x+3\right)^{2}\right)^{2}\,\left(-x^{2}+x+3\right)}=-999999999999999999999,\ x,\ 2.31\,..\,2.7\right)$$

Inflexní body jsou body **ib1**= -1.336405289, **ib2**= -1.260240876, **ib3**= 2.259745991, **ib4** = 2.336169299.

V bodě ix1= -1.561552813 jde 1. derivace do nekonečna, v bodě ix2=ix5= -1.302775638 jde 1. derivace
+/- nekonečna, v bodě ix3= 2.000000000 jde 1. derivace do nekonečna, v bodě ix4=ix6= 2.302775638 jde
1. derivace do +/- nekonečna, v bodě ix7= 2.561552813 jde 1. derivace do -nekonečna.

```
> df2(-2.654280587);
```

$$0.5605009768$$

```
> df2(0.2622861914);
```

$$0.6454631455$$

```
> df2(3.646682199);
```

$$0.9226018580$$

```
> df2(-2.1);
```

$$3.666299010$$

```
> df2(-1.55);
```

$$-350874.7068$$

```
> df2(-1.4);
```

-121.1224604

```
> df2(-1.32);
```

112.6893291

```
> df2(-1.28);
```

69.80025611

```
> df2(-1.25);
```

-14.52863935

```
> df2(-0.9);
```

586.3299283

```
> df2(0.1);
```

0.7622387795

```
> df2(2.1);
```

-910.7936703

```
> df2(2.25);
```

-21.76152346

```
> df2(2.26);
```

0.684612864

```
> df2(2.31);
```

1016.313988

```
> df2(2.34);
```

-17.28116969

```
> df2(2.4);
```

-196.2676388

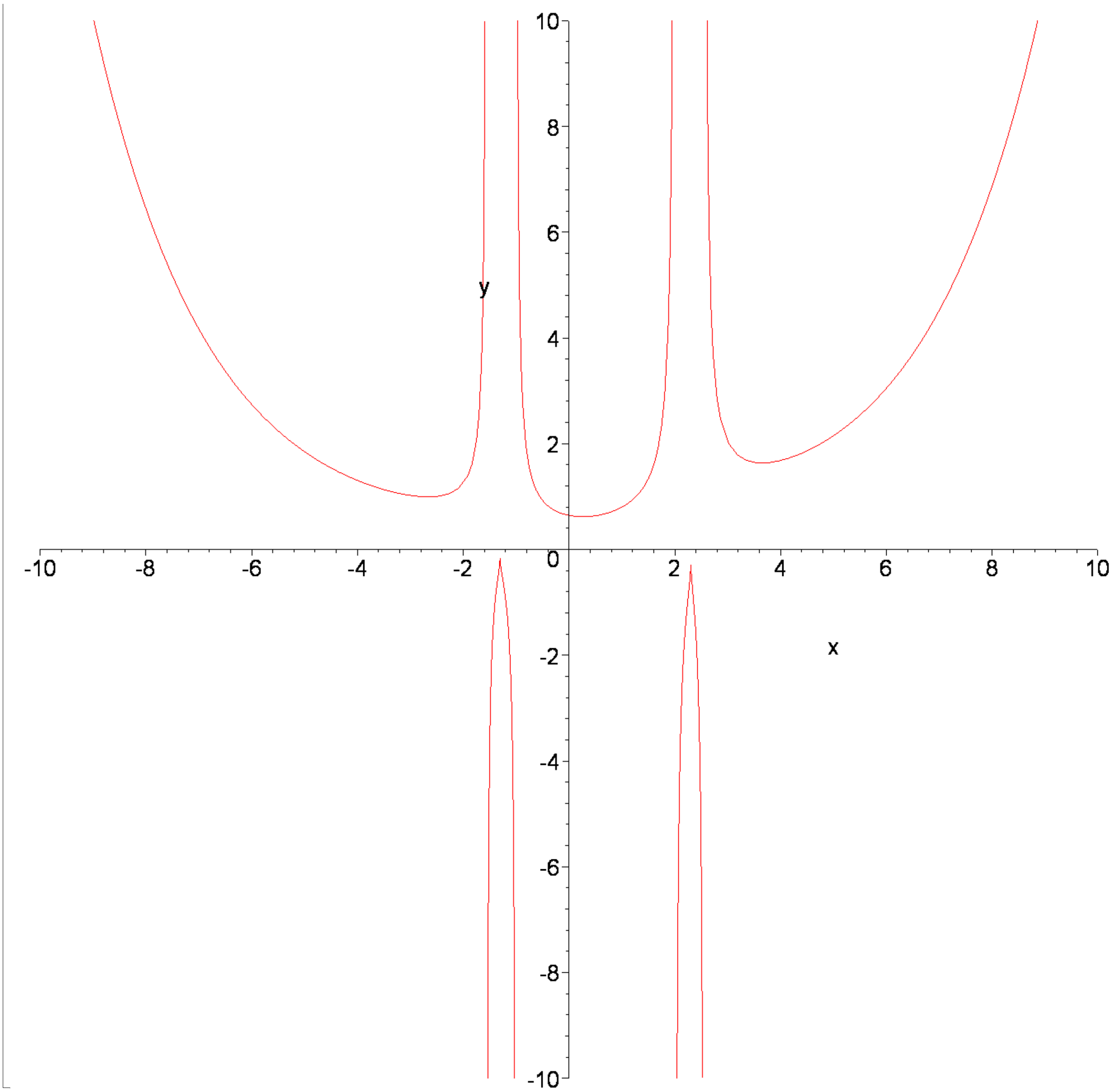
```
> df2(2.6);
```

15408.01986

Druhá derivace je **záporná** na intervalech (-1.56 , -1.33) a (-1.26 , -1), (2 , 2.25), (2.34 , 2.56) což znamená,
že funkce je těchto intervalech **konkávní** a na zbytku je tato funkce **konkávní**.
(Zaokrouhleno na 2 desetinná mista.)

Ověříme si, zda je to pravda, nakreslením grafu:

```
> plot (f(x),x = -10..10, y=-10..10, discont=true, color=red);
```



10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
y
x
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10

>